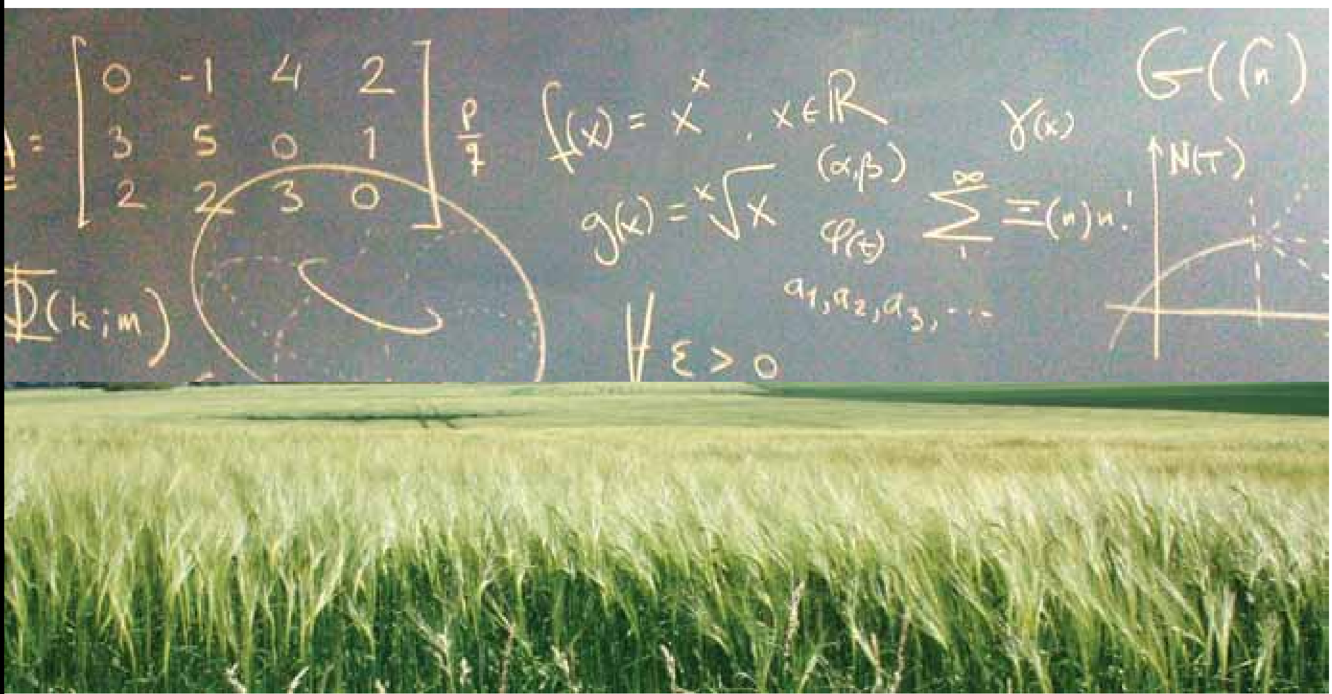
mat

MATILDE



NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR 43 AUGUST 2011

Vagn Lundsgaard Hansen
DTU Matematik
V.L.Hansen@mat.dtu.dk

Lad de unge talenter blomstre i forskning, formidling og faglige foreninger

Har vi forskningsfrihed ved de danske universiteter? Og hvad er dét i grunden? Hvis forskningsfrihed meget snævert skal opfattes som retten til lige præcis at lave hvad man selv finder for godt har vi næppe nogensinde haft det sådan. Men tidligere var der mindre opmærksomhed på hvad forskerne beskæftigede sig med. Den nye ledelsesstruktur ved universiteterne blev i høj grad indført for at få mere kontrol med hvordan universiteterne udnytter bevillingerne. Dette har betydet at der nu er mere opmærksomhed fra ledelsernes side omkring sammenhængen mellem forskningen og de øvrige opgaver ved universiteterne. Da en stor del af de bevilgede forskningsmidler til universiteterne er bundet op på konkrete projekter kan nogle forskere i stigende grad opleve et pres for at indpasse deres forskning i konkrete projekter, som de ikke selv har valgt. Endnu ser vi det ikke så meget i den matematiske forskning, men hvis vi på længere sigt skal gøre os håb om at opnå store kontraktmidler til forskning i matematiske emner under de betingelser vi kender nu, er der næppe tvivl om at også den matematiske forskning vil blive presset i retninger der er mere fokuseret på konkrete problemstillinger end på abstrakte teoridannelser. Det bliver et stort, men meget nødvendigt, arbejde at fastholde det politiske system på værdien af matematikken i alle dens aspekter. Dette er ikke alene en dansk problemstilling. Overalt i verden er der konstante anslag mod den akademiske frihed og vilkårene for intellektuelt arbejde.

De matematiske foreninger har en stor opgave i at oplyse befolkningerne om værdierne i den matematiske grundforskning. I Dansk Matematisk Forening forsøger vi at være os denne opgave bevidst, men kun hvis alle gode kræfter står sammen kan det lykkes. Danmark er ikke stor nok til at der er plads til slagsmål omkring den matematiske forskning, for hvis fundamentale matematiske forskningsområder udsultes fører det til generel forarmelse. Storhed varer ikke evigt hvis man falder i søvn eller falder hen i benovelse over egne tidligere bedrifter. Der skal derfor gives plads og frihed til at unge forskere udvikler nye ideer inden for de fundamentale matematiske forskningsområder.

Kravene til de yngre videnskabelige medarbejdere ved de matematiske institutter er betydelige og konkurrencen er hård omkring de faste stillinger. Det er velkendt, at forskningen tillægges en helt afgørende rolle ved bedømmelsen af ansøgere til stillinger i matematik. Da undervisning som hovedregel er en central og ligeværdig del af stillingsindholdet i en videnskabelige stilling i matematik, tillægges gode faglige kommunikationsevner naturligvis også stor vægt. I Dansk Matematisk Forening er der hårdt brug for yngre kolleger, der vil gøre en altruistisk indsats for matematikken, og de matematiske institutter ved universiteterne opfordres derfor til at opmuntre og støtte kolleger, der vil deltage i foreningens arbejde uden skelen til snævre egeninteresser.

Alle forskere må tage et fagligt ansvar for deres fags udvikling, og det er meningsløst at overlade dette til andet end forskerne. Det betyder ikke alles kamp mod alle, men alles kamp for den samme sag, nemlig kampen for at fastholde og udbygge matematikkens vitalitet og styrke. I den sammenhæng er det godt at have faglig organisation. Den Europæiske Matematiske Forening har i år 2000 nedsat en RPA (Raising Public Awareness) komité, hvor Danmark har bidraget siden starten. For øjeblikket er professor Steen Markvorsen, DTU, medlem af komitéen og han har på afgørende måde bidraget til at udforme en spritny hjemmeside www.mathematics-in-europa.eu som blev officielt indviet i september 2010. Det kan stærkt anbefales at tage et kig på denne hjemmeside som vil samle de aktiviteter der foregår i Europa med henblik på at synliggøre matematikkens rolle i samfundets udvikling.

God Sommer 2011

mat

MATILDE — NYHEDSBREV FOR
DANSK MATEMATISK FORENING
medlem af
EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY

Nummer 43– Juli 2011

Redaktion:

Poul Hjorth, DTU

Adresse:

MATILDE
Institut for Matematik,DTU
Matematiktorvet 303-S,
2800 Kgs. Lyngby

Fax:

3532 0704

e-post:

matilde@mathematics.dk

URL:

www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Matilde udkommer
4 gange om året

Indhold:

www.mathematics-in-europe.eu

af Ehrhard Behrends, chair of the rpa committee (Edited for - and communicated to - Matilde by Steen Markvorsen, DTU)

Public awareness

A subcommittee of the EMS - the raising public awareness (rpa) committee – was founded several years ago to improve public understanding of mathematics, and a number of projects have been realized since then.

A popular mathematical webpage

A new idea arose at the beginning of 2009: the rpa committee was asked to launch a popular mathematical webpage under the auspices of the EMS:www.mathematics-in-europe.eu.
It is the hope that this domain will address everyone with an interest in mathematics. It also makes available rpa material developed in European countries and provides a forum for the exchange of ideas.

Initial suggestions for the structure of such a domain were discussed at a meeting of the committee in Brussels. The basic language is English, but most of the articles will be presented in other European languages as well.

After negotiations in the summer of 2009, a sponsoring agreement with the Munich RE (a large German reinsurance company) was signed at the end of 2009. (For more details see the author's article in Newsletter 75, March 2010.)

Since then, much work towards a realization of www.mathematics-in-europe.eu. has been undertaken.

A considerable quantity of material has been collected: News and information, popularization activities, competitions, mathematical help, mathematics as a profession, etc.

The webpage was advertised at the ICM in Hyderabad. The official launch took place at the opening of an international rpa conference in Óbidos (Portugal) at the end of September 2010 (see www.cim.pt/RPAM).

The dream

Those of us who are working for the realization of www.mathematics-in-europe.eu. have a vision. Our ambitious aim is to create a webpage that provides interesting information about mathematics for many groups.

For example, schoolchildren will find help if they failed to understand a particular mathematical topic in class; students can prepare for visiting a university where mathematics is spoken in a different language; teachers will find suggestions on how to present special aspects of mathematics in an attractive way; from colleagues who want to be active in the popularization of mathematics we will collect ideas for projects that have been realized successfully in other countries etc.

We hope that the domain will get extensive name recognition in Europe, and that this will increase the visibility of the EMS and attract additional sponsors to support our work.

The realization

An Italian proverb says ``Tra il dire e il fare c'è di mezzo il mare'': there often is a huge gap between first ideas and a satisfactory realization. In order to bridge this gap as effectively as possible, the help of many will be necessary.

Indeed, we are asking *you* who are reading these lines to collaborate. ``What can I do?'' you may ask. You could send us one (or some) of your popular articles or help us e.g. with the creation of a database of rpa activities in your country.

Let me conclude with another proverb: ``Rome wasn't built in a day.'' And the same is true with www.mathematics-in-europe.eu.

The ``blueprint'' as well as many ``buildings'' already exist, and with your help we will do our best to realize carefully and systematically the ``districts'' we have in mind.

Please send us an e-mail (to behrends@mi.fu-berlin.de or, resp. S.Markvorsen@mat.dtu.dk) if you are willing to assist us!

From the meeting in Brussels, 2009

Mogens Esrom Larsen
Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet

OM DET UENDELIGT SMAA OG DET UENDELIGT STORE I MATHEMATIKKEN
(FRIT EFTER GEORG BRANDES 1869)

Allerede Euklid er betænkelig ved at tage ordet "uendelig" forfængeligt. Han skriver, at der er flere primtal end ethvert (endeligt) tal. Argumentet herfor er enkelt: En primopløsning af produktet af et antal primtal plus 1 vil give mindst ét nyt.

Allerede Pythagoras må sande, at selv de uendeligt mange rationale tal ikke slår til. Den retvinklede ligebenede trekant med katheter af længden 1 har et kvadrat på hypotenusen med arealet 2. Og intet rationalt tal har kvadratet 2. Da fjernsynet kom til Danmark, optrådte Svend Bundgaard på skærmen med denne oplysning. Han skrev et rationalt tal som en uforkortelig brøk, p/q, og sluttede, at hvis $p^2 = 2q^2$, så måtte q være ulige og p være lige, altså $p = 2r$, (r også et helt tal). Men så kan vi forkorte til $2r^2 = q^2$, hvorfor q må være lige. En modstrid. Det fortælles, at dette ikke gav den ventede PR for faget.

Grækerne valgte at focusere på geometriske størrelser frem for tal, men løb straks ind i problemer: En terning med rumfanget 2 forlanger jo konstruktionen af $\sqrt[3]{2}$, en suspekt konstruktion. Og cirklens kvadratur, dvs konstruktionen af et kvadrat med arealet π, kommer man ikke i nærheden af.

Et uendeligt fænomen inden for de rationale tal er det såkaldte "Zenons paradoks." I en bevægelse mod et mål tilbagelægges først halvvejen, så halvvejen af resten osv. Strækningen deles op i uendeligt mange bidder, så man aldrig når frem! Men en fysiker vil måske sige, at med jævn hastighed bliver tiden også delt op efter samme recept, så klokken bliver aldrig hel. Altså, vi har blot bemærket formlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

I det 19. århundrede tog man sig sammen til at udvide de rationale tal til de reelle tal på en måde, så disse fyldte alle hullerne mellem hine på tallinien. Enten ved at definere uendelige decimalbrøker eller ved Dedekinds snit, der definerer et reelt tal ved mængden af rationale tal, der er større. Altså en nedad begrænset ikke tom delmængde, A, af de rationale tal:

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Q}$$

med egenskaben, at

$$\forall a \in A : [a, \infty[\subset A$$

eller

$$\forall a \in A \forall r \in \mathbb{Q} : r > a \Rightarrow r \in A$$

Fx defineres $\sqrt{2}$ som

$$\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \wedge x^2 > 2\}$$

Georg Cantor gør nu den interessante iagttagelse, at med en af disse definitioner – der er ækvivalente – er der flere reelle tal end rationale! Uendelige størrelser er ikke nødvendigvis lige store. Vi definerer ligestorhed på samme måde, som vi indser, at der er lige mange fingre på vore to hænder, nemlig ved at der eksisterer en korrespondance mellem dem. Altså, A og B er lige store, hvis vi kan finde en bijektiv funktion

$$f : A \to B$$

dvs

$$x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

og

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$

Hvis vi nu har en funktion fra de naturlige tal ind i de reelle tal, altså en følge af reelle tal, og disse, $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ skrives som decimalbrøker,

$$r_n = r_n^h, r_{n1} r_{n2} ... r_{nm} \cdots$$

med $r_n \in \mathbb{Z}$ og $r_{nj} \in \{0, 1, ..., 9\}$, så vil et tal $s = 0, s_1 s_2 s_3 ..$ med egenskaben $s_j \neq r_{jj}$ ikke være med i følgen. Dette kaldes Cantors diagonalargument. Vi slutter heraf, at allerede Dedekinds delmængder af $\mathbb{Q}$ er flere end $\mathbb{Q}$ selv, idet det er let at se, at $\mathbb{Q}$ kan udtømmes af en passende følge. (Brøkerne $\frac{p}{q}$ med $|p| + |q| \leq n$ er endeligt mange.)

Men værre endnu! Cantor indså, at det er et generelt fænomen i mængdelæren, at der er flere delmængder af en mængde, end der er elementer i den. Det gælder i det små: Den tomme mængde har én delmængde, nemlig sig selv, men ingen elementer! Og en mængde med n elementer har 2^n delmængder, og $n < 2^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

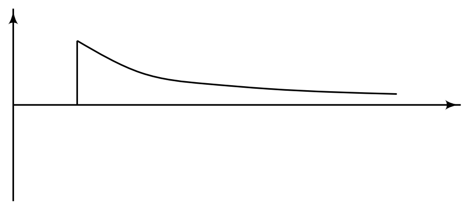
Det generelle argument er rørende enkelt: Er A en mængde og $D(A)$ mængden af dens delmængder, og er $f : A \to D(A)$ en funktion, så kan ikke enhver delmængde være et billede af et element i A. Thi vi definerer delmængden

$$B = \{x \in A | x \notin f(x)\}$$

Hvis nu $B = f(b)$, så er spørgsmålet, om $b \in B$? Hvis $b \in B$, så siger definitionen, at $b \notin f(b) = B$. Og hvis $b \notin B = f(b)$, så siger definitionen jo, at $b \in B$.

Dette argument blev berømt som Russel's paradoks, at "mængden af alle mængder" ikke giver mening. Der er heller ikke nogen største mængde.

Et spøjst eksempel på et forvirrende fænomen er det uendelige "kræmmerhus" dannet af funktionen $\frac{1}{x}$ på intervallet $[1, \infty[$ ved drejning om x-aksen.



For hvert x dannes en cirkel med radius $\frac{1}{x}$. Kræmmerhusets rumfang bliver derfor

$$\int_1^\infty \frac{\pi}{x^2} dx = \pi$$

Men overfladen bliver jo

$$\int_1^\infty \frac{2\pi}{x} dx = \infty$$

Som en fysiker vil sige: Vi kan fylde det med maling, men vi kan ikke male det!

Nu stødte Dedekinds definition John Conway i 1970'erne ved at være i to trin, først $\mathbb{Q}$, så $\mathbb{R}$. Samtidig var JC optaget af at generalisere spils additive struktur fra upartiske spil til partisanspil især inspireret af formanden for The British Go Association, John Diamond. Deres iagttagelse af go–spillet var, at dette spil på naturlig måde splittes op i en sum af spil ligesom de upartiske spil.

Det typiske upartiske spil er NIM, opfundet og navngivet af C. L. Bouton i 1902. Det er en sum af uhyre enkle spil, nemlig bunker af tændstikker med spillereglen, at den spiller, der har tur, fjerner et antal på mindst én tændstik. Er der kun 1 bunke, vinder han let ved at fjerne hele bunken. Men allerede ved 2 bunker, er situationen anderledes. Er de lige store, har anden spiller den vinderstrategi at kopiere første spillers træk i den urørte bunke. Er de ikke lige store, vinder første spiller ved at gøre dem lige store. Er der 3 eller flere bunker, kompliceres situationen betydeligt.

Det viser sig, at alle upartiske spil er ækvivalente med NIM.

Partisanspil er spil med fuld information, hvor spillerne har hver sine muligheder. Typiske eksempler er skak, dam og go, hvori spillerne opererer med hver sine brikker. Nerop spillet go, der har som mål at afgrænse det største areal på spillebrættet, reduceres i slutspillet til spredte grænsefægtninger rundt om på brættet. Derved opstår den naturlige sum af spil: Spilleren vælger, i hvilken konflikt han vil sætte ind og så hvordan.

JC ønsker at starte fra bunden og definere spil, naturlige tal, rationale tal og reelle tal med samme opskrift. Mens Dedekind har én opskrift på de rationale tal og derefter en helt anden på de reelle tal, definerer JC spil rekursivt som følger. Der er to spillere, V (venstre) og H (højre). De har hver sine muligheder, der alle er allerede definerede spil. Svarende til en stilling på go–brættet, hvor den ene spiller kan besætte et tomt felt med en sort sten, den anden et tomt felt med en hvid sten. Vi har fra starten kun et spil, som vi kan skrive $\{\emptyset|\emptyset\}$, altså spillet, hvor ingen af spillerne har noget træk til rådighed. Vi betegner dette spil som 0, og forstår det som det spil, hvor den spiller, der er i trækket, har tabt. Nu kan vi definere tre nye spil: $\{0|\emptyset\}$, $\{\emptyset|0\}$, $\{0|0\}$, idet vi skriver 0 for $\{0\}$. Her er de to første partisanspil, mens det sidste er upartisk. Spillet $\{0|\emptyset\}$ er altid vundet for V. Er det hans tur, vælger han spillet 0, der ikke giver H noget træk, så H har tabt. Er det H's tur, har han intet træk og har derfor tabt. Vi betegner dem som hhv $\{0|\emptyset\} = 1$ og $\{\emptyset|0\} = -1$. Disse spil er tillige eksempler på tal. Tallene er spil, hvor alle mulighederne for begge spillerne tillige er tal, og hvor intet tal, der er til højre, er $\leq$ noget tal til venstre. Spillet $\{0|0\}$ er derfor ikke noget tal, men et meget simpelt upartisk spil, der betegnes med * og er vundet for den spiller, der er i trækket. Bemærk, at bunken med 1 tændstik i NIM er et eksempel på spillet *.

Med denne start opbygger JC spil og blandt dem tal, der snart viser sig at omfatte alle kendte tal og en mangfoldighed af hidtil ukendte størrelser.

Også i almindelighed betyder summen af flere spil, at spilleren i tur vælger et af spillene at trække i og så efterlade summen af det heri valgte spil og de urørte. Som man i go vælger et hjørne af brættet at trække i.

Betragt nu spillet

$$S = \{0|1\} + \{0|1\} + \{\emptyset|0\}$$

Nu kan V trække til

$$0 + \{0|1\} + \{\emptyset|0\}$$

som H trækker til

$$\{0|\emptyset\} + \{\emptyset|0\}$$

som V trækker til

$$0 + \{\emptyset|0\}$$

som H trækker til 0, og V har tabt.
Og H trækker til

$$\{0|\emptyset\} + \{0|1\} + \{\emptyset|0\}$$

som V trækker til

$$\{0|\emptyset\} + 0 + \{\emptyset|0\}$$

som H trækker til

$$\{0|\emptyset\}$$

som V trækker til 0 og H har tabt.
Med andre ord, $S = 0$ og derfor er

$$\{0|1\} = \frac{1}{2}$$

Ethvert spil, som tabes af den, der har tur, regnes for 0. Spillene har en partiel ordning defineret ved, at spil, der altid kan vindes af V, er positive. Rekursivt defineres

$$-\{x|y\} = \{-y| - x\}$$

Fx

$$-\{0|\emptyset\} = \{\emptyset|0\}$$

Ordningen defineres derfor som sædvanlig

$$x > y \quad \Leftrightarrow \quad x - y > 0$$

Hvis hverken $x - y > 0$ eller $y - x > 0$, så er der to muligheder: $x-y = 0$ og $x-y = *$. Med andre ord, at $x - y$ tabes af første spiller hhv vindes af første spiller. Vi skriver hhv $x = y$ og $x||y$. Fx $0||*$. Alle NIM-bunker undtagen den tomme er $||0$, mens jo $\emptyset = 0$.
Tallene er simpelthen de ordnede spil, og vi har set starten på de rationale med nævner en potens af 2.
Fx sætter vi $\omega = \{0, 1, 2, ...|\}$ og finder fx $\omega + 1 = \{0, 1, 2, ...|0\}$. JC definerer også produkt og kvotient, hvorved hans udvidede talmængde bliver et legeme. Dette indeholder explicitte infinitesimaler, fx $\frac{1}{\omega} = \{|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\}$.

Spillet $\uparrow = \{0|*\}$ opfylder $0 <\uparrow< 2^{-n}\}$ for alle n, den simpleste positive infinitesimal. Man regner med dem fx er $\{0| \uparrow\} = \uparrow + \uparrow + *$ og $\{\uparrow | \uparrow\} = \{0| \uparrow\}$
Et endnu mindre positivt spil er

$$\{0|\{0| - n\}\} \text{ for } n > 0$$

JC's spil omfatter tallene som den ordnede delmængde, der omfatter de sædvanlige reelle tal, men udgør et langt mere omfattende legeme, – kaldet de "surreelle tal," – med uanede mængder af uendeligt små og uendeligt store størrelser.

Litteratur

1. Michael H. Albert, Richard J. Nowakowski, David Wolfe, *Lessons in Play,* A K Peters, Natick, 2007, 288 s.
2. Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Winning Ways for your mathematical plays (2 Vol.),* Academic Press, London, 1985, 850 s.
3. Jörg Bewersdorff, *Luck, Logic, and White Lies,* A K Peters, Natick, 2005, 486 s.
4. Charles L. Bouton, Nim a game with a complete mathematical theory, *Ann. of Math.* (2)3 (1901–02) 35–39.
5. John H. Conway, *On Numbers and Games,* Academic Press, New York, 1976, 238 s.
6. John H. Conway, Richard K. Guy, *The Book of Numbers,* Copernicus, New York, 1996, 310 s.
7. John H. Conway, *On Numbers And Games,* A K Peters, Natick, 2001, 242 s.
8. H.–D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Numbers,* Springer, New York, 1995, 391 s.
9. Richard K. Guy, *fair game,* Comap Mathematical Exploration Series, Arlington, Mass, 1989, 113 s.
10. Donald E Knuth, *Surreal Numbers,* Addison–Wesley, Reading, Mass, 1974, ?.

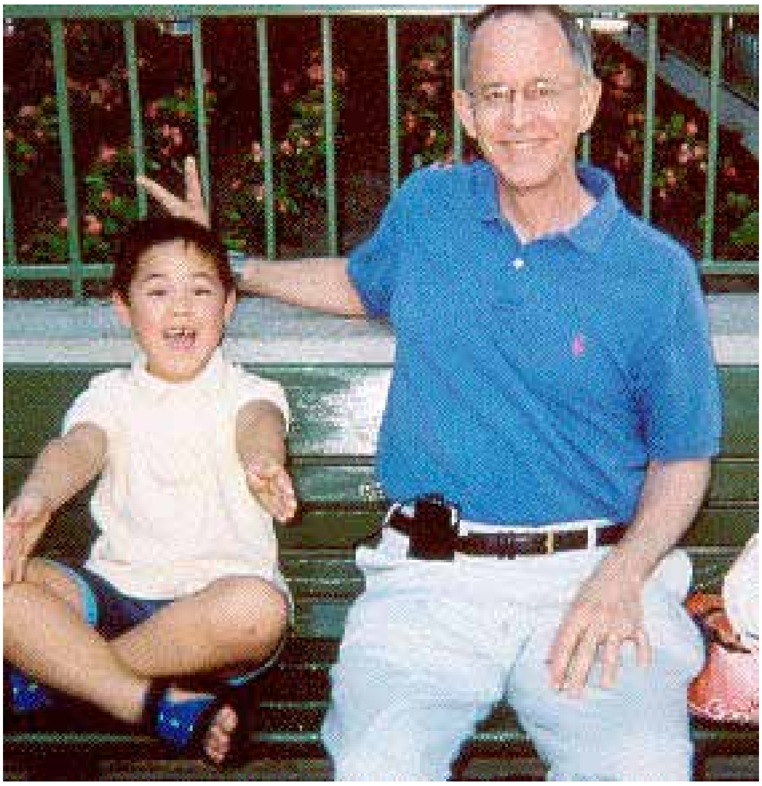
Revitalizing the 1960 Mathematics Major

af Alan Tucker, SUNY-Stony Brook

Den gamle redaktør læste nedenstående indlæg i maj-nummeret af "Notices", nyhedsbrevet fra DMF's meget store søster AMS. Vel vidende at danske universiteter ikke er i alle måder som nordamerikanske universiteter, og at sputnik-chocket efterhånden er så mange år siden at det næsten er glemt. Og at klima-krisen, som dybest set er langt mere alvorlig, aldrig vil fremkalde et lignende politisk respons og pres på universiteternes eksakte fag, herunder matematik, for at skifte gear. Vel vidende alt dette, syntes redaktøren alligevel at der er et velment budskab i Tuckers artikel, som han gerne vil dele med de af Matildes læsere der ikke nødvendigvis lige fik læst maj-nummeret af Notices.

Som altid, er kommentarer, debatindlæg, yderst velkomne.

Redaktøren.



Alan Tucker og hans søn Teddy

I entered college around 1960 in a golden era for the mathematics major. At that time, 5% of freshmen expressed an interest in becoming math majors (although only half as many earned math degrees). Math grads were in demand for new careers in aerospace and other technological industries along with traditional careers in insurance and teaching. Many of my math major friends planned to go to medical or law school as well as graduate school in mathematics or other quantitative disciplines. For many smart freshmen with unsure career plans, mathematics was a default major. This piece sketches my reading of why the math major changed along with an argument for why it needs to be revitalized.

Most U.S. universities in the 1950s had many tenured non-PhD faculty in mathematics, and many offered a dated mathematics curriculum, e.g., a typical junior math course was tensor calculus. A dramatic increase in the number of math PhDs was needed both to upgrade the quality of faculty and match the rapid growth of college enrollments. The mathematics major curriculum required a massive revision to reverse the high failure rate in first-year graduate courses in Lebesgue integration, etc. The proposed solution appeared in *Pregraduate Preparation for Research Mathematicians* (1963), the first report of the MAA's new Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (CUPM). The widely adopted 1965 CUPM report, *A General Curriculum for Mathematics in Colleges*, presented a gentler version of the 1963 recommendations with the goal that mathematics majors at all institutions should have some preparation for graduate study in mathematics (it was assumed that one-third of math majors would earn an M.S. in the mathematical sciences).

From 1960 to 1965, the number of math Bachelors degrees grew from 11,000 to 20,000 and math PhDs from 300 to 700, according to AMS and CBMS survey data. The 1968 NRC COSRIMS report predicted 60,000 BS's and 2200 PhD's in math by 1975. The Bachelors number actually decreased, dropping to 12,000 by 1980 and staying around there to this day. PhD numbers did grow but more slowly. Many math majors struggled with the more abstract curriculum, and employers complained that math graduates often seemed ill prepared to work on industry's problems. Further, new programs in computer science lured away many potential math majors. Although math majors were now better prepared for success in graduate school, the catholic 1960 image of the math major had faded. From 1975 on, only 1% of college freshmen expressed an interest in a math major.

Now let me turn to the situation from the faculty viewpoint, based on conversations with my father, A. W. Tucker who was chairman of the Princeton Mathematics Department around 1960. His view of academic life was that he was paid to teach but given the free time to do research which he loved. That was a time when universities had modest graduate programs and the focus was on undergraduates; federal support of research was just starting. All Princeton faculty, including department chairs and even the Dean of the College, taught two courses a semester. One semester each year my father was the lead professor in the big calculus course that most freshmen took. When I asked him years later when I was a department chair why he assumed this extra duty, he looked at me like I was crazy and said, "The most important thing the Princeton Mathematics Department did was to teach freshman calculus, and so as department chairman it was obvious that I should lead that effort." As chair, he felt it was also his job to get to know most of the math majors personally. [For more vignettes about those days, see my personal website.]

My father believed that one person could be blamed (or credited) with reorienting university faculty towards graduate students and research—Clark Kerr. In seeking to recruit star faculty from the Ivy League schools to Berkeley, Kerr hit upon the winning strategy of offering reduced teaching loads and little undergraduate teaching. I remember seeing one after another of our faculty neighbors get lured away, while my father and the rest of the Princeton administration watched helplessly as they stuck to their 2-courses-a-semester, undergraduate-focused tradition. Other public universities followed the Berkeley example and finally the Ivies gave in. Soon all faculty at universities wanted to be treated like stars with reduced teaching loads. A huge increase in precalculus and other low-level mathematics enrollments at public universities along with the pressure to get research grants has further diminished the attention given to math majors over the past 40 years.

I believe that research mathematics departments will have trouble flourishing, especially at public universities, without flourishing math majors. This was a key message in the 1999 AMS *Towards Excellence* report, which cited examples of several universities with flourishing math majors. As one model, in the programs cited at UCLA and Chicago, research faculty collaborate with non-research faculty or mathematically trained advisors to give math majors personal attention.

Mathematics departments cannot compete with the natural sciences for resources in research dollars. Since regular faculty do limited teaching in calculus-and-below courses, which are over 80% of math enrollments, mathematics departments cannot count on the huge enrollments in these courses to justify their size. Indeed, administrators are increasingly using 4-course-a-semester lecturers, adjuncts and technology to provide cheaper instruction than graduate students and instructors-- and they often do a better job; in the process, math TAships and faculty lines are eliminated.

Without meaning to diminish the importance of research mathematics, I believe that a broad-based, thriving major in a core discipline like mathematics is valued and respected by administrators as an important university service to society and its economic well-being. The value of studying mathematics is perhaps more in its mental training than its content. The wide- ranging accomplishments of math majors speak for themselves: from economist John Maynard Keynes to biologist Eric Lander, who led the Human Genome Initiative, to Jim Simons, professor turned hedge fund guru turned philanthropist, and even to basketball star Michael Jordan.

Alan Tucker has taught for 40 years at SUNY-Stony Brook, where 6% of Bachelors graduates are in mathematics, pure and applied.

Fra: Tucker, Alan. Doceamus: Revitalizing the 1960 Mathematics Major. Notices Amer. Math. Soc. 58 (2011) 704-705.
Bragt efter tilladelse fra American Mathematical Society (AMS)

Hvis der er et let og sommerligt tema i dette nummer af Matilde, er det den investering vi gør, gennem undervisning af studerende, i fremtidens matematik.

For kort tid siden fik foreningen en henvendelse fra en canadisk phd studerende Sheldon Joyner, der bad om tilladelse til at sætte på nettet en oversættelse af den 'Jensen's berømte artikel fra 1915 i Nyt Tidsskrift for Matematik'. Ophavsrettighederne var hos Dansk Matematisk Forening. Vi gav straks tilladelsen. Samtidig bad vi den studerende om han ville begrunde sin interesse for denne artikel. Det gjorde han, som man ser herunder, foran et genoptryk af artiklen.

Artiklens forfatter, Kaj Løchte Jensen var endnu studerende da han i under 1. verdenskrig fremlagde et bevis for en talteoretisk sætning af en vis vigtighed i den lange proces der sidst i forrige århundrede førte til et bevis for Fermats Store Sætning. Fra L. Corry ("Number crunching vs. number theory: computers and FLT, from Kummer to SWAC (1850–1960), and beyond", Arch. Hist. Exact Sci. (2007)) citerer vi:

As a matter of fact, very little is known about Jensen. Apparently he was a student of Niels Nielsen (1865–1931), a versatile mathematician who after 1904 became interested in Bernoulli numbers, and published a series of research articles and later on a textbook on the topic [Nielsen 1923]. Still as a student in 1915 Jensen published in a remote Danish journal a proof of the existence of infinitely many irregular primes of the form 4k + 3 [Jensen 1915]. His proof was rather straightforward and did not require any special idea or technique that was not known to number theorists since the time of Kummer.

Flere oplysninger om K.L Jensen modtages med glæde af redaktionen. Vi giver ordet, først til Sheldon Joyner, derefter til unge Jensen selv.

K.L. Jensen's 1915 paper and the irregular primes

Sheldon Joyner
The University of Western Ontario

In the 1915 article reprinted below, K.L. Jensen proved a rather surprising result pertaining to the set of irregular primes.
A prime p is called irregular if it divides the class number of the pth cyclotomic field $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$. This condition was first recognized as being important by E.E. Kummer, in his investigations surrounding Fermat's last theorem. In fact, when a prime q fails to be irregular (in which case it is called regular), then as Mazur points out (cf. his article cited below), " 'enough' of the fundamental theorem of algebra holds in $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/q})$" for Kummer to have been able to prove that $x^q + y^q = z^q$ has no non-trivial integer solutions.
Although it is very difficult to explicitly calculate class numbers, even for cyclotomic fields, we can check whether a given prime is irregular quite easily, thanks to a criterion discovered by Kummer: a prime is irregular if and only if it divides the numerator of at least one of the rational numbers $\frac{B_{2n}}{2n}$ for $2 \leq 2n \leq p-3$, where B_{2n} denotes the $2n$th Bernoulli number. In this way Kummer found that 37, 59 and 67 are the only irregular primes less than 100. The only others less than 200 are 101, 103, 131, 149 and 157. Are infinitely many of the primes then regular? Even though much further empirical evidence suggests this to be the case, to this day this question remains open. On the other hand, we do know that infinitely many of the primes are *irregular*!
This type of question was certainly of interest to Kummer and his successors, but it was K.L. Jensen who first proved this, in the above-mentioned article. He actually proved much more: there exist infinitely many irregular primes congruent to 3 modulo 4! His proof, like the rest of his paper, is remarkably elegant, and the germ of the ideas of this proof may be seen in later developments: In the 1960s, H. Montgomery observed that for integer moduli N other than 4, one could similarly prove that there exist infinitely many irregular primes which are not congruent to 1 modulo N. Building on this work a decade later, Yokoi and Metsänkylä showed that given any subgroup G of $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ there exist infinitely many irregular primes which reduce modulo N to $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \setminus G$. (Yokoi proved this for odd prime N and Metsänkylä generalized the result to arbitrary integer N.) Finally Skula proved that this is the best one can do using only certain essential facts about Bernoulli numbers (which are ingredients of the above-mentioned proofs). These properties of Bernoulli numbers were known in the nineteenth century, but in his article, Jensen gave a self-contained treatment by re-proving them using minimal mathematical machinery.

References: Jensen, Kaj Lochte. Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske Tal. Nyt. Tidsskr. Math. Afd. B 26 (1915), 73–83
Mazur, Barry. How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields? Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 48 (2011), no. 2, 155–209, 11R04
Metsnkyl, Tauno Distribution of irregular prime numbers. J. Reine Angew. Math. 282 (1976), 126–130.
Montgomery, Hugh L. Distribution of irregular primes. Illinois J. Math. 9 1965 553–558.
Skula, Ladislav. Non-possibility to prove infinity of regular primes from some theorems. J. Reine Angew. Math. 291 (1977), 162–181.
Yokoi, Hideo. On the distribution of irregular primes. J. Number Theory 7 (1975), 71–76.

Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske Tal

Af Kaj L. Jensen

I det følgende vil jeg, uden Brug af Funktionsteori, give nogle temmelig korte Beviser for en Del kendte talteoretiske Sætninger om de *Bernoulli*'ske Tal og dertil føje et Par nye.

I.

Sætter vi, idet q og n er positive hele Tal,

$$S_n(q-1) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (q-1)^n \tag{1}$$

danner disse Potenssummer for en bestemt Værdi af n det kendte allerede af *Jacob Bernoulli* fundne Polynomium i q:

$$S_n(q-1) = \frac{q^{n+1}}{n+1} - \frac{q^n}{2} + \sum_{s=1}^{s<\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1}}{n-2s+1}\binom{n}{2s} B_s q^{n-2s+1}, \tag{2}$$

hvor $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$ etc. er de *Bernoulli*'ske Tal.

Vi vil vælge det hele Tal $N = 2nN_1$ saaledes at samtlige Koefficienters Nævnere gaar op i N_1 og indsætter $2n$ for n og N for q, hvorved faas

$$(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n} = \frac{S_{2n}(N-1)}{2nN} + A, \tag{3}$$

hvor A er et helt Tal.

Til den videre Undersøgelse af højere Side i (3) vil vi benytte, at

$$\alpha \equiv \beta \pmod{p^r},$$

hvor p^r er en Primtalpotens, giver

$$\frac{\alpha^k}{k} \equiv \frac{\beta^k}{k} \pmod{p^r}, \tag{4}$$

hvor k er et helt Tal eventuelt deleligt med p [1]); dette følger af

$$\frac{\alpha^k}{k} = \frac{(\beta + tp^r)^k}{k} = \frac{\beta^k}{k} + \sum_{q=1}^{q=k} \frac{p^{rq}}{q} \cdot \binom{k-1}{q-1} t^q \beta^{k-q},$$

idet samtlige Led i Summen er delelige med p^r.

Indeholder N Primtallet p netop i Potensen p^α faas af (1) og (4)

$$\frac{S_{2n}(N-1)}{2n} \equiv \frac{N}{p^\alpha}\frac{S_{2n}(p^\alpha - 1)}{2n} \pmod{p^\alpha}. \tag{5}$$

Sætter vi dernæst

$$s_r^{(2n)} = \sum a^{2n}, \tag{6}$$

hvor Summen er udstrakt over alle positive hele Tal a mindre end og primiske med p^r, har man

$$S_{2n}(p^\alpha - 1) = s_\alpha^{(2n)} + s_{\alpha-1}^{(2n)} \cdot p^{2n} + \cdots + s_1^{(2n)} \cdot p^{2n(\alpha-1)}. \tag{7}$$

1. $2n$ er ikke delelig med $p - 1$.

Vi vælger en primitiv Rod g for p^r og faar ved (4)

$$\frac{s_r^{(2n)}}{2n} \equiv \frac{1}{2n}\left(1 + g^{2n} + \cdots + g^{2n(p^r - p^{r-1} - 1)}\right) =$$

$$= \frac{g^{2n(p^r - p^{r-1})} - 1}{2n(g^{2n} - 1)} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

hvoraf ved (7)

$$\frac{S_{2n}(p^\alpha - 1)}{2n} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}. \tag{8}$$

[1]) Er a og b rationale, n et helt Tal forstaar vi ved $a \equiv b \pmod{n}$ at $a - b$ er lig en uforkortelig Brøk, hvis Tæller er delelig med n; vi kalder ogsaa en saadan Brøk delelig med n. Endelig betegner vi ved: »a hel (mod n)«, at a er lig en uforkortelig Brøk, hvis Nævner er indbyrdes primisk med n.

For dette udvidede Kongruensbegreb, der gradvist er blevet indført, ser man let at alle fundamentale Sætninger fra det almindelige Kongruensbegreb gælder. En Fremstilling og yderligere Generalisation er givet af *K. Hensel* i dennes »Zahlentheorie«, Berlin 1913.

2. **$2n$ er delelig med $p-1$.**

Er $p \neq 2$ faas som før

$$\frac{s_r^{(2n)}}{2n} \equiv \frac{g^{2n(p^r-p^{r-1})}-1}{2n(g^{2n}-1)} \pmod{p^r}.$$

Indsættes $g^{2n} = 1 + 2ntp$, hvor t er hel (mod p) faas ved Hjælp af Binomialformlen

$$\frac{s_r^{(2n)}}{2n} \equiv \frac{p^r-p^{r-1}}{2n}$$

$$+\sum_{q=2}^{q=p^r-p^{r-1}} (2n)^{q-2}(tp)^{q-1}\cdot\frac{p^r-p^{r-1}}{q}\cdot\binom{p^r-p^{r-1}-1}{q-1} \pmod{p^r}$$

og altsaa

$$\frac{s_r^{(2n)}}{2n} \equiv \frac{p^r-p^{r-1}}{2n} \pmod{p^r}. \qquad (9)$$

Er $p = 2$ og $r > 1$ faas paa analog Maade

$$\frac{s_r^{(2n)}}{2n} \equiv \frac{1}{n}(1+5^{2n}+\cdots+5^{2n(2^{r-2}-1)}) \equiv \frac{5^{2^{r-1}\cdot n}-1}{n(5^{2n}-1)} \pmod{2^r}$$

og ved heri at indsætte $5^{2n} = 1 + 8nt$

$$\frac{s_r^{(2n)}}{2n} \equiv \frac{2^{r-2}}{n} + \sum_{q=2}^{q=2^{r-2}} n^{q-2}(8t)^{q-1}\frac{2^{r-2}}{q}\binom{2^{r-2}-1}{q-1} \pmod{2^r},$$

hvoraf

$$\frac{s_r^{(2n)}}{2n} \equiv \frac{2^{r-2}}{n} \pmod{2^r}, \qquad (10)$$

der viser, at (9) ogsaa gælder for $p = 2$; (7) giver derfor, naar undtages $n = 1$ for $p = 2$, i alle Tilfælde

$$\frac{S_{2n}(p^\alpha-1)}{2n} \equiv \frac{p^\alpha-p^{\alpha-1}}{2n} \pmod{p^\alpha}. \qquad (11)$$

Af (3), (5) og (8) følger nu den af *v. Staudt*[1]) fundne Sætning:

[1]) De numeris Bernoullianis. Erlangen 1845.

6*

I. $\frac{B_n}{2n}$ **er hel (mod p), naar p er et Primtal for hvilket $p-1$ ikke gaar op i $2n$.**

Om N vil vi dernæst antage at det er deleligt med samtlige Primtal λ for hvilke $\lambda - 1$ gaar op i $2n$; dette er en yderligere Betingelse, som det er nødvendigt at kræve, skønt det følgende derpaa kuriøst nok straks vil vise at den allerede i Forvejen maatte være opfyldt.

Af (3), (5) og (11) vindes da følgende, som det synes, ukendte Suplement til I.

II. $\frac{(-1)^n B_n + \frac{p-1}{p}}{2n}$ **er hel (mod p), naar p er et Primtal for hvilket $2n$ er delelig med $p-1$ og $n > 1$ for $p = 2$.**

Specielt faas af I og II at Tallet

$$(-1)^n B_n - \sum{}' \frac{1}{\lambda},$$

hvor Summen er udstrakt over den endelige Mængde af Primtal λ for hvilke $2n$ er delelig med $\lambda - 1$, er helt (mod p) for et vilkaarligt Primtal p; men dette vil sige at det er et helt Tal og giver altsaa den velkendte samtidigt af *v. Staudt*[1]) og *Th. Clausen*[2]) fundne Sætning:

III. $(-1)^n B_n = A_n + \frac{1}{2} + \sum{}' \frac{1}{\lambda}$, **hvor A_n er et helt Tal og Summen er udstrakt over alle de ulige Primtal λ for hvilke $2n$ er delelig med $\lambda - 1$.**

Havde vi kun villet bevise denne sidste Sætning ses det let, at ovenstaaende Udvikling kunde være forkortet paa adskillige Punkter.

Ved Hjælp af III kan man ogsaa give I følgende anden kendte Form:

[1]) Crelles Journal, Bd 21, p. 372; 1840.
[2]) Astronomische Nachrichten, Bd. 17, col. 351; 1840.

IV. **Enhver Faktor i $2n$ som er indbyrdes primisk med Nævneren i B_n gaar op i Tælleren.**

Idet a er et positivt helt Tal, vil vi dernæst undersøge Udtrykket

$$c_n(a) = a^{n+1}(a^{2n}-1)\frac{B_n}{2n}.$$

Er p et Primtal viser Sætning I, at $c_n(a)$ er hel (mod p), naar $p-1$ ikke gaar op i $2n$. Gaar derimod $p-1$ op i $2n$ ses, ved i (4) at sætte

$$\alpha = a^{p-1},\ \beta = 1 \text{ og } k = \frac{2n}{p-1},$$

at hvis a ikke er delelig med p haves

$$\frac{a^{2n}}{2n} \equiv \frac{1}{2n} \pmod{p};$$

Sætning III viser dernæst at p højst indeholdes i første Potens i B_n's Nævner, og vi faar saaledes ogsaa i dette Tilfælde, at $c_n(a)$ er hel (mod p). Endeligt har man i Tilfælde af at a er delelig med p

$$\frac{a^{n+1}}{2n} \equiv 0 \pmod{p},$$

hvoraf som før ses at $c_n(a)$ er hel (mod p).

Hermed har vi bevist at $c_n(a)$ er et helt Tal og kan udtale følgende Sætning:

V. $a^{n+1}(a^{2n}-1)\frac{B_n}{2n}$ **er et helt Tal, naar a er et vilkaarligt helt Tal,**

Erstattes her Potensen a^{n+1} med a^{2n} er den tilsvarende Sætning først fundet af *Sylvester*[1]), senere genfundet af ***Lipscitz***[2]); et elementært Bevis er givet af *Frobenius*[3]). Formindskelsen af Eksponenten $2n$ til $n+1$ skyldes *Nielsen*[4]), hvis Bevis

[1]) Philosophical Magazineu, Februar 1861. Citat efter *Nielsens* nedennævnte Afhandling p. 82.
[2]) Crelles Journal, Bd. 96, p. 2; 1884.
[3]) Berliner Sitzungsberichte, 1910, p. 809, § 8.
[4]) D. K. D. Vidensk. Selsk. Skr., 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. X. 3, p. 68, 1913.

ligeledes er elementært. I Reglen har man bevist I ud fra denne Sætning; vi er her gaaet den modsatte Vej og mener tillige at dette giver en nok saa god Forstaaelse af Sætningen.

Paa samme Maade beviser man let Sætningen:

VI. $(a^{2n}-1)(b^{2n}-1)\frac{B_n}{2n}$ er et helt Tal, naar a og b er indbyrdes primiske hele Tal.

Denne Sætning skyldes *Lipschitz*[1]; et elementært Bevis er givet af *Nielsen*[2]. Ved den her anvendte Bevismaade følger endvidere umiddelbart alle de andre kendte Sætninger af denne Art, ligesom man let kan forøge disses Antal; for Eksempel ses det straks, at

$$(a_1^{2n}-1)(a_2^{2n}-1)\cdots(a_q^{2n}-1)\frac{B_n}{2n}$$

er et helt Tal, naar de hele Tal $a_1, a_2, \cdots, a_q$ har største fælles Maal 1.

II.

Betegner p et Primtal og indsættes i (2) fra forrige Afsnit, $2n$ for n og p^ρ for q, faas efter en enkel Omskrivning

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_{2n}(p^\rho-1)}{n} &= \frac{p^{(2n+1)\rho}}{n(2n+1)}-\frac{p^{2n\rho}}{2n}+\\ +\sum_{s=1}^{s=n-1}&\frac{(-1)^{s-1}2B_s}{(2n-2s)(2n-2s+1)}\binom{2n-1}{2s}p^{2n-2s+1}+\frac{(-1)^{n-1}B_n}{n}\end{aligned}\right| \quad (1)$$

Som tidligere benyttet giver Sætning III, at pB_n er hel (mod p); heraf vindes let, ved i de paagældende Tilfælde at paavise Deleligheden af samtlige Led paa højre Side, det sidste undtaget, med $p^{2\rho}$ eller $2^{2\rho+1}$:

$$\frac{(-1)^{n-1}B_n}{n} \equiv \frac{S_{2n}(p^\rho-1)}{n\cdot p^\rho} \pmod{p^\rho}, \tag{2}$$

hvor p er et ulige Primtal og $\rho \neq 1$ for $p=3$;

[1] Ibid.
[2] Arkiv för matematik, astronomi o. fysik, Bd. 9, Nr. 24, p. 11; 1914.

$$\frac{(-1)^{n-1}B_n}{n} \equiv \frac{S_{2n}(2^\rho-1)}{n\cdot 2^\rho} \pmod{2^{\rho+1}}, \tag{3}$$

hvor $\rho>1$ og $n>1$.

Idet t er et helt Tal, som ikke er deleligt med det vilkaarlige Primtal p, vil vi dernæst betragte den indlysende Ligning

$$(t^{2n}-1)\,S_{2n}(p^\rho-1)=\sum_{a=1}^{a=p^\rho-1}(at)^{2n}-\sum_{a=1}^{a=p^\rho-1}a^{2n}. \tag{4}$$

Man har her[1])

$$at=a_1+p^\rho\left[\frac{at}{p^\rho}\right], \tag{5}$$

hvor a_1 vil gennemløbe alle positive Tal $<p^\rho$, naar a gør det; endvidere faas ved Binomialformlen

$$\frac{(at)^{2n}}{n}=\frac{a_1^{2n}}{n}+\sum_{q=1}^{q=2n}\frac{2p^{q\rho}}{q}\binom{2n-1}{q-1}\left[\frac{at}{p^\rho}\right]^q a_1^{2n-q},$$

hvor samtlige Led i Summen, det første undtaget, er delelige med $p^{2\rho}$, hvilket giver

$$\frac{(at)^{2n}-a_1^{2n}}{n\cdot p^\rho}\equiv 2\,(at)^{2n-1}\left[\frac{at}{p^\rho}\right] \pmod{p^\rho}. \tag{6}$$

Af (4) faas derfor under Benyttelsen af (2) og (3) følgende, som det synes, ukendte Kongruens;

$$\frac{(-1)^{n-1}(t^{2n}-1)\,B_n}{n}\equiv\sum_{a=1}^{a=p^\rho-1}2\,(at)^{2n-1}\left[\frac{at}{p^\rho}\right] \pmod{p^\rho}, \tag{7}$$

hvor $\rho \neq 1$ for $p=3$ og $n\neq 1$ for $p=2$.

Specielt giver (7), for $\rho=1$, $2n=p-1$ og under Anvendelse af III, den af *Lerch*[2]) fundne Kongruens

[1]) Ved den firkantede Parentes betegner vi, som sædvanligt brugt, det største hele Tal mindre end eller lig med det rationale Tal som den indeslutter.
[2] Math. Ann. Bd. LX, p. 471; 1905.

$$q(t)=\frac{t^{p-1}-1}{p}\equiv\sum_{a=1}^{a=p-1}\frac{1}{at}\left[\frac{at}{p}\right] \pmod{p.} \tag{8}$$

Som en anden umiddelbar Følge af (7) faas let, ved at sætte $t=2$, den for $\rho=1$ velkendte Kongruens:

$$\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\,B^n}{2n}\equiv\sum_{q=1}^{q=\frac{p^\rho-1}{2}}(2q-1)^{2n-1} \pmod{p^\rho}, \tag{9}$$

hvor p er et ulige Primtal og $\rho\neq 1$ for $p=3$.

Betegner dernæst μ et positivt helt Tal deleligt med $(p-1)p^{\alpha-1}$ har man

$$\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{s+r}\binom{r}{s}a^{2n+2s\mu-1}=a^{2n-1}(a^{2\mu}-1)^r; \tag{10}$$

Summen paa venstre Side bliver derfor delelig med p^{2n-1} eller $p^{\alpha r}$ eftersom a er delelig eller ikke delelig med p; vi faar herved af (7), under Betingelserne for denne,

$$\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{s+s\mu}\binom{r}{s}(t^{2n+2s\mu}-1)\frac{B_{n+s\mu}}{n+s\mu}\equiv 0 \pmod{p^\lambda}. \tag{11}$$

hvor λ er det mindste af Tallene αr og $2n-1$.

Vælger vi nu

$$t\equiv g^{p^{\lambda-1}} \pmod{p^\lambda},$$

hvor g er en primitiv Rod (mod p^λ), og antages $2n$ ikke delelig med $p-1$ faas ved Hjælp af Sætning I

$$(t^{2n+2s\mu}-1)\frac{B_{n+s\mu}}{n+s\mu}\equiv(t^{2n}-1)\frac{B_{n+s\mu}}{n+s\mu} \pmod{p^\lambda}; \tag{12}$$

her er $(t^{2n}-1)$ ikke delelig med p og (11) giver derfor den *Kummer*'ske Kongruens[1]):

$$\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{s+s\mu}\frac{B_{n+s\mu}}{n+s\mu}\equiv 0 \pmod{p^\lambda}, \tag{13}$$

[1]) Crelles Journal, Bd. 41, p. 368; 1851.

hvor $\mu \equiv 0 \pmod{(p-1)p^{\alpha-1}}$, $2n$ ikke er delelig med $p-1$ og samtidigt $\lambda \leq \alpha r$, $\lambda \leq 2n-1$.

Kummer har dog kun bevist denne Kongruens for $\alpha = 1$ og $p = 2\mu + 1$; den anførte betydeligt almindeligere Form skyldes, efter forudgaaende Generalisationer i denne Retning af flere andre, *Frobenius*[1]), hvis Bevis tillige er elementært.

Et andet elementært Bevis er, for $\alpha = 1$, givet af *Nielsen*[2]); endelig har jeg, ligeledes for $\alpha = 1$, givet et fjerde saadant[3]).

III.

Som bekendt er det en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for at Primtallet p er regulært, at p ikke gaar op i de første $\frac{p-3}{2}$ *Bernoulli*'ske Tals Tællere; da vi ikke her vil gøre Brug af andre kendte Egenskaber ved de regulære Primtal, bliver dette derfor i det følgende som en Definition for, hvad vi forstaar ved et regulært Primtal.

Sættes nu i (13) fra forrige Afsnit $r = 1$ og $\alpha = 1$ faas

$$\frac{(-1)^n B_n}{n} \equiv \frac{(-1)^{n'} B_{n'}}{n'} \pmod{p}, \tag{1}$$

hvor $2n \equiv 2n' \pmod{p-1}$ og $2n$ ikke er delelig med p.

Er p et regulært Primtal og vælges, i (1), for $2n'$ den principale Rest af $2n$ ved Division med $p-1$, ses ved Hjælp af III, at højre Side skrevet som en uforkortelig Brøk, hverken indeholder p i Tæller eller Nævner; det samme er derfor Tilfældet med venstre Side og man faar som en Udvidelse af Sætning I:

[1]) Berliner Sitzungsberichte, 1910, p. 809, § 15.

[2]) D. K. D. Vidensk. Selsk. Skr, 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. XII. 2, p. 98; 1915.

[3]) De to førstnævnte elementære Beviser har den samme Overgang fra (11) til (13); er derfor $2n$ delelig med $p-1$, hvorved Faktoren $t^{2n'}-1$ bliver delelig med p i mindst lige saa høj Potens som $t^{p-1}-1$, synes disse Bevismaader ikke at kunne udsige noget om venstre Side af (13) i dette Tilfælde. Derimod har jeg, i en Afhandling som vil fremkomme i D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Oversigter, for $\alpha = 1$ givet et fjerde elementært Bevis for (13) og et dermed analogt Bevis for et Supplement til (13) i det omtalte Tilfælde.

VII. Et regulært Primtal, som ikke gaar op i B_n's Nævner, indeholdes i Tælleren i netop samme Potens som i n,

For et ikke-regulært Primtal vil der derimod eksistere mindst een Restklasse (mod $p-1$) af Værdier n for hvilke det gaar op i en højere Potens i B_n's Tæller end i n.

Vi vil slutte denne Fremstilling med ud fra VII at bevise Sætningen:

VIII. Der eksisterer uendelig mange ikke-regulære Primtal af Formen $4k+3$.

Vi antager at der kun eksisterede et endeligt Antal ikke-regulære Primtal af denne Form: $p_1, p_2, \cdots, p_q$.

I Følge et specielt Tilfælde af *Dirichlet*'s velkendte Sætning[1]) eksisterer der da et Primtal K for hvilket

$$K \equiv 1 \pmod{12 p_1 (p_1 - 1) p_2 (p_2 - 1) \cdots (p_q - 1)}. \tag{2}$$

Da K eller B_1 ikke er deleligt med noget af Primtallene $p_1, p_2, \cdots, p_q$ viser (1) at B_K heller ikke kan være det. Endvidere viser VII at B_K's Tæller af regulære Primtal kun eventuelt kan indeholde K; Tælleren indeholder altsaa kun Primtal af Formen $4k+1$. Hvad Nævneren angaar ses det at $2K$ kun har Divisorerne $1, 2, K$ og $2K$ og her er $K+1$ delelig med 2 og $2K+1$ med 3; hvoraf ved III faas at B_K's Nævner er lig med 6. Idet vi nu udtrykkeligt benytter at B_K er positivt[2]) faas saaledes

$$2B_K \equiv -1 \pmod{4}. \tag{3}$$

Sættes dernæst i (3) fra forrige Afsnit, $n = K$ og $\rho = 2$, faas

[1]) Som bekendt kan man elementært bevise at der eksisterer uendelig mange Primtal af Formen $ak+1$, hvor a er et vilkaarligt helt Tal; se f. Eks.: *A. S. Bang* i »Tidsskrift for Mathematik«, femte Række, Bd. 4, p. 133; 1886.

[2]) Angaaende et elementært Bevis for, at de *Bernoulli*'ske Tal er positive se f. Eks.: den først citerede Afhandling af *Nielsen*; p. 9.

$$(-1)^{K-1} 2B_K \equiv 1 \pmod{4}, \tag{4}$$

der staar i Modstrid med (3).

At der eksisterer uendelig mange ikke-regulære Primtal, har man længe formodet, men saa vidt jeg véd ikke sikret med noget Bevis; det har som bekendt en vis Betydning ved Vurderingen af *Kummer*'s Undersøgelser over den sidste *Fermat*'ske Sætning.

Arealet av en Trekant udtrykt ved Koefficienterne i Sidernes Ligninger.

Af Dr. Elling Holst*).

Givet 3 rette Linjers Ligninger:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Arealet af den Trekant Linjerne danner er lig nul naar og kun naar linjerne gaar gjennem samme Punkt, ɔ:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

og uendelig naar og kun naar mindst 2 av Linjerne er parallele, ɔ: naar

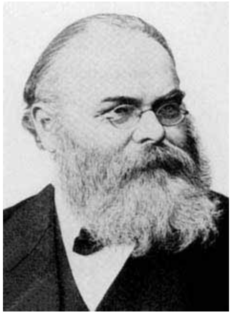
enten $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0$, eller $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, eller $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A & B \end{vmatrix} = 0$.

Følgelig maa Trekantens areal kunne skrives saaledes:

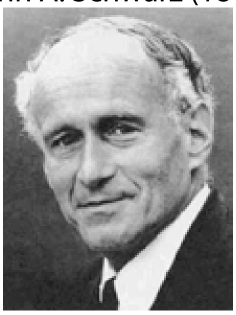
*) Ovenstaaende elementære og smukke Anvendelse af det antalgeometriske Princip, som den bekendte afdøde norske Matematiker Elling Holst særlig har arbejdet med, er velvillig tilsendt os fra Hr. Aktuar Solberg i Kristiania

Kender du dine matematikere?

1.
Felix Klein (1849 – 1925)



2.
Hermann A. Schwarz (1843-1921)



3.
Laurent Schwartz (1915-2002)

4.
Hermann Weyl (1885-1955)

5.
André Weil (1906-1998)

6.
Ronald Fisher (1890-1962)

7.
Erich Hecke (1887-1947)

8.
Carl L. Siegel (1896-1981)

9.
Hermann G. Grassmann (1809-1877)

10.
Lazarus Fuchs (1833-1902)

11.
Georg Cantor (1845-1918)

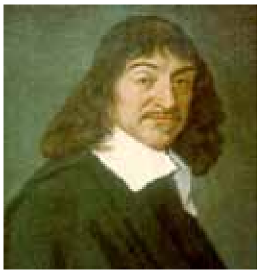
12.
Niels Hendrik Abel (1802-1829)

13.
Sophus Lie (1842-1899)

14.
Pierre-S. Laplace (1749-1827)

15.
Joseph-L. Lagrange (1736-1813)

16.
Guillaume de l'Hopital (1661-1704)



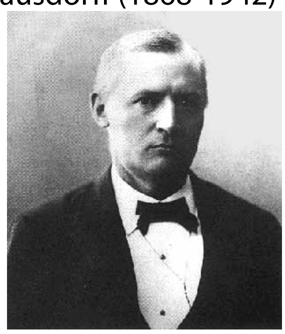
17.
René Descartes (1596-1650)

18.
Harald Bohr (1887-1951)

19.
Emile Borel (1871-1956)

20.
Hugo Steinhaus (1887-1972)

21.
Felix Hausdorff (1868-1942)



22.
Albert V. Bäcklund (1845-1922)

23. 
Paul Painlevé (1863-1933)

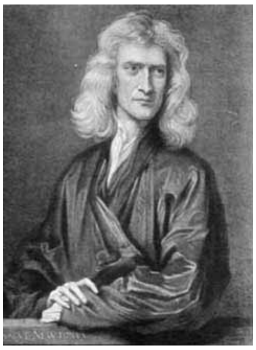
24.  Euklid (325-265 fvt)

25. 
Leonhard Euler (1707-1783)

26. 
Augustin L. Cauchy (1789-1857)

27. 
Karl Weierstrass (1815-1897)

28. 
Bernhard Riemann (1826-1866)

29. 
Isaac Newton (1643-1727)

30. 
Vito Volterra (1860-1940)

31. 
William R. Hamilton (1805-1865)

32. 
Pierre de Fermat (1601-1665)

33. 
Ulisse Dini (1845-1918)

34.
Jakob Bernoulli (1654-1705)
(eller en af de andre fra familien)

35.
Henri Poincaré (1854-1912)

36.
Guido Fubini (1879-1943)

37.
Ernst Lindelöf (1870-1946)

38.
Ivar Fredholm (1866-1927)

39.
John Littlewood (1885-1977)

40.
Kurt Gödel (1906-1978)

41.
Alan Turing (1912-1954)

42.
Alonzo Church (1903-1995)

43.
Camille Jordan (1838-1922)

44.
Leopold Kronecker (1823-1891)

45.
Siméon Poisson (1781-1840)

46.
Ernst Eduard Kummer (1810-1893)

47.
Giovanni Ricci (1904-1973)

48.
Jean Dieudonné (1906-1992)

49.
Sonja Kovalevsky (1850-1891)

50.
Charles de la Vallée Poussin (1866-1962)

FOTO-KONKURRENCE

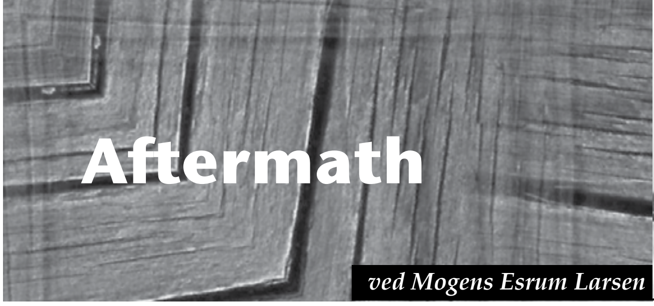
Tag et billede til Matilde. Kun fantasien, inspireret, ikke indspændt, af den påbudte undertitel, sætter grænsen for motivet.

Deltagelse: Indsend pr email til redaktionen (p.g.hjorth@mat.dtu.dk) bud på et billede med undertitlen DE STUDERENDE

Format: jpg, Opløsning: min 300 dpi.

Deadline: 1. september 2011.

Præmie: 1 flaske god rødvin, eller ækvivalent legalt nydelsesmiddel, til hver af de 3 bedste forslag.



Løsninger

Opgaverne var hentet fra Charles W. Trigg, Mathematical Quickies, McGraw–Hill 1967 og Raymond M. Smullyan, Logical Labyrinths, A. K. Peters Ltd. 2009.

Opgaverne er løst af problemgruppen “Con Amore,” der også havde løst opgaverne i nr. 40, men fik dem afleveret for sent til at blive nævnt, og af Ebbe Thue Poulsen, hvis løsninger gengives i det følgende. Dog først hans kommentar til opgave 1 i nr. 40.

Sæt

$$P(x,y) = x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8.$$

Så er

$$(x+y)P(x,y) = x^9 + y^9 = x^9 - (-1)y^9.$$

Lad $\xi_k = e^{(2k+1)\pi i/9},\ k = 0, 1, \ldots, 8$ være de 9 niende-rødder af -1. Så er

$$(x+y)P(x,y) = \prod_{k=0}^{8}(x - \xi_k y) = (x+y)\prod_{k=0}^{3}(x - \xi_k y)\prod_{k=5}^{8}(x - \xi_k y),$$

og altså har vi den komplekse faktorisering

$$P(x,y) = \prod_{k=0}^{3}(x - \xi_k y)\prod_{k=5}^{8}(x - \xi_k y).$$

Samler vi komplekst konjugerede faktorer parvis, får vi den reelle faktorisering

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \prod_{k=0}^{3}\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k+1}{9}\pi\right)xy + y^2\right) \\ &= (x^2 - xy + y^2)(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{9}xy + y^2)(x^2 - 2\cos\frac{5\pi}{9}xy + y^2)(x^2 - 2\cos\frac{7\pi}{9}xy + y^2) \end{aligned}$$

Opgave 1.

Vis, at for alle positive tal, p, q, r, s vil

$$\frac{\left(p^2+p+1\right)\left(q^2+q+1\right)\left(r^2+r+1\right)\left(s^2+s+1\right)}{pqrs} \geq 81$$

Da

$$\frac{x^2+x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 3 \geq 3$$

for alle $x > 0$, er

$$\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1)}{pqrs} \geq 3^4$$

for $p, q, r, s > 0$.

Opgave 2.

En bestyrelse har 15 medlemmer, som tillige sidder tilsammen i 20 udvalg. Hvert bestyrelsesmedlem sidder i 4 udvalg. Hvert udvalg har 3 medlemmer. To udvalg har højst et medlem fælles.

Er dette muligt?

Ja: De 15 medlemmer betegnes $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5, z_1, \ldots, z_5$, og de 20 udvalg betegnes $U_{m,n}$, $m = 1, \ldots, 5$, $n = 1, \ldots, 4$.

Til udvalget $U_{m,n}$ udpeges medlemmerne x_i, y_j, og z_k bestemt ved $i = m$, $j \equiv m+n \pmod 5$, $k \equiv m + 2n \pmod 5$.

Opgave 3.

Lad

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Hvilken rest fås ved division af $f\left(x^5\right)$ med $f(x)$?

Da

$$x^5 - 1 = (x-1)f(x)$$

er

$$x^5 \equiv 1 \pmod{f(x)},$$

og følgelig

$$f\left(x^5\right) = \left(x^5\right)^4 + \left(x^5\right)^3 + \left(x^5\right)^2 + x^5 + 1 \equiv 5 \pmod{f(x)}.$$

Selv om Paulus hævder, at alle kretensere er løgnere (brev til Titus), så er denne tilstand ændret i årtusindernes løb. Nu er det kun en del af befolkningen, der lyver bestandig. Lad os kalde disse forvorpne for knægte, og den sanddru del af befolkningen for bønder. En knægt lyver altid og en bonde taler altid sandt!

Opgave 4.

En dansk turist, måske J. L. Heiberg?, mødte to indfødte, lad os kalde dem A og B. A sagde nu: “Vi er begge knægte!”

Hvad ved Heiberg nu?

A er knægt, *B* er bonde.

Opgave 5.

Hvad om A havde sagt: “Mindst en af os er en knægt!”

A er bonde, *B* er knægt.

Opgave 6.

Og hvad om A havde sagt: “Vi er begge af samme slags!”

B er bonde.

Opgave 7.

Vi ved også, at knægtene bor i Knossos, mens bønderne dyrker deres sukkerrør i Candia. I en vejgaffel møder Heiberg en indfødt, og vil gerne finde vejen til Candia. Hvad kan Heiberg spørge om, som kan besvares med “ja” eller “nej” og give den relevante oplysning?

Heiberg peger på en af vejene og spørger: ’Fører denne vej til din hjemby”?

NYE OPGAVER

Opgave 1.

Nu er der tre trillinger, det ikke er til at se forskel på. De to af dem, Hans og Tøger er knægte, mens den tredje, Børge, er bonde. Nu møder Heiberg en af dem, og vil vide om det er Hans. Han kan stille ham et spørgsmål på tre ord, som Hans vil svare “ja” til, mens begge de andre vil svare “nej.”

Opgave 2.

To tvillinger, Erik og Einar, er identiske bortset fra, at den ene er knægt og den anden bonde. Heiberg møder den ene og vil vide, hvem det er. Han kan stille ham et spørgsmål på tre ord, hvis svar vil afklare sagen.

Opgave 3.

Heiberg møder den ene og vil vide hvem, der er knægt, og hvem, der er bonde. Han kan stille ham et spørgsmål på tre ord, hvis svar vil afklare sagen.

Opgave 4.

Hvis Heiberg vil vide alt, både hvem, der er hvad, og hvem, han står overfor, kan han så også klare det?

Opgave 5.

Heiberg møder en kretenser, der kommer med et udsagn. Heiberg bemærker til ham, at før udsagnet blev udtalt, ville han ikke kunne vide, om det var sandt eller falskt. Men nu ved han både, at det er falskt og derfor, at kretenseren er er en knægt!

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

POST B
PP DANMARK

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C

Se artiklen på side 4 i bladet om den fælleseuropæiske matematik-inspirations side.