

mat

M A T I L D E



Politik



Mad



Sport



Vejret



Økonomi



Sprog



Rejser



Dyr



Matematik



Vagn Lundsgaard Hansen
DTU Matematik
V.L.Hansen@mat.dtu.dk

Om matematikkens duale natur

Matematikken er et forunderligt samspil mellem det konkrete og det abstrakte. De mere konkrete aspekter er ofte blevet identificeret med den anvendte matematik, mens de abstrakte aspekter er blevet knyttet til den rene matematik. Denne opdeling i ren og anvendt matematik er forældet. Analyse af komplicerede problemstillinger af betydning for samfundet kræver ofte analyse af matematiske modeller på et højt abstraktionsniveau. Man kan næsten hævde, at kompleksiteten i en problemstilling måles direkte ved abstraktionsniveauet.

Matematikken har altid haft denne duale natur. God og brugbar undervisning i matematik må derfor tilgodeses såvel udvikling af konkrete færdigheder som opøvelse af abstraktionsniveauet hos eleverne. Vægten mellem de to aspekter afhænger naturligvis af alderstrinnet, således at vægten på konkrete færdigheder er dominerende på de indledende trin i undervisningssystemet og en god balance mellem det konkrete og det abstrakte opnås i løbet af hele undervisningen i ungdomsuddannelserne.

Banebrydende matematisk forskning bæres af den enkelte forskers engagement, og den mest originale forskning udspringer yderst sjældent af det stramt tilrettelagte og styrede, men er drevet af nysgerrighed, dedikation og indsigt hos den enkelte forsker.

I de senere år har den enkelte forsker i alle videnskabsområder oplevet en tiltagende styring af forskningen. Denne styring af forskningen tilgodeser i særlig grad forskning i store grupper rettet mod direkte omsætning i praktisk produktion. For faget matematik som indgår som en vigtig parameter i mange anvendelsesområder giver dette en særlig udfordring. Hvis matematikken fuldstændigt

skal underlægges drømme om nytteværdi for samfundet her og nu, så får den abstrakte side af matematikken ikke tilstrækkelig pleje, og taber derved på længere sigt sin skarphed. Hvis matematikersamfundet på den anden side afviser alle kontakter med andre fag, så får matematikken ikke tilstrækkelig næring til at bevare sin vitalitet. Det bedste udbytte af investeringerne i matematik opnås ved at inddrage matematikerne selv i diskussionen af de samfundsmæssige målsætninger og ved at tage skyldigt hensyn til at matematik oftest udøves af enkeltindivider i små grupper.

I forsøget på at automatisere vurdering af forskning så vurderingen kan udføres klinisk gøres der store anstrengelser for at overbevise forskerne om nytten af at bruge bibliometriske indikatorer i form af citationsanalyser ved vurderingen. Brug af sådanne tal som de eneste parametre ved bedømmelse af den enkelte forsker, eller mindre forskningsgrupper, er imidlertid ødelæggende for forskningen og for forskningens infrastruktur. Allerede nu ser man en begyndende nedbrydning af publikationsstrukturen i videnskaberne, fordi det ikke længere alene er en artikels videnskabelige værdi, men også hvor den er publiceret, der vejer på vægtskålen.

Matematikken står overfor store udfordringer. Vi skal have dygtigt unge til at interessere sig for vores fag, og matematik stiller store krav til fordybelse og koncentration. Dette kræver ro og stabilitet omkring studierne i matematik og den matematiske forskning. Her er det vigtigt at vi ikke sætter skel mellem den rene og den anvendte matematik. For matematikkens styrke ligger i samspillet mellem det konkrete og det abstrakte.

Indhold:

Vagns Klumme	2
<i>Bernhelm Booß-Bavnbe</i> Flower Power i Hyderabad	3
<i>Christian Berg</i> CB-Nationalkomite og IMU beretning.....	7
<i>Karsten Schmidt</i> Konvekse Sten.....	8
<i>Carsten Lunde</i> Boganmeldelse Matematikundervisningens historie i Danmark i 1900-tallet.....	9
<i>Birger Stjernholm Madsen</i> Om at kommunikere statistik	10
Begivenheder.....	16
Aftermath	17



*Bernhelm Boof-Bavnbeek,
RUC, NSM, IMFUFA*

Indtryk fra den Internationale
Matematikerkongress ICM 2010,
Hyderabad, 19.-27. august 2010

Flower Power i Hyderabad

To spørgsmål og et hurtigt skud fra loftet

19. august 2010 skrev Philip J. Davis, prof. em. ved Brown University, Providence, R.I.:

"Dear Bernhelm:

... Question from your Congress experience: Is mathematics changing? If so, how?

Do the attendees at the Congress and their talks reflect the concerns of the "average" math researcher?"

Min kone, ikke selv matematiker, men min ledsager ved ICM 1994 i Zürich, skrev næsten samtidigt og næsten enslydende:

"Det kunne interessere mig at vide, om der siden er sket et retningsskift i mat eller antydning af et sådant? Kan du i aktuelle abstracts skelne en ny retning i forhold til dengang? Puha, hva?"

Det korte svar er: Ja, der er faktisk i matematikken en vis tilbagevenden til det konkrete, til målrettede spørgsmål, til problemer, som man kan forklare imellem to busstoppesteder, selv om deres fuldstændige løsning ofte er svær. Typisk for denne tendens var, som jeg ser det, at Fieldsmedaljerne og plenarforedragene promoverede de to områder dynamik af iterative systemer og kombinatorik lidt for meget. Det afspejler vel indirekte, hvad vi så godt kender fra undervisningen på universiteterne, når ledelsen og skiftende regeringer kræver kortere studietider og pølsefabrik-produktion af PhD'er. Det minder også alt for meget om det samfundsmæssige pres, som er opstået fordi matematikken bliver mindre og mindre synlig i offentligheden, alt imens dens betydning stiger dramatisk i alle hjørner af samfundet. På den måde diskrediteres abstrakte problemstillinger som esoterisk spild af tid.

Men på kongressen oplevede man også, hvordan den fjerde Fieldsmedaljemodtager Ngô Bao Châu udførte en brilliant akrobatik over automorfe former på høje svajende stilladser af yderst abstrakte begreber og resultater. Ikke mange kunne følge denne artist, men med rette vakte han åndeløs beundring.

Afgørende for den brede anerkendelse er hos både de konkrete og de abstrakte retninger, at der laves tværforbindelser, og det blev demonstreret i Hyderabad. Et krav, som heldigvis står i direkte modsætning til de snævre målrettede PhD-skoler, som så mange matematikere af gode grunde afskyr.

Men det er ikke hele svaret på de spørgsmål jeg fik. Vi ved alle, at i matematikken er undervisningen, forsk-

ningen og en kongres komplekse oplevelser, næsten som rejser i fremmede lande. I det aktuelle tilfælde et blomstrende land med mere end en milliard mennesker, og en kongres der aflagde vidnesbyrd om matematikkens vegetative udvikling.

Hyderabad - Cyberabad

Jeg er nysgerrig og spørger allerede i flyet min sidemand, en amerikaner viser det sig, hvorfor i al verden han tager til Hyderabad. Jo, fordi hans US-amerikanske software firma har sendt ham for at snakke med nogle af de indiske team leaders i Hyderabad, hvortil de har "out-sourced" det meste af det praktiske programmeringsarbejde. "Og design", tilføjer han. Men hvorfor Indien og ikke Argentina eller Filippinerne, hvor lønningerne måske stadig er endnu lavere? Jo, der har de faktisk også nogle teams i arbejde. Og der bliver flere hen ad vejen. "Men Indien er mest interessant for os nu. De har en stor middelklasse, der satser på uddannelse. Dem kan vi bruge. Og så har vi fælles sprog."

Det med "fælles sprog" kan jo være rigtigt med indiske computerfolk, men på gaden hørte jeg egentlig ikke meget mere end "Yes, Sir", lige meget hvad jeg spurgte om. Men det er rigtigt, at det vrirler med computerfagfolk, så meget at man taler om Cyberabad, når man mener Hyderabad eller Bangalore eller Pune, de tre nye store indiske software centre. Dagen inden kongresåbningen udbasunerede The Times of India, at IBM har estimeret 1,3 lakh (indere tæller ikke i millioner eller billioner, men i lakh = 10^5 og crore = 10^7), dvs. altså omkring 130.000 ansatte i Indien. IBM har selv holdt tallet hemmeligt, sikkert af hjemlige politiske hensyn, siden det nu løber op til 1/3 af deres samlede personale. Resultat: IBM er nu Indiens næststørste private arbejdsgiver.

Kooperativ kaotisk adfærd

Men hvor gode er de indiske matematikere og hvor god er matematikken i sin helhed, og hvor bevæger de sig hen? Det ville jeg gerne vide - med kun 10 dage i landet.

Landet, byen og kongressen var præget af samme kaos som trafikken: 1/3 del kører i venstre side, 1/3 i højre side og resten i midten, men uheld er forbavsende



Kooperativ kaotisk adfærd 1: Bytrafik 2010 i Hyderabad

sjældne. De er mange, de er dårligt organiserede, de er individualister, som man måske automatisk bliver i den menneskevrimmel. Men de hjælper hinanden. Altid, siger de kloge, som kender landet.

Produktion af software skal efter sigende foregå på samme måde, store teams, ingen klare aftaler, alle ser hvad den anden laver og tilpasser sig eller maser sig frem. Det virker. Måske nemt at forklare matematisk: The power of averaging - De store tals styrke. Det kan de.

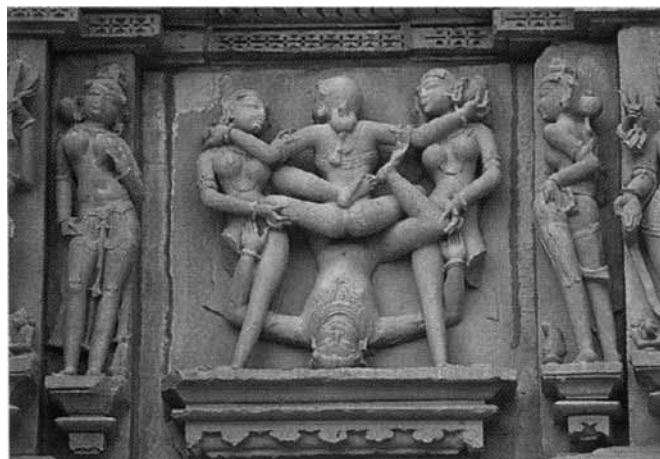
Det kan man ikke sige om os europæere. Fra Danmark var vi der med to indbudte foredragsholdere (Jesper Grodal fra KU og Tinne Hoff Kjeldsen fra RUC, imponerende og til lykke til dem begge med den store anerkendelse), vores delegerede Christian Berg ved IMU repræsentantskabsmødet, undertegnede aldrende lektor fra RUC samt to af RUCs (udenlandske) PhD-studerende. Beskedent, men forståeligt: det er et pengespørgsmål, og de der har bevillingerne vil sikkert hellere bruge dem til noget "ordentligt" for den nødvendige rapport til bevilgende myndighed i stedet for sådan et "cirkus", og for de andre eksisterer spørgsmålet ikke længere, efter at institutterne er blevet støvsuget for egne rejsemidler.

Skidt og godt

Hvad er de derhjemme så gået glip af? Ikke af den tomme snak ved åbningsceremonien, som der var en del af. Enhver gennemsnits-djof'er kunne præstere samme strøm af velmente, velanbragte, men alene organisatoriske sætninger.

Men på den positive side talte allerede fra start, at Indiens kvindelige præsident tilsyneladende havde rådført sig med indiske matematikere og leverede en knivskarp, programmatisk tale. Det fremgik, at hun havde blik for grænsen mellem en let luftig, men kulturelt løfterig matematisk forskning og de reelle bidrag til fremskridt for menneskeheden. På den ene side af hendes grænse-dragning placerede hun de fire Fieldsmedailler (se navne, billeder og kort begrundelse i kassen ved siden). På den anden side rettede hun en eksplicit tak til Yves Meyer, vinder af Gaussprisen for hans arbejde om billedgenkendelse og billedlagring ved hjælp af wavelets og til Louis Nirenberg, den gamle mester i raffinerede uligheder ved partielle differentialligninger og vinder af den nyindstiftede Chernpris.

Det var en god oplevelse at høre plenarforedragene. Indrømmet, de færreste foredragsholdere formåede at henvende sig til et publikum på flere tusind. De kunne heller ikke levende formidle grundlæggende ideer eller tematisere den matematiske eller udenoms-matematiske betydning af deres resultater. Indrømmet også, at man simpelthen havde valgt de forkerte til lovtale Fieldsmedaillierne og de andre udmærkelser. Enten fortabte de sig i rent tekniske detaljer af lutter begejstring for deres hero eller de opremsede uendelige og intetsigende lister over disses resultater. Ingrid Daubechies, den designerede præsident for IMU, skal dog roses for hendes prægnante beskrivelse af Yves Meyer's værk. Og indrømmet nu for sidste gang, at de fleste plenumsforedrag efter de første velforberedte 3-5 minutter gik over i den kun alt for velkendte "seminarmode". Igennem alt strålede dog de unge foredragsholderes begejstring, stolthed - you name it. Det



Kooperativ kaotisk adfærd 2: Hinduistisk relief til illustration af førtantriske ritualer ved Kandariya Mahadev (=Shiva) tempel fra omkring 1050 i Khajuraho nær centralindisk Bhopal (foto Søren Lauridsen)

gav noget charmerende. I hvert fald var hovedforedragene ikke kedelige. Og foredragene i de tyve traditionelle sektioner fungerede som altid udmærket. Det var dejligt at smålytte eller snuppe sig en lille power nap et sted og så gå videre.

Tilbage til spørgsmålet om hvorhen matematikken bevæger sig: Det var mærkeligt, hvor svært de fleste foredragsholdere havde det i Hyderabad med motive-rende, metodiske og tværgående metabetragtninger. Og hvor en af foredragsholderne forsøgte, mærkede man dog tydeligt vedkommendes ubehag ved at sætte ord på det. En yngre generation af matematikere ser på sådanne forklaringer som "platte"; "subjektive", "bombastiske" eller "overdrevne". Denne snævre orientering på det enkelte resultat hører selvfølgelig med til matematikken. Den står dog i skrigende modsætning til de store armbevægelser af de matematikere som markerede sig i det 20. århundrede som visionære. Lad mig nævne den globale analyses "fire-bande" Fritz Hirzebruch, Raoul Bott, Iz Singer og Michael Atiyah. Man kunne lige så godt nævne Baum, Carleman, Connes, Gelfand, Grothendieck, Gårding, Kahane, Pontryagin, Rota, Serre, Smale og alle de andre store tænkere fra denne næsten forsvundne tid. Efter 1950 førte de matematikken ud af dens ekspansive fase og ind i en gylden epoke af konsolidering. I Hermann Weyls og Emmy Noethers fodspor havde de alle brugt år på at forstå, hvorfor bestemte matematiske resultater ser ud som de gør. Det metodiske, adresseringen af et stort verdensomspændende matematisk publikum, var for dem ikke noget påtvungent, ikke en forbandet pligt, men deres egentlige centrale anliggende.

Det synes det tungt med for tiden.

Tilbage til indisk trafik

Måske romantiserer jeg. Men der var en tid, der ikke er så fjern, hvor matematikkens strøm mere lignede den kaotiske kooperative indiske bytrafik end en takt- og trafiklysreguleret fremrykning af isolerede individer. Det ville være en stor gevinst, hvis kongressen i Hyderabad kunne genkalde dette minde for os alle og gøre savnet lysende klart.

Beretning for 2009 til Matilde



Nationalkomiteen er bindeleddet mellem dansk matematik og Den Internationale Matematiske Union (IMU), og den orienterer Dansk Matematisk Forenings medlemmer gennem medlemsbladet MATILDE.

Nationalkomiteen har i 2009 haft følgende sammensætning: Henning Haahr Andersen, Christian Berg (formand), Morten Brøns, Hans Christian Hansen, Mikael Rørdam (sekretær), Michael Sørensen og Bent Ørsted.

Nationalkomiteen har en hjemmeside <http://nationalkomite.mathematics.dk/> med link fra DMF.

Medlemskabet af internationale faglige unioner som IMU ligger formelt i Videnskabernes Selskab, som nedsætter nationalkomiteer efter indstilling fra diverse foreninger, f.eks. DMF.

IMU's medlemslande er inddelt i 5 grupper, I-V. Store lande som USA og Frankrig er medlem i gruppe V, Sverige er medlem i gruppe IV, Finland og Norge er medlem i gruppe III, medens Danmark er i gruppe II og Island i gruppe I. Tallet angiver hvor mange delegerede landet kan sende til generalforsamlingen og dermed hvor mange stemmer landet har. Kontingentets størrelse udregnes efter formelen $F(G)U$, hvor G er gruppen, $F(G)$ er en faktor og U er en enhed i Schweizer Franc.

For 2009 er $U=1528$ CHF og $F(II)=2$, $F(III)=4$. Hvis Danmark skal skifte fra gruppe II til III betyder det altså en fordobling af kontingentet. Flere detaljer kan findes på IMU's hjemmeside <http://www.mathunion.org/>.

I 2009 er Finland rykket op fra gruppe II til III efter ansøgning. Endvidere er Thailand blevet associeret medlem, hvilket betyder at Thailand får information om arbejdet i IMU uden at betale kontingent og uden at have stemmeret. Endelig er African Mathematical Union blevet affilieret medlem af IMU, ligesom European Mathematical Society er det. Disse beslutninger har været til afstemning i nationalkomiteerne, hvor Danmark har stemt for.

Planlægningen af ICM (International Congress of Mathematicians) 2010 i Hyderabad i Indien 19.-27. august 2010 kan følges på hjemmesiden <http://www.icm2010.org.in>. Her kan bl. a. ses, hvem der er inviterede foredragsholdere.

Beretning fra IMU's Generalforsamling i Bangalore, Indien, 16.-17. august.

Som optakt til ICM2010 i Hyderabad afholdtes IMU's generalforsamling i Bangalore 500 km syd for Hyderabad. Som sædvanlig var der en tung dagsorden, der fyldte det meste af de 2 dage, der var afsat. Der blev dog tid til en opvisning i klassisk indisk dans med efterfølgende fæl-

*af Christian Berg, formand
Institut for Matematiske Fag, KU
BERG@math.ku.dk*



les middag den sidste aften. Lad mig fremhæve 3 vigtige ting, der blev besluttet på generalforsamlingen, hvor der var deltagere fra 55 lande.

- a) Ved generalforsamlingen for 4 år siden blev det besluttet at executivkomiteen skulle undersøge mulighed for at IMU fik et permanent sekretariat i modsætning til tidligere, hvor sekretariatet flyttede med den person, der var sekretær for IMU. Som forberedelse af dette var der for et par år siden indkaldt tilbud fra medlemslandene om at tilbyde et sådant værtskab, og en række lande afgav tilbud. En særlig komite blev nedsat til at vurdere disse tilbud og 3 særligt fine tilbud blev udvalgt og præsenteret på generalforsamlingen.

Det blev vedtaget med stor tilslutning, at det var en god ide at oprette et permanent sekretariat, selv om nogle få delegerede ytrede bekymring for om et bestemt land skulle kunne få for stor magt i IMU via et sådant sekretariat. Efter en præsentation af de tre forslag fra Fields Instituttet i Toronto, IMPA i Rio de Janeiro, WIAS i Berlin fremført af repræsentanter for tilbudsgiverne, kom det til en afstemning, som viste absolut flertal for tilbuddet fra Berlin. Det var et ganske generøst tilbud der gør det muligt for IMU at udnytte unionskontingenterne til mere direkte matematikrelaterede projekter.

- b) En særlig nomineringskomite ledet af David Mumford havde forberedt valg til executivkomiteen og diverse komiteer derunder. I de efterfølgende valg blandt de opstillede forslag blev Ingrid Daubechies valgt til ny præsident for IMU for årene 2011-2014 og Jesper Lützen blev valgt til ICHM komiteen (International Commission on the History of Mathematics). Til sidstnævnte komite var der nomineret 5 og der skulle vælges 2, så det var fint at de skandinaviske landes kandidat Jesper Lützen blev valgt tillige med Kim Plofker fra USA. Ragni Piene fra Norge har været menigt medlem af executivkomiteen i 8 år og har gjort et stor arbejde. I den næste 4 års periode er der ingen skandinaviske matematikere i komiteen.
- c) Det blev besluttet at ICM2014 afholdes i Seoul, Sydkorea. Også i dette tilfælde havde executivkomiteen nedsat et udvalg til at se på indkomne tilbud, og det var endt med at anbefale Seoul, bl. a. på grund af det generøse tilbud om at stille grants til rådighed til at 1000 unge fra udviklingslande kan deltage i ICM2014.



af Karsten Schmidt, DTU Matematik
Karsten.Schmidt@mat.dtu.dk

I Matilde nr. 36 blev der genoptrykt en artikel, "Probabilistic proofs", af Alexander Shen fra Mathematical Intelligencer, volume 20, nr 3, 1998. Heri demonstrerer Shen at enkle sandsynlighedsargumenter ofte kan føre til nye, overraskende resultater. Artiklen viser også at man kan komme for hurtigt til resultaterne. I et eksempel vil Shen vise at en konveks sten altid kan placeres i sollyset således at dens skygge på en plan vinkelret på bestrålingen er større end eller lig med en fjerdedel af overfladearealet. Beviset bygger på en sandsynlighedsfunderet antagelse om at stenens forventede skygge EX er proportional med dens overfladeareal S . Faktoren får Shen fra en kugle hvor det nemt indses at $EX = \frac{1}{4} S$. Heraf følger da påstanden. Det er antagelsen om proportionalitet der skal overvejes i det følgende.

Indledningsvis betragter vi en plan ækvivalent til Shen's sætning. Vi ser på parallelprojektion af plane konvekse figurer på en ret linje som holdes vinkelret på den variable projektningsretning. Idet forholdet mellem en cirkels diameter (som er lig med cirkelns konstante forventede skygge) og omkreds er $\frac{1}{\pi}$, påstår vi at længden af den forventede skygge for en vilkårlig konveks sten er proportional med figurens perimeter p med faktoren $\frac{1}{\pi}$.
Bevis: Det følger af Cauchy-Croftons sætning at

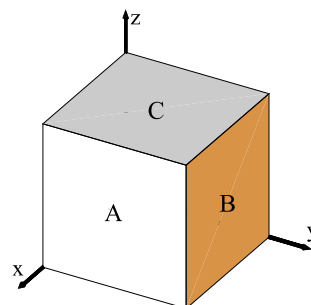
$$\int_0^{2\pi} D(t) dt = 2p,$$

hvor $D(t)$ betegner figurens diameter (læs: skygge) ved en vilkårlig projektningsretningsvinkel t i forhold til en fast linje [1]. Den forventede skygge fås da ved at midle over alle mulige retningsvinkler vægtet ens:

$$EX = \frac{1}{2\pi} \cdot 2p = \frac{p}{\pi}, \quad \text{QED.}$$

$$EX = \frac{1}{2\pi} \cdot 2p = \frac{p}{\pi}, \quad \text{QED.}$$

Det virker nu oplagt at overføre metoden fra planen til rummet. Lad os tjekke med et par konvekse sten. En enhedskubus er anbragt i et sædvanligt koordinatsystem, således at sollyset kommer ind fra x-aksen, vinkelret på papiret. Solretningen fastholdes mens koordinatsystemet (og kuben) først drejes vinklen s omkring z -aksen med uret, hvorefter z -aksen drejes vinklen t omkring origo vinkelret på papiret mod solretningen, hvorefter situationen er som på figuren. Figuren skal også her konkret fortolkes som kubens skygge, sammensat af de tre parallelogrammer A, B og C , projektionerne af tre kubeendeflader.



Når (s, t) gennemløber $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ belyses kubens alle retninger. Den forventede skygge kan derfor beregnes som middelværdien af de gennemløbne skygger:

$$EX = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{skyggen}(s, t) ds dt.$$

Af symmetri Grunde behøver vi kun at midle for $(s, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. I så tilfælde er:

$$A = \cos(s) \cos(t), \quad B = \sin(s) \cos(t) \quad \text{og} \quad C = \sin(t),$$

Konvekse

og vi får videre at

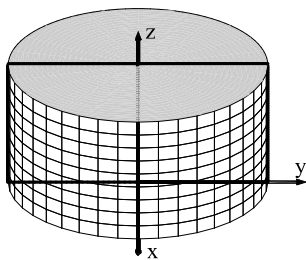
$$EX = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A + B + C) ds dt = \frac{8 + 2\pi}{\pi^2}.$$

Forholdet mellem den forventede skygge og kubens overfladeareal er derfor

$$= \frac{8 + 2\pi}{\pi^2} \cdot \frac{1}{6} \approx 0.241 < \frac{1}{4},$$

og det eneste der kan siges ud fra sandsynlighedsargumentet, er at der findes faktiske forekomster af forholdet mellem skygge- og overfladeareal der er større (og mindre) end eller lig med *dette* tal.

Eksempel 2: Ved konvekse omdrejningsflader behøver vi af symmetri Grunde kun at betragte skyggen for en fast værdi af s . På figuren nedenfor er en lukket cylinder med radius 1 og højde h anbragt i kooordinatsystemet og derefter drejet vinklen t omkring y -aksen mod solretningen. Når figuren fortolkes som cylinderens skygge, er den summen af et rektangel (indrammet på figuren) med grundlinjen 2 og højden $h \cos(t)$, og af en ellipse (sammensat af en halvellipse fra hhv. bund og top) med halvakslerne 1 og $\sin(t)$.



Forholdet mellem den forventede skygge af cylinderen og dens overflade er derfor

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2h \cos(t) + \pi \sin(t)) dt \cdot \frac{1}{2\pi(h+1)} = \frac{\pi + 2h}{\pi^2(1+h)}.$$

Dette er en monotont aftagende funktion af h . Den relativt mindste forventede skygge har en uendeligt høj cylinder med værdien $\frac{2}{\pi^2} \approx 0.203 < \frac{1}{4}$, mens den størst mulige opnås når vi lader h gå mod 0 og får en flad cirkulær sten med forholdet $\frac{1}{\pi} \approx 0.318 > \frac{1}{4}$.

Det kan ved ekstremumsundersøgelse let vises at enhedskubens mindste skygge er 1, og dens største er $\sqrt{3}$. Kubens skyggeareal passerer altså den magiske grænse på $\frac{5}{4} = 1.5$. Det tilsvarende gælder for enhver cylinder. Det viser sig nemlig, populært sagt, at hvis en konvekstens relative forhold ligger "langt fra" kuglens $\frac{1}{4}$, så har dens skygge så store udsving omkring sin middelværdi at den også passerer $\frac{5}{4}$. Hvilket ses særlig tydeligt ved den flade sten, hvis skygge svinger mellem ekstremerne 0 og $\frac{5}{2}$. Det er derfor meget sandsynligt at Shen har ret i at enhver konveks sten kan præstere en skygge der er mindst lige så stor som en fjerdedel af overfladen. Men beviset mangler ...

[1] Manfredo P. do Carmo: Differential Geometry of Curves and Surfaces, Printice-Hall 1976, p. 50, prob. 14.



af Mogens Niss, IMFUFA, NSM, RUC

Matematikundervisningens historie i Danmark i 1900-tallet.

Syddansk Universitetsforlag, 2008, 945 s.

I december 2008 udkom, efter en lang og vist til tider også vanskelig fødsel, tobindsværket *Matematikundervisningen i Danmark i 1900-tallet*, på Syddansk Universitetsforlag. Projektet med at skrive denne bog blev oprindeligt søsat i 1999 af Dansk Matematisk Forening, som led i arbejdet op til det såkaldte World Mathematical Year 2000. Arbejdet blev henlagt til en arbejdsgruppe med repræsentanter for folkeskolen og seminarierne, ungdomsuddannelserne, de almene voksenuddannelser samt universiteterne og de øvrige videregående uddannelser. Der var ikke nogen egentlig redaktør på værket – hvilket godt kan spores på resultatet – men projektet blev koordineret af lektor H.C. Hansen, nu University College Capital.

Bogen er som sagt i to bind. Første bind er viet matematikundervisningen i folkeskolen, ved seminarierne, ved de erhvervsfaglige uddannelser og almen voksenundervisning, mens andet bind angår de gymnasiale og de videregående uddannelser. Hvert kapitel har egen/egne forfatter(e), og der er kun begrænsede krydsreferencer mellem kapitlerne. Værket fremstår i øvrigt noget inhomogent, idet der i de forskellige kapitler er gjort ret forskellige valg vedrørende arten af temaer og fokus, detaljeringsgrad, inddragelse af de processer der har formet matematikundervisningen på de enkelte undervisningstrin, osv. Nogle kapitler går i detaljer med at beskrive navngivne aktører og deres rolle, mens andre holder sig til de formelle bestemmelser i form af love, bekendtgørelser og læseplaner. Værket er ikke lagt an som – og er heller ikke – en forskningspublikation, men det fremlægger et umådeligt righoldigt og informativt materiale, der er en guldgrube for den som vil sætte sig ind i rammer, vilkår og omstændigheder for matematikundervisningen på snart sagt alle trin i det 20. århundrede. Den overvældende mængde af faktuelle oplysninger står ikke i vejen for en givende læseoplevelse. For min egen del har jeg haft stor fornøjelse af at pløje mig igennem de to bind, som de fleste steder er ganske velskrevne.

Her vil jeg koncentrere mig om værkets slutdel, *Matematikundervisningen ved universiteter og høje læreanstalter*, skrevet af Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet. Gutmann optræder i øvrigt ikke kun i denne del af værket, idet hans legendariske omhu og ordenssans har gjort det muligt i bogen at bringe hans besvarelser af matematikopgaver fra skoletiden i Aarhus, ligesom han

ligger inde med en imponerende samling af dokumenter af snart sagt enhver art vedrørende matematikundervisningen fra størstedelen af århundredet. På den måde kan man anskue en stor del af værket, og især dets sidste knap 170 sider, som Tages Gutmanns matematikundervisningserindringer. Det er ikke mindst spændende – og på flere punkter nostalgisk – læsning for en gammel Tage-elev som undertegnede.

Som man ville vente sig det af Gutmann, giver han en minutøs redegørelse for formaliteter, forordninger, studieplaner, timetal, eksamensordninger, studiestatistikker osv. på navnlig Københavns og Aarhus Universiteter men også i høj grad også på Den Polytekniske Læreanstalt (senere DTH/DTU), ligesom lærebøger og noter i forskellige redaktioner og udgaver beskrives indgående. For ret at kunne følge udviklingen får læseren tillige en kort indføring i otte grundlæggende abstrakte begrebsdannelser, nemlig legeme, gruppe, vektorrum, metrisk rum, topologisk rum, hilbertrum, funktionalanalyse samt abstrakt mål- og integralteori og sandsynlighedsregning. Beskrivelsen af udviklingen på de "nye" universiteter i Odense, Roskilde og Aalborg og af de øvrige videregående uddannelsesinstitutioner er noget mere summarisk og knap så balanceret som for de klassiske universiteter. Når beskrivelsen af Københavns Universitet, Polyteknisk Læreanstalt og Aarhus Universitet står i centrum for fremstillingen, skyldes det selvsagt at Tage har gjort mere end halvdelen af århundredets udvikling med på disse institutioner, som studerende, som medarbejder og som censor, ligesom han i årtier har været en central figur i studietilrettelæggelse og undervisning. Hans kommentarer til studieordninger og lærebøger – og ikke mindst til deres ophavsmænd – er oplysende og underholdende læsning. Med omtalen af personer og personlighedstræk bliver man inviteret med til nogle af de overvejelser om studieplaner og –reformer der fandt sted i baglokalerne. Universitetskapitlerne giver – som bogen i øvrigt – lyst og inspiration til diskussioner om mangt og meget, både når det gælder kendsgerninger og vurderinger. På den måde er det foreliggende værk ikke den definitive forskningsbaserede fremstilling af matematikundervisningens historie i det 20. århundrede, men det leverer en fortræffelig begyndelse, som hermed varmt anbefales.

Et debatoplæg: Om at kommunikere statistik til ikke-



af Birger Stjernholm Madsen
NOVO, bsm@novozymes.com

Mange matematikere arbejder med statistik og har brug for at kommunikere med ikke-fagfolk.

Dette debatoplæg er en sammenfatning af mine tanker medens jeg skrev bogen "Statistik for ikke-statistikere" (Samfundslitteratur 2008) og efterfølgende oversatte den til engelsk (ikke udkommet endnu).

Det er min opfattelse, at formidling (her tænker jeg primært skriftlig formidling) af statistik til ikke-statistikere (både i Danmark og i andre lande) dumper både på fremstillingen og på emnevalget.

Fremstillingen

Der bør efter min mening lægges vægt på en formulering, der er letforståelig frem for 100 % matematisk stringent. Nogle få eksempler:

Om terminologi

Et af problemerne ved elementære publikationer om statistik er, at læseren præsenteres for *adskillige ord for samme fænomen*, ofte endda i samme publikation! Det gælder også helt elementære begreber.

F.eks. bruges følgende betegnelser synonymt: (Measures of) Dispersion, Spread, Scatter, Variability, Variation, etc. På samme måde finder vi: (Measures of) Location, Centre, Central Tendency, Position etc.

Hvorfor har så grundlæggende begreber så mange betegnelser.

Der er gjort forskellige forsøg på at standardisere statistiske betegnelser. Det mest vellykkede er nok ISO 3534 "Statistics - Vocabulary and symbols" (en standard i 3 dele).

På dansk er der dog i dette tilfælde til en vis grad enighed om at bruge betegnelserne (mål for) niveau og (mål for) spredning.

Omvendt er det vel et rimeligt forlangende, at *væsentlige begreber rent faktisk også har et navn!* Lad os betragte formelen for et 95 % konfidensinterval for en middelværdi i normalfordelingen:

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Her er t som bekendt 0,975 fraktilen i en t -fordeling med $n-1$ frihedsgrader.

Størrelsen $t \cdot s / \sqrt{n}$ er af fundamental betydning for praktikerne! Den intuitive fortolkning er, at det er den "statistiske usikkerhed" hørende til estimatet af middelværdien.

En så fundamental størrelse har naturligvis et navn? Ikke i ISO eller andre internationale standarder... Heller ikke i de fleste lærebøger, hvor man kan finde betegnelser som "den halve længde af et 95 % konfidens interval" eller simpelthen "tallet efter $\pm$ "...

Inden for måleusikkerhed **har** man faktisk (i internationale standarder) defineret et begreb svarende til denne størrelse, det kaldes "den ekspanderede usikkerhed". Denne betegnelse kan dog næppe overføres til statistikens verden uden at møde modstand både blandt statistikere såvel som ikke-statistikere.

Indenfor repræsentative undersøgelser kaldes denne størrelse faktisk mange steder simpelthen "den statistiske usikkerhed" (hvis stikprøven udgør en væsentlig del af populationen, skal der dog et korrektionsled på). At "ophøje" denne betegnelse til standard terminologi vil næppe møde den store modstand blandt ikke-statistikere. Det bliver måske værre med statistikerne!

Om græske bogstaver, symboler m.v.

Her finder vi en stor del af forklaringen på, at statistik ikke ligefrem er en populær disciplin blandt menigmand...

Åbner man den legendariske bog af Box, Hunter & Hunter (2. udgave, 2005), finder vi på p. viii (lige inden indholdsfortegnelsen): Greek Alphabet! Læseren efterlades med det indtryk, at dette virkelig må være væsentligt...

Men: Hvor mange græske bogstaver **har** vi egentlig brug for? I elementære publikationer efter min mening **højest 4**: Σ , μ , σ , og (evt.) χ .

Σ betyder som bekendt sum, og det har de fleste heldigvis styr på takket være regnearkene!

μ og σ er jo henh. middelværdi og spredning, de er svære at komme uden om. Takket være Six Sigma kender mange heldigvis i σ forvejen!

Hvad bogstavet χ angår, så er det strengt taget slet ikke nødvendigt. På den anden side vil mange læsere alligevel støde på betegnelsen χ^2 , hvilket tæller for at bruge dette græske bogstav også.

Hvad resten af de græske bogstaver angår: Vi har **ikke** brug for dem!

Også forskellige **symboler** gør læsningen af statistiske publikationer til en svær opgave for ikke-statistikere. F.eks. vil vi (professionelt) ofte bruge en "hat" som symbol for estimat og skrive

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Måske burde vi i stedet blot skrive

$$p = \frac{x}{n}$$

Jeg ved godt, det ikke er korrekt! Men: gør det noget? Hvad med at opgive den matematiske præcision for at opnå større læselighed?

Om matematiske formler

Hvad skal vi med **formler** som f.eks.

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Denne formel for (estimatet for) hældningen i lineær regression findes i adskillige "elementære" bøger om statistik! **Hvorfor?** Hvad skal ikke-statistikere med den? Hvilken informationsværdi indeholder den?

Der er vel ingen, der udfører disse beregninger i hånden nu til dags? Og hvis man gør, så er ovenstående formel for resten ikke særlig velegnet...

I øvrigt er det også bemærkelsesværdigt, så få anstrengelser der gøres for at lette tilværelsen for læseren af de statistiske formler. Et eksempel:

I forbindelse med estimation af parameteren p i en binomialfordeling kan vi under forudsætning af simpel tilfældig udvælgelse opstille følgende formel for den statistiske usikkerhed på estimatet $p=x/n$:

$$u = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Ikke just noget kønt syn, hvis man ikke er statistiker...

Under forudsætning af, at populationen er meget større end stikprøven reduceres dette en hel del:

$$u = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Hvis vi nu yderligere antager, at p ikke er alt for langt fra 0,5 (f.eks. $0,3 < p < 0,7$) og vi ignorerer den ubetydelige forskel mellem 1,96 og 2, så reduceres dette til formelen:



$$u = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Denne formel må siges at være **bemærkelsesværdig simpel!** Og den er samtidig ekstremt nyttig! Alligevel er det ikke lykkedes mig at finde den i én eneste bog om statistik... **Hvorfor?**

Emnevalget

Dette bør styres af, at hvilke emner, der er nyttige i det praktiske arbejde med statistik. Dels er der efter min mening et par spøgelses, der bør aflives, dels er der emner, der traditionelt lægges for lidt (eller ingen) vægt på i elementære publikationer om statistik. Nogle eksempler:

Sandsynlighedsregning

Selv i "elementære" bøger om statistik finder man ofte en introduktion til sandsynlighedsregning. Det hører naturligvis med til statistikerens tankegods, men hvad skal ikke-statistikeren med formler som

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$

Er der nogen praktikere, som har nytte af denne information? Hvad skal de bruge det til? Bidrager formelen



til at forstå binomialfordelingen? Tja, måske hvis man er matematiker...

Styrkeberegninger

I forbindelse med planlægning af forsøg stilles statistikeren (eller matematikeren) ofte spørgsmålet: Hvor stort skal mit forsøg være?

Nu begynder der så en længere dialog, hvor statistikeren sammen med praktikerens skal tage stilling til bl.a. valg af signifikansniveau og styrke. Dette er vanskelige begreber, og derfor ender det ofte med, at statistikeren blot beslutter dette!

Dernæst skal statistikeren bruge et bud på standardafvigelsen, det kan praktikerens som regel levere. Endelig stiller statistikeren så et spørgsmål i retning af "Hvad er den mindste forskel, du gerne vil være i stand til at opdage?". Dette er jo i bund og grund noget, der ikke er statistikerens domæne. Alligevel begynder praktikerens at få flakkende øjne...

Konfidensintervaller.

Da jeg for mange år siden læste faget Statistik 1, blev konfidensintervaller stort set ikke omtalt. Det kan jeg godt undre mig over i dag. Mange praktikerer har svært ved at forholde sig til test af hypoteser, det er svært stof for ikke-statistikere. Helt anderledes forholder det sig med konfidensintervaller.

Ikke-statistikeren, der skal sammenligne middelværdien i to grupper, kan vælge at udføre den klassiske

t-test. Men han kan også beregne et konfidensinterval for forskellen mellem middelværdierne, det vil mange ikke-statistikere have langt lettere ved at forholde sig til.

Dette kan naturligvis også udnyttes i forbindelse med planlægning af forsøg. Ikke-statistikeren vil som regel godt kunne sige, hvor stor en statistisk usikkerhed, han kan leve med (f.eks. for forskellen mellem to middelværdier).

Den (maksimale) "statistiske usikkerhed" er for de fleste et langt mere forståeligt begreb end den før omtalte "mindste forskel". Så slipper man også for at tænke på styrken. Der er altså én ting mindre at forholde sig til! Det er bekvemt, da der er ret stor forskel på, om man vælger en styrke på 80 % eller 95 %...

Avancerede og utraditionelle emner

Man skal efter min mening ikke holde sig tilbage for utraditionelle emner. Et eksempel er en omtale af "skævhed" og "kurtosis". Dette er traditionelt henvist til avancerede lærebøger, på trods af, at de er nyttige redskaber for praktikerens. De er ét af flere nyttige værktøjer til at afgøre, om data er normalfordelt, og hvad der evt. kan gøres for at opnå dette (f.eks. logaritmisk transformation eller fjerne outliers).

Her bliver man naturligvis nødt til at have nogle vejledende grænser for, hvor store afvigelser fra 0, som maksimalt kan accepteres. Det er i bund og grund et meget simpelt spørgsmål! Men man skal lede meget længe for at finde et svar...

Hvis man leder længe i "Kendall's Advanced theory of statistics" (!), volume 1, finder man (en del af) svaret gemt væk i et par øvelser i form af asymptotiske grænser. F.eks. er den maksimalt acceptable afvigelse fra 0 for skævheden givet ved udtrykket

$$2 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}}$$

For kurtosis er grænsen det dobbelte. Men man finder ingen vejledning om, hvor stor stikprøvestørrelsen n skal være, før disse grænser kan bruges i praksis. Og så er man jo som praktiker lige vidt...

Så må man ty til et af de værktøjer, som også kan formidles til ikke-statistikere. **Simulering!**

Simuleringsstudier viser, at ovennævnte grænser gælder fint for små stikprøver (f.eks. $n=25$) for skævheden. Derimod skal vi væsentligt højere op, før de fundne grænser gælder for kurtosis, helt op i nabolaget af $n=1000$.

For mindre værdier af n kan man ved hjælp af simulering beregne vejledende grænser for kurtosis. Det viser sig i øvrig, at disse grænser ikke bliver symmetriske!

Dette er et godt eksempel på, at resultater af simuleringsstudier godt kan præsenteres for ikke-statistikere og give nyttig information!

Kommentarer til ovenstående betragtninger er velkomne!



Postdoctoral fellowship grants for 2011/2012

Institut Mittag-Leffler announces a number of grants for the academic year 2011/2012. The scientific areas for the year's two programs are:

Complex Analysis and Integrable Systems fall 2011, 1 September – 15 December
Geometric and Analytic Aspects of Group Theory spring 2012, 16 January – 30 May

In order to be considered for a grant you must fulfill the following conditions:

- your research interest must fall within the area of the program you apply for
- you must be either an advanced graduate student or a recent PhD (degree obtained 5 years ago or later)

The grants consist of:

- accommodation and office space free of charge.
- a monthly stipend
- travel expenses to and from Stockholm

Preference will be given to applications for longer stays, preferably for a semester.

Instructions how to apply:

1. Fill out the application form.
2. Press the "make pdf" button at the bottom of the form.
3. Check that the pdf application is complete and accurate. If you want to change or add something, return to the web form, make the changes and press the "make pdf" button again.
4. Print out the pdf file and sign it.
5. Scan the signed application form and send it by email to koskull@mittag-leffler.se
Attach copies of your work (if any) in pdf, ps or doc format.
6. Arrange that two or (preferably) three letters of recommendation are sent to the Institute.

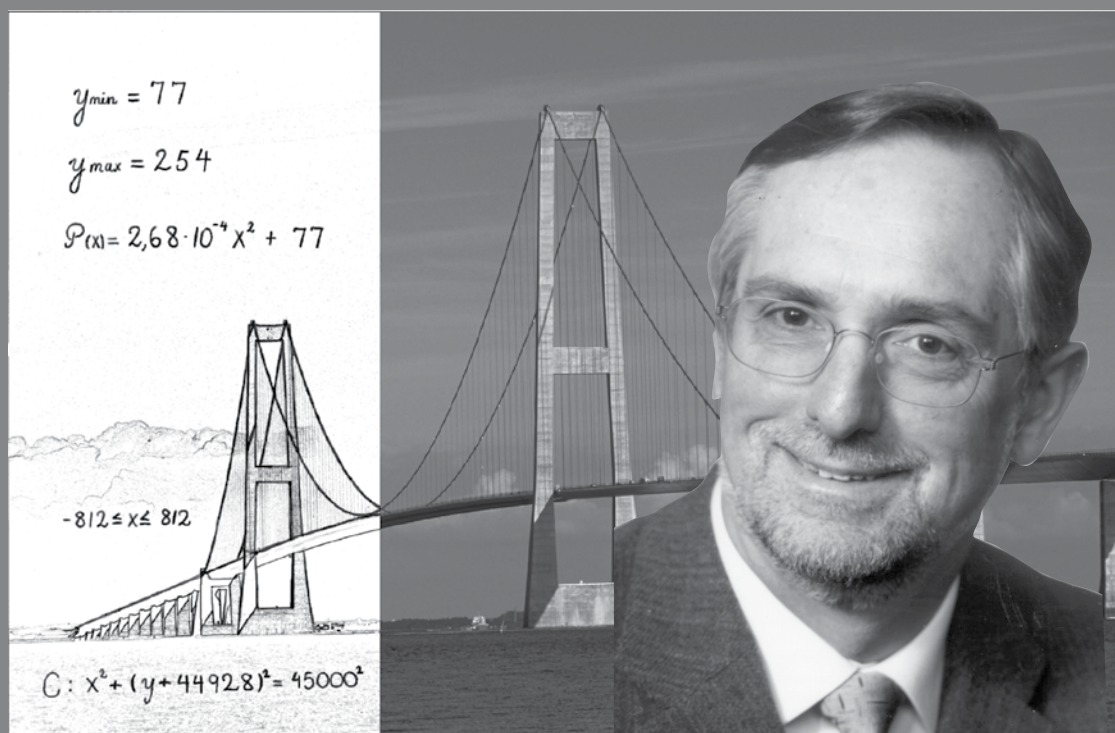
If for some reason scanning is difficult to arrange you may replace step 5 by sending the signed application form and the attachments (if any) by ordinary air mail to

The Board
Institut Mittag-Leffler
Auravägen 17
SE-182 60 Djursholm
Sweden

Your application should arrive no later than **January 12, 2011**. Decisions on awards will be made by the end of January, 2011.

Inquiries may be directed to the Institute director, Prof. Anders Björner bjorner@mittag-leffler.se
or, for practical matters, to Visitor Programme Administrator Marie-Louise Koskull koskull@mittag-leffler.se

A Life in Geometry



a symposium
in celebration of the
70th birthday of
Professor Vagn Lundsgaard Hansen

24 September 2010, Technical University of Denmark

Speakers:

Jean-Pierre Bourguignon, IHÉS

Tobias Colding, MIT

Programme: <http://www2.mat.dtu.dk/VLH70>

Organisers: J. Gravesen, P.G. Hjorth, S. Markvorsen, M. Pedersen

Begivenheder

ved Poul Hjorth



Matematiklærerdag

Heldagsarrangement for undervisere fra de gymnasiale uddannelser.

AaU: 30. september 2010 fra 09.00-15.30
Sted: Fredrik Bajers Vej 7B, lokale B2-104

Tilmelding er påkrævet - få mere information h^v©r
http://www.math.aau.dk/fileadmin/user_upload/www.math.aau.dk/Samarbejder/MatLaerer/MATlaererdag2010.pdf

Arrangør: Lisbeth Fajstrup

Konference/workshop: Computere og matematikundervisning

KU: Tirsdag den 26. oktober 2010

Konferencen markerer afslutningen af et projekt mellem Institut for Matematiske Fag, KU og en række gymnasier i Københavnsområdet. Projektet har været støttet af Undervisningsministeriet og omhandler didaktiske og faglige problemer i forbindelse med anvendelse af avancerede matematikprogrampakker såsom Maple i gymnasieundervisningen. Konferencen vil belyse de væsentligste aspekter af projektet. For nærmere detaljer se konferencehjemmesiden

Arrangeret af Niels Grønbæk

Erik Balslev's 75th birthday conference

AU:

A conference in honour of the 75th birthday of Erik Balslev will take place on Friday 1 and Saturday 2 October 2010 in Auditorium D2 at the Department of Mathematical Sciences, Aarhus University, Denmark.

Arrangeret af Arne Jensen (Aalborg University) Jacob Schach Møller (Aarhus University) Erik Skibsted (Aarhus University) Alexei Venkov (Aarhus University)

<http://www.imf.au.dk/events/balslev75/>

Til opslagstavlen: MATH CALENDAR 2010 www.dfg.de/download/math_calendar_2010.pdf

Ude i verden, og langt fremme:

EMS side om begivenheder: <http://www.euro-math-soc.eu/conferences.html>

WORLD STATISTICS DAY <http://unstats.un.org/unsd/wsd/> (20 October as WSD)

6TH EUROPEAN CONGRESS OF MATHEMATICS, 2012, JULY 02-07, KRAKOW, POLAND
<http://www.6ecm.pl/european-congresses-of-mathematics/index/read/congress-6ecm> Korea: The 2014 International Congress of Mathematicians (ICM) <http://www.icm2014.org>

Kalenderen

mat

2 0 1 0

JANUARY	
MO	4 11 18 25
TU	5 12 19 26
WE	6 13 20 27
TH	7 14 21 28
FR	1 8 15 22 29
SA	2 9 16 23 30
SU	3 10 17 24 31

FEBRUARY	
MO	1 8 15 22
TU	2 9 16 23
WE	3 10 17 24
TH	4 11 18 25
FR	5 12 19 26
SA	6 13 20 27
SU	7 14 21 28

MARCH	
MO	1 8 15 22 29
TU	2 9 16 23 30
WE	3 10 17 24 31
TH	4 11 18 25
FR	5 12 19 26
SA	6 13 20 27
SU	7 14 21 28

JANUARY	
MO	31 3 10 17 24
TU	4 11 18 25
WE	5 12 19 26
TH	6 13 20 27
FR	7 14 21 28
SA	1 8 15 22 29
SU	2 9 16 23 30

FEBRUARY	
MO	7 14 21 28
TU	1 8 15 22
WE	2 9 16 23
TH	3 10 17 24
FR	4 11 18 25
SA	5 12 19 26
SU	6 13 20 27

MARCH	
MO	7 14 21 28
TU	1 8 15 22 29
WE	2 9 16 23 30
TH	3 10 17 24 31
FR	4 11 18 25
SA	5 12 19 26
SU	6 13 20 27

APRIL	
MO	5 12 19 26
TU	6 13 20 27
WE	7 14 21 28
TH	1 8 15 22 29
FR	2 9 16 23 30
SA	3 10 17 24
SU	4 11 18 25

MAY	
MO	31 3 10 17 24
TU	4 11 18 25
WE	5 12 19 26
TH	6 13 20 27
FR	7 14 21 28
SA	1 8 15 22 29
SU	2 9 16 23 30

JUNE	
MO	7 14 21 28
TU	1 8 15 22 29
WE	2 9 16 23 30
TH	3 10 17 24
FR	4 11 18 25
SA	5 12 19 26
SU	6 13 20 27

APRIL	
MO	4 11 18 25
TU	5 12 19 26
WE	6 13 20 27
TH	7 14 21 28
FR	1 8 15 22 29
SA	2 9 16 23 30
SU	3 10 17 24

MAY	
MO	31 2 9 16 23
TU	3 10 17 24
WE	4 11 18 25
TH	5 12 19 26
FR	6 13 20 27
SA	7 14 21 28
SU	1 8 15 22 29

JUNE	
MO	6 13 20 27
TU	7 14 21 28
WE	1 8 15 22 29
TH	2 9 16 23 30
FR	3 10 17 24
SA	4 11 18 25
SU	5 12 19 26

JULY	
MO	5 12 19 26
TU	6 13 20 27
WE	7 14 21 28
TH	1 8 15 22 29
FR	2 9 16 23 30
SA	3 10 17 24 31
SU	4 11 18 25

AUGUST	
MO	31 2 9 16 23
TU	3 10 17 24
WE	4 11 18 25
TH	5 12 19 26
FR	6 13 20 27
SA	7 14 21 28
SU	1 8 15 22 29

SEPTEMBER	
MO	6 13 20 27
TU	7 14 21 28
WE	1 8 15 22 29
TH	2 9 16 23 30
FR	3 10 17 24
SA	4 11 18 25
SU	5 12 19 26

JULY	
MO	4 11 18 25
TU	5 12 19 26
WE	6 13 20 27
TH	7 14 21 28
FR	1 8 15 22 29
SA	2 9 16 23 30
SU	3 10 17 24 31

AUGUST	
MO	1 8 15 22 29
TU	2 9 16 23 30
WE	3 10 17 24 31
TH	4 11 18 25
FR	5 12 19 26
SA	6 13 20 27
SU	7 14 21 28

SEPTEMBER	
MO	5 12 19 26
TU	6 13 20 27
WE	7 14 21 28
TH	1 8 15 22 29
FR	2 9 16 23 30
SA	3 10 17 24
SU	4 11 18 25

OCTOBER	
MO	4 11 18 25
TU	5 12 19 26
WE	6 13 20 27
TH	7 14 21 28
FR	1 8 15 22 29
SA	2 9 16 23 30
SU	3 10 17 24 31

NOVEMBER	
MO	1 8 15 22 29
TU	2 9 16 23 30
WE	3 10 17 24
TH	4 11 18 25
FR	5 12 19 26
SA	6 13 20 27
SU	7 14 21 28

DECEMBER	
MO	6 13 20 27
TU	7 14 21 28
WE	1 8 15 22 29
TH	2 9 16 23 30
FR	3 10 17 24 31
SA	4 11 18 25
SU	5 12 19 26

OCTOBER	
MO	31 3 10 17 24
TU	4 11 18 25
WE	5 12 19 26
TH	6 13 20 27
FR	7 14 21 28
SA	1 8 15 22 29
SU	2 9 16 23 30

NOVEMBER	
MO	7 14 21 28
TU	1 8 15 22 29
WE	2 9 16 23 30
TH	3 10 17 24
FR	4 11 18 25
SA	5 12 19 26
SU	6 13 20 27

DECEMBER	
MO	5 12 19 26
TU	6 13 20 27
WE	7 14 21 28
TH	1 8 15 22 29
FR	2 9 16 23 30
SA	3 10 17 24 31
SU	4 11 18 25

Designed by Anny. www.annystudio.com

Designed by Anny. www.annystudio.com

Designed by Anny www.annystudio.com

Designed by Anny www.annystudio.com



Problemklubben "Con Amore" har løst opgave 2.

Sidste gang mindedes vi Hans Tornehave ved at bringe nogle af hans typiske eksamensopgaver i elementær analyse.

Opgave 1.

Find konvergensradius for potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n} \right) z^n,$$

og undersøg tillige, hvis konvergensradius er endelig, om rækkerne konvergerer på konvergenscirkelns periferi.

Da $\operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n} = \cot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}$ bliver kvotienten $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}$. L'Hospital giver brøken

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n+2}} \cdot \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = \\ & \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n+2}} \cdot \left(1 + \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log(n)} \right) = \\ & \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n+2}} \cdot \left(1 + \frac{\log(1 - \frac{1}{n})}{\log(\frac{1}{n})} \right) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

så konvergensradius er 1.

På konvergenscirklen vil ledfølgen divergere, så det gør rækken også.

Rodkriteriet giver $(\limsup \sin \frac{\pi}{n})^{-1} = \infty$.

Opgave 2.

Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$\begin{aligned} & (\sinh x - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - \cosh x \frac{dy}{dx} + y = \cosh x - x. \\ & -x + a \cosh x + b(\sinh x + 1) \end{aligned}$$

Opgave 3.

Undersøg, om de ved

$$f(x) = e^{-x} \sin e^x, \quad g(x) = e^{-x} \sin e^{2x}$$

definerede afbildninger $f, g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ er ligelig kontinuerte.

Da funktionerne er ligeligt kontinuerte på ethvert kompakt interval og da de begge går mod 0 for $x \rightarrow \infty$, er de også ligeligt kontinuerte på det uendelige interval.

Opgave 4.

Find alle punkter $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^2$ som har en omegn, i hvilken ligningen

$$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2 x_2 = 1$$

éntydigt bestemmer en implicit given funktion $x_2 = f(x_1)$, som tilfredsstiller betingelsen $Df(x_1^*) = 0$.

Lad $F(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2 x_2 - 1$. Da er $D_1 F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 6x_1 x_2$ og $D_2 F(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3x_1^2$. Punktet $(0, 1)$ ligger på kurven og opfylder $D_1 F(0, 1) = 0$ og $D_2 F(0, 1) = 3 \neq 0$, så det kan bruges.

For $x_2 = tx_1$ er

$$\begin{aligned} & F(x_1, tx_1) = 0 \Leftrightarrow \\ & x_1^3 (t^3 - 3t + 1) = 1 \end{aligned}$$

Da $D_2 F = 0$ for $t = \pm 1$, kan tilfældet udelukkes. Ellers må $D_1 F = 0$. Men da vi kan antage $x_1 \neq 0$, må $x_1 = 2x_2$. Men det giver jo $3x_2^3 = -1$, altså punktet $(-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}})$ som det eneste andet punkt.

Opgave 5.

Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ være et interval. Lad $\alpha : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være strengt voksende, og lad $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuert og ikke konstant. Vis de skarpe uligheder

$$(\alpha(b) - \alpha(a))m < \int_a^b f(x) d\alpha(x) < (\alpha(b) - \alpha(a))M,$$

hvor $m = \inf f([a, b])$ og $M = \sup f([a, b])$.

Da f ikke er konstant, må den antage sin største og mindste værdi i forskellige punkter, lad x_M og x_m være eksempler herpå. Der findes en omegn, $[t_1, t_2]$, om x_m som ikke indeholder noget punkt, hvori f antager sin størsteværdi. hvor Lad M_1 være størsteværdien i dette interval, den opfylder $M_1 < M$. Vi deler nu intervallet $[a, b]$ i 3 dele. Oversummen svarende til denne inddeling

$$M(\alpha(t_1) - \alpha(a)) + M_1(\alpha(t_2) - \alpha(t_1)) + M(\alpha(b) - \alpha(t_2)) < M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

Den anden ulighed er analog.

Opgave 6.

Vis, at

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cos(y \sin t) dt = 0.$$

Substitution af $t = \arcsin u$ giver

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\cos \arcsin u)^2 \cos yu \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du &= \\ \int_0^1 \frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2}} \cos yu du &= \\ \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \cos yu du \end{aligned}$$

hvilket er en cosinustransformation, som altid konvergerer mod 0 for $y \rightarrow \infty$.

Opgave 7.

Bevis formelen

$$\frac{1}{2}(\log(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) x^n,$$

og angiv potensrækkens konvergensradius.

Vi har

$$\log(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

vi får derfor

$$(\log(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{\infty} n x^n c_n$$

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n \cdot k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n \cdot (n-k)} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

med konvergensradius 1.

Opgave 8.

I Hilbertrummet $\mathbb{R}^{\infty}$ betragtes mængden M af punkter $\underline{a}$, for hvilke $\sum n a_n^2$ er konvergent. Vis, at $\underline{a} \in M$, $\underline{b} \in M$, $k \in \mathbb{R}$ medfører $k\underline{a} \in M$ og $\underline{a} + \underline{b} \in M$. Vis, at M er overalt tæt i $\mathbb{R}^{\infty}$, og at $\underline{0}$ ikke er et indre punkt i M .

$$\begin{aligned} \sum n (a_n + b_n)^2 &\leq \sum n (a_n^2 + b_n^2 + 2|a_n b_n|) = \\ \sum n a_n^2 + \sum n b_n^2 + 2 \sum |(\sqrt{n} a_n) + (\sqrt{n} b_n)| & \\ \leq \sum n a_n^2 + \sum n b_n^2 + 2 \sqrt{\sum n a_n^2 \sum n b_n^2} \end{aligned}$$

For $\underline{a} \in \mathbb{R}^{\infty}$ og $\epsilon > 0$ findes N så $\sum_{n \geq N} a_n^2 < \epsilon^2$ Vi definerer nu $\underline{b} \in M$ ved

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{for } n < N \\ 0 & \text{for } n \geq N \end{cases}$$

Da

$$\sum (a_n - b_n)^2 = \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - b_n)^2 = \sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 \leq \epsilon^2$$

er $\text{dist}(\underline{a}, \underline{b}) < \epsilon$.

At $\underline{0}$ ikke er et indre punkt i M ses ved at definere $\underline{c}$ som

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } n \geq N \\ 0 & \text{for } n < N \end{cases}$$

Opgave 9.

Med Φ betegner vi den ved

$$\Phi f(x) = xDf(x)$$

definerede differentialoperator. Vis, at differentialligningen

$$\Phi^{op} \chi = x\chi,$$

NYE OPGAVER

Opgave 1.

Faktoriser

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$$

Opgave 2.

Hvor mange negative rødder har polynomiet

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$$

Opgave 3.

En sværm af punkter på 2 millioner ligger inden for en cirkel. Kan man altid finde en ret linie, der har 1 million punkter på hver side?

Opgave 4.

$$\sum_{k=1}^n kk!$$

hvor $p \in \mathbb{N}$, har den ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p}$$

definerede afbindning $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som løsning.

Hans lavede en fejl i denne opgave. Løsningen til differentialligningen er $f + 1$.

Ved induktion ses, at

$$\Phi^{oi}(f + 1) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^i x^n}{(n!)^p}$$

Opgaven løses af tilfældet $i = p$.

Opgave 5.

To cylindre med diameter 2 cm skærer hinanden, så symmetriakserne skærer hinanden under en ret vinkel. Find rumfanget af fællesmængden.

Opgave 6.

Vis, at et fjerdegradspolynomium, hvis 5 koefficienter er i en eller anden rækkefølge sættet $1, -2, 3, 4, -6$ altid har en rational rod.

Opgave 7.

En ligesidet trekant og en regulær sekskant har samme omkreds. Hvad er forholdet mellem deres arealer?

Opgave 8.

Vis, at i decimalsystemet vil et kvadrattal med mere end et ciffer have mindst to forskellige cifre.

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C

