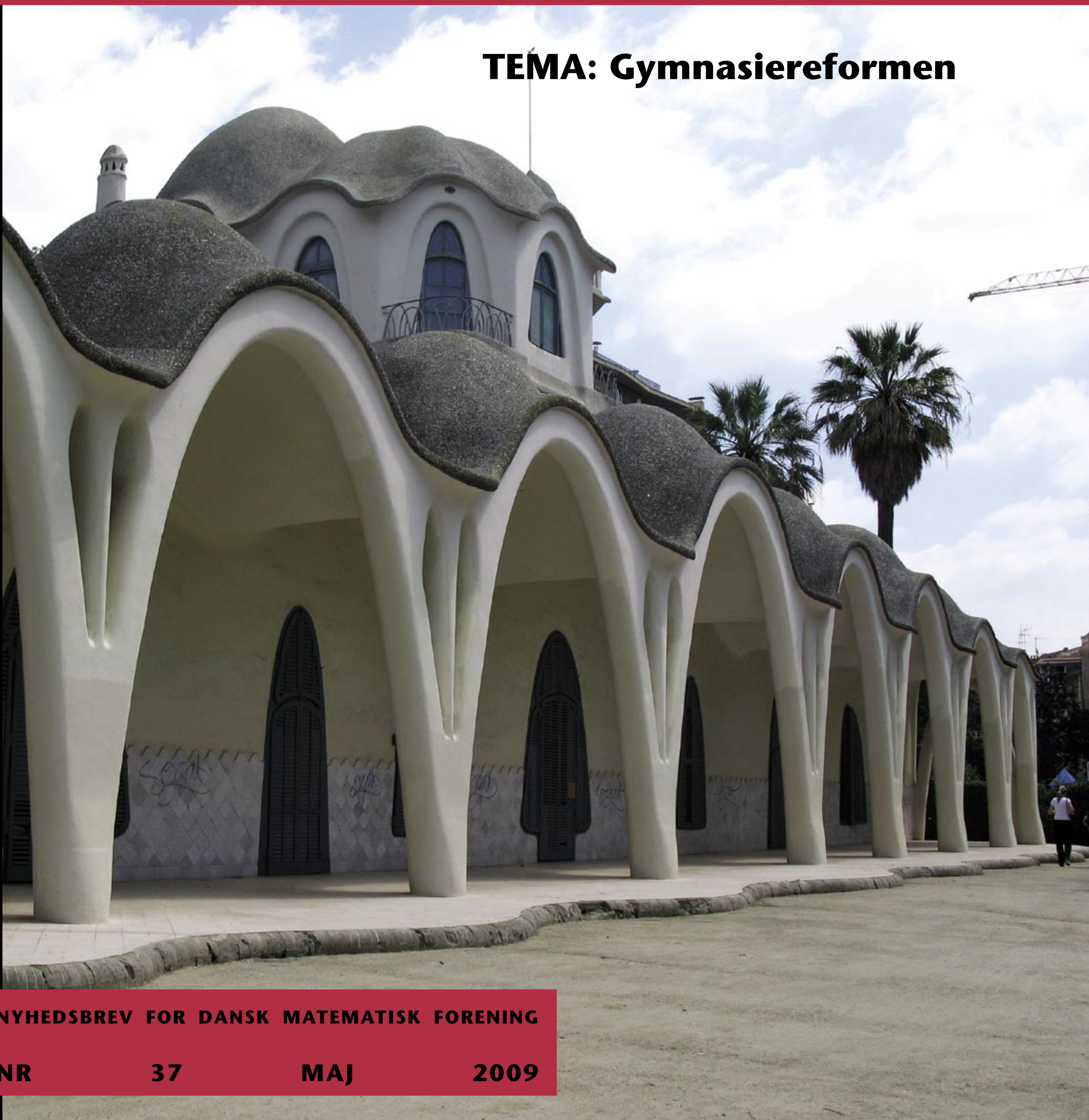
mat
MATILDE

TEMA: Gymnasiereformen



NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR 37 MAJ 2009

Leder

Af: Bent Ørsted

»*Lad z være en kompleks variabel*« - ikke sandt, for en matematiker en spændende åbning, en mulighed for mange efterfølgende skridt; lidt som når en skakspiller hører »c2-c4« som første træk og straks udvikler for sit indre øje en lang række spil med hver deres styrker og svagheder. Men man skal jo nok være matematiker/skakspiller for at få noget ud af disse åbne døre. Læg også mærke til indbydelsen, altså opfordringen til dialog (eller udfordringen til at spille med) - er der ikke tale om netop sociale størrelser? Men altså: Lad z være en kompleks variabel (hvad der ikke ligger af matematikhistorie i denne lille sætning...) som gennemløber en ellipse med centrum i 0 i den komplekse plan. Lad w være kvadratet på z (altså i den komplekse multiplikation); så vil w også gennemløbe en ellipse, dobbelt så hurtigt som z, og hvor ellipsen for w har brændpunkt i 0. Denne påstand (i en lidt anden formulering) er bevist af Isaac Newton, den store løve i matematikken - her med henblik på at forstå bevægelse i centrale kraftfelter, herunder jordens bevægelse omkring solen.

Udgivelsen af et blad som Matilde åbner også mange muligheder; Dansk Matematisk Forening har haft glæde af de mange indlæg og artikler, og redaktionen vil gerne takke for den interesse der har været. I en verden med mange medietilbud og søgemekanismer er Danmark et lille land for sådant et blad, og man kunne måske ønske sig et større »opland« (en tanke om at inddrage norsk og svensk matematik har været fremme, men har vist sig ikke at være realistisk pt. – dog har vi haft et udmærket samarbejde med det svenske matematik-tidsskrift »Utskicket« som redigeres af Ulf Persson. Dette nummer af Matilde indeholder 3 artikler fra tidsskriftet.)

Den nuværende redaktion af Matilde står overfor en fornyelse (efter flere år på posten), og vi håber at DMF fortsat vil have et Matilde på sit agenda; dansk matematik er både i gymnasiet og på læreanstalterne (hedder det stadigvæk det?) et fag på et højt niveau og af central betydning for mange uddannelser.

Gymnasiereformen er blandt temaerne i dette nummer, der indeholder betragtninger fra J. P. Touborg, S. Halse, B. Olesen, B. Felsager, F. Christensen, og C. Jensen. Desuden bringer vi en artikel af Bernt Øksendal apropos vores tidligere tema om økonomi; her kan man lære meget mere om de ligninger der beskriver dele af de finansielle markeder. Vi har også (med tak til Ulf Persson) en artikel fra den svenske debat om matematikfaget - det går faktisk ret livligt til hos vore naboer, og evt. debatindlæg til Matilde modtages gerne.

Tilbage er kun atter at takke de mange der har bidraget til at Matilde kunne udgives, specielt med tak til Jørn B. Olsson for hans utrættelige og uundværlige indsats; og forhåbentlig vil den nye redaktion og DMF fortsætte hvor vi slap.

Det sidste ord får Newton, fra en af hans notesbøger, under overskriften Questiones quædam philosophicæ, hvor han bl. a. kæmper med begrebet bevægelse set i lyset af Zenons paradoks (Achilleus der aldrig indhenter skildpadden):

That it may be known how motion is swifter or slower consider: that there is a least distance, a least progression in motion & a least degree of time......In each degree of time wherein a thing moves there will be motion or else in all those degrees put together there will be none: ....no motion is done in an instant or interval of time.

mat

Matilde – Nyhedsbrev for
Dansk Matematisk Forening
medlem af
European Mathematical Society

Nummer 37– Maj 2009

Adresse:

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø

Fax: 3532 0704
e-post:
matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Matilde udkommer 4 gange
om året

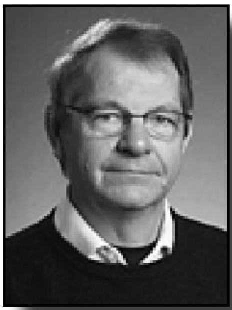
Indhold:

Forsidefoto: Viser Masia Freixa, en villa tegnet af den catalanske arkitekt Muncunill i byen Terrassa uden for Barcelona.

Parablen har fascineret mennesker i århundreder både pga. dens smukke enkle form og den ingeniørmæssige anvendelser. Omkring 1900 dukker der specielt i Katalonien mange bygninger op, der - inspireret af arkitekten Gaudi - i udpræget grad gør brug af parablen som både bærende konstruktion og designmæssigt redskab. Et studieretningsprojekt i matematik og historie kan omhandle en analyse af parablen som løsningsform til ingeniørmæssige problemer sammenholdt med en kulturel strømning som Art Nouveau eller som et meget anvendt element i katalonsk arkitektur (en signatur) og dermed i en regional selvforståelse omkring 1900.

Foto: Tafteberg Jakobsen

Matematik efter gymnasiereformen



Af Jens Peter Touborg og Søren Halse

Nu er der snart gået 4 år siden gymnasiereformen blev sat i værk. Mange kommentarer er løbet på siden da lige fra bestilte analyser fra evalueringsinstitutter til mere usystematiske hjertesuk og begejstringstilkendegivelser.

Det følgende skal handle om *matematik* efter reformen, men da der blandt grundtankerne i reformen er fagsamarbejde og faglige sammenhænge, må vi udover selve matematikundervisningen også se på AT, NV, SRP og hvad det nu alt sammen hedder.

Matematik i gymnasiet kan afsluttes på ét af tre niveauer: C, B og A.

C-niveauet afsluttes efter 1 år med en mundtlig eksamen. Sammenligner man med tiden før reformen, er det naturfagets indbyggede C-kompetence i matematik, der er parallellen. I naturfaget var samarbejdet mellem fagene så at sige indbygget. Efter reformen skal der også samarbejdes, men det kræver planlægning mellem forskellige lærere, og behovet for planlægningsmøder er i forvejen rigeligt dækket ind. Man må dog samtidig huske, at mens vi havde naturfaget, drømte mange "rene" matematiklærere sig tilbage til tiden, da faget var en selvstændig disciplin på den sproglige linje.

Er reformen et fremskridt for C-niveauet i matematik? Billedet er nok ikke klart, men man fornemmer, at mange af de elever, som vælger gymnasiets "sproglige" studieretninger, oplever, at matematik, fysik, kemi og biologi fylder meget i forhold de humanistiske fag, som er deres hovedinteresse.

Gymnasiets **B-niveau** har vist sig at være lidt af et smertensbarn. Timetal, pensum og eksamensopgaver ser egentlig meget fornuftigt ud, men alt for mange, ca. 30% opnår ikke en bestået karakter ved den skriftlige eksamen.

Eksamen indeholder stadig en del med opgaver, som skal besvares uden hjælpemidler, og det kræves stadig, at man skal kunne reducere udtryk, løse ligninger og andet elementært håndværk, selvom de øvrige opgaver stilles ud fra den forudsætning, at eleverne råder over en symbolmanipulerende grafregner.

Vi er helt enige i, at det vil være sært med matematik på B-niveau uden disse krav til elementære færdigheder, men de er svære at få opfyldt. Måske bliver der arbejdet for lidt med disse kedelige men nødvendige rutiner i folkeskolen og senere i gymnasiet derhjemme ved forberedelsen, og måske er det svært at løse opgaver uden hjælpemidler, når der ikke er kontrol. Problemet er ikke opstået med reformen, men det er altså heller ikke blevet løst af den. Måske er det ikke alment accepteret som et problem uden for matematiklærerkredse.

Også opgaverne med hjælpemidler volder problemer. Måske er to år for lidt til at opnå det fulde udbytte af så kraftigt værktøj som en symbolmanipulerende grafregner, - man kunne overveje at slække på kravene her.

A-niveauet i matematik er gymnasiereformens bud på forberedelse til de videregående uddannelser, som rummer et kraftigt islæt af matematik. Ser man på undervisningen før reformen , er behovet for justeringer klart nok. Beviserne fyldte meget i forhold til anvendelsesaspekterne. Mulighederne for at lade symbolmanipulerende værktøjer flytte fokus fra tekniske manipulationer til løsningsstrategier var ikke udnyttet godt nok, og til gengæld var prøvedelen uden hjælpemidler svulmet op til urealistiske krav til udenadslære.

Prøven uden hjælpemidler er bevaret efter reformen i en mindre målestok, men måske skulle man overveje at lade en formelsamling være tilladt ved denne del af prøven. Hvad er det egentlig, man mister ved en sådan ændring?

Vi har i en længere årrække medvirket ved undervisningen af 1. års studerende i matematik på Aarhus Universitet. Manglende beherskelse af elementære færdigheder er et tilbagevendende problem. Ikke kun fordi de studerende regner galt, men mere fordi beherskelse af elementære færdigheder er en konstituerende del af forståelsen af mere komplekse sammenhænge.

Gymnasiereformen satser ambitiøst på at styrke både bredde og dybde i fagligheden.

Vi tvivler på, at det sidste er lykkedes i en traditionel opfattelse af faglighed. Det er måske en forkert måde at tænke på, men det skal man så også have aftagerinstitutionerne til at indse.

Reformens matematikpensum indeholder en ret stor afdeling med forbindelser til statistik og sandsynlighedsregning.

Her bør der efter vores opfattelse enten skæres ned eller strammes op. Det er fint nok at tage fat på problemstillinger, som ligner den virkelige verdens, men det er ikke i orden, at man ved eksamen møder opgaver, hvor kravene til en besvarelse forekommer diffuse. I det netop udkomne nummer af LMFK-bladet (2/2009) omtaler fagkonsulent Bjørn Grøn denne problemstilling og fremsætter konstruktive forslag til justeringer af reformen på dette punkt.

Der kræves i lærerplanen for **naturvidenskabeligt grundforløb NV**, at der koordineres med matematik, hvis der undervises sideløbende heri. Meningen er, at matematiske modeller og/eller metoder skal anvendes i databehandling i NV-forløb. På grund af det begrænsede timetal og den tidlige placering på mange skoler er det meget begrænset, hvad denne koordinering kan have af reelt indhold. Det er snarere sådan, at eleverne efter behov bruger den matematik, de har lært i folkeskolen.

Hvis man på en skole ser på elevernes valg af fag til det afsluttende projekt i **almen studieforberedelse AT**, så har matematik en ydmyg placering - på vores gymnasium er der i dette skoleår i alt 5 ud af 164 elever, der har inddraget matematik.

Hvorfor er det sådan?

Vi kunne være fristet til at mene, at de synsmåder, der lægges vægt på i AT-projektet, i det store og hele er matematik uvedkommende.

Men det er dog noget anderledes tidligere i gymnasieforløbet, hvor nogle AT-forløb har karakter af almindelige flerfaglige projekter. Her er mulighederne langt bedre for, at matematik kan spille en vigtig rolle, ikke blot som værktøj i beregninger, men som en aktiv rolleindehaver i formulering og løsning af mange forskellige problemstillinger.

Med gymnasiereformen fulgte, at den større skriftlige opgave, nu kaldet **studieretningsprojektet SRP** skal skrives i mindst to fag.

Det er godt, at muligheden for at skrive i flere fag er kommet med reformen. For mange er det oplagt en fordel at bringe matematik sammen med et eller flere andre fag. En mulighed, som også blev brugt tilbagevendende i årene før reformen.

Endnu en stor fordel ville kunne opnås, hvis kravet om, at studieretningsprojektet *skal* skrives i mindst to fag blev ændret til, at studieretningsprojektet *kan* skrives i flere fag.

Med baggrund i egne erfaringer og igennem samtaler med kolleger, har vi fået det indtryk, at kvaliteten af studieretningsprojekterne ikke har vundet ved *kravet* om flerfaglighed.

Der mangler kort og godt muligheden for faglig fordybelse i et afgrænset område af matematikken, som især for en del af vores stærkere elever ville være et fremskridt.

Desuden er der et problem i, at en af pointerne med flerfagligheden risikerer at lande i et felt, hvor hverken vejledere eller censor har nogen reel kompetence til at vurdere kvaliteten af opgaven i sin helhed.

Studieretningsprojektet bør skæres ned til en uge. Afbrydelser af den daglige undervisning er der nok af, og det er tvivlsomt , om eleverne forstår at udnytte den lange periode effektivt nok.

Eleverne bør frit kunne vælge hvilket eller hvilke fag, de vil skrive i blandt studieretningsfagene og fag på A-niveau. Valget mellem ét eller flere fag ville i så fald blive afgjort af ordningens brugere: eleverne og lærerne.

Hvorfor ikke lade afgørelsen træffes der?

Den opnåede karakter i studieretningsprojektet tæller dobbelt, hvad er egentlig begrundelsen for det? Vægtningen virker ejendommelig, når man sammenligner med den almindelige arbejdsindsats i fagene på A-niveau.

Gymnasieundervisningen har stadig et dobbelt sigte: at være **almentdannende og studieforberedende**. Gymnasiereformen forsøger at tilgodese begge mål. Det almentdannende aspekt er formentlig styrket ved kravet om øget tværfagligt samarbejde og ved et styrket fokus på fagenes metode. Om det faglige niveau også er styrket er det nok for tidligt at sige noget om endnu. Det må jo blandt andet afgøres ved at registrere aftagerinstitutionernes vurdering af de nye studerendes forudsætninger efter reformen.

Vi tvivler på, at de kommende studerende vil klare sig bedre i matematikbaserede uddannelser fremover. Den hverdag, som opleves fragmenteret og den tid, som er gået fra det skriftlige hjemmearbejde vil næppe bidrage positivt. Men vi oplever i et treårigt matematikforløb rigtig mange elever, som arbejder engageret og samvittighedsfuldt, og det kan jo gøre selv de mest pessimistiske forventninger til skamme.

SRP:

Matematik i kombination humanistiske fag

Af: Brian Olesen (MA), Flemming Christensen (DA) og HF og Bjørn Felsager (MA), Haslev Gymnasium

Der er mange elever - også dygtige elever - på de matematiske studieretninger, som ikke er alt for interesserede i de naturvidenskabelige fag, men mere er fanget af de humanistiske fag: De har en klar fordel af at samarbejde med historie og dansk. Specielt i formidlingsopgaverne er det interessant at se hvordan de blomstrer op og skriver fremragende **om** matematik, selv om de fagligt set ikke altid er så stærke når det drejer sig om at skrive **i** matematik. Indlæringsmæssigt peger mange undersøgelser på, at det at sætte sig ind i et stof med henblik på at formidle det kræver den *højeste* grad af forståelse …. af - i dette tilfælde - det matematiske stof. En af de ledende formidlere ved den netop åbnede Darwin-udstilling på Zoologisk museum i København fremhæver således netop at man kun kan formidle et stof, når man har forstået det bunds.

Matematik kan lære meget af samarbejdet (og forhåbentligt omvendt). De humanistiske fag kan komme til at spille en vigtig rolle i samarbejdet om studieretningsprojekter og AT via tekstlæsningsmetoder, analysemodeller og formidlingsskrivning. Dansk har rigtig meget at byde på, når det drejer sig om formidlingsopgaver: en kvalificeret og anvendelig forståelse af den kommunikationssituation formidlingen indgår i, falder centralt i fagets kerneområde … og bliver kun endnu bedre af at det er (måske) kommende specialister inden for naturvidenskab, der her meget tidligt oparbejder deres helt nødvendige formidlingskompetencer jf. forskningsministeriets pjece "Forsk og fortæl". Forhåbentligt kunne det smitte af ikke bare på den skriftlige matematik, men også på den mundtlige dimension, så ikke kun det rent faglige kommer i fokus men også andre aspekter. Historie kan bidrage med et historisk perspektiv, som også ville være interessant at få integreret i matematikundervisningen. De fleste elever mangler f.eks. fornemmelse for hvordan matematikken er udviklet fra at være geometrisk domineret til at være algebraisk domineret. Og også for hvordan den dominerende undervisning i den rent teoretiske tilgang til matematikken skævvrider billedet af, hvordan matematikken rent faktisk udvikler sig.

Erfaringerne med f.eks. studieretningsprojekterne og AT-eksaminerne (hvor det sidste er meget sparsomt) viser, at vi trænger til flere brugbare historiske kilder på dansk, f.eks. Galilei-tekster. Vi trænger desuden til analysemetoder, både matematiske og humanistiske metoder, der kan støtte elevernes forståelse af de ofte svært tilgængelige tekster. Her kunne man overveje at inddrage en styrkelse af opmærksomheden for og forståelsen af centrale faglige begreber gennem et systematisk arbejde med conceptmapping-programmer.

På Haslev Gymnasium har vi i år 34 elever på studieretningen med MA-A, FY-B og KE-B. Af disse har fem elever kombineret deres SRP med dansk og 14 med historie, hvor topscoreren er matematik og historie. Det har været interessant – og helt uproblematisk – i år at vejlede elever i at skrive med dansk ud fra Bjørn Grøn og Susan Moses model på en formidlingsopgave. De to fagkonsulenter for hhv. matematik og dansk udarbejdede i efteråret 2007 en model, hvor eleven skulle skrive en artikel til et populærvidenskabeligt tidsskrift. Det har givet nogle besvarelser, hvor det er tydeligt at eleverne har tænkt på formidling

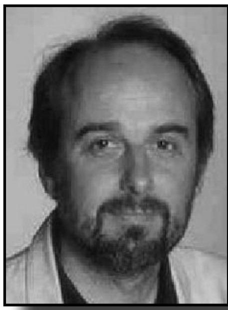
med de

ikke kun koblet til den artikel de skulle skrive, men også til det teoretiske afsnit, der knytter sig til artiklen (matematik, fysik eller kemi).

Det er vores oplevelse, at det i år sammenlignet med sidste år, har været noget lettere sammen med censor at vurdere opgaverne og nå frem til enighed om en karakter. Det har i de fleste tilfælde været dansk- eller historievejlederen, der har skullet tale med en censor med enten matematik, kemi eller fysik som fag. Der har været enighed om kriterierne for vurdering af opgaverne samt niveau for indfrielse af disse (taksonomi) knyttet til den karakter, der skulle gives. Samtidigt har der være respekt for og enighed om betydningen af at et fag indgår som 2. fag (dansk og historie), når der har været stor forskel mellem de to fag.

Med tilladelse fra elev og rektor stiller vi en opgaveformulering og -besvarelse til rådighed på webadresse: http://www.haslev-gym.dk/SRP2009.htm. Eleven har redegjort for det polyalfabetiske kryptosystem knyttet til Enigma og skrevet en artikel til et populærvidenskabeligt tidsskrift samt redegjort for overvejelserne knyttet til opbygningen af artiklen.

Vores dansk-kollega Flemming Christensen har udarbejdet en pjece, som fagkonsulenten for dansk har godkendt. Pjecen er ligeledes stillet til rådighed på web-adressen.



Af: Claus Jensen
Rektor, Faaborg Gymnasium
email: Claus.Jensen@skolekom.dk
Tidl. fagkonsulent i dansk og bl.a. forfatter til bogen "Challenger - et teknisk uheld"

Lægmandsbetragtninger

Jeg har ikke svært ved at forstå, at man som matematiklærer kan ønske sig en stor opgave, hvor ens dygtige elever kan fordybe sig i det rene matematikfag for fagets egen skyld. Drømmen om den rensede abstraktion - det krystallinsk, ubesmittede fag. Sådan er der bestemt også dansklærere, som har det. I vores sammenhæng hedder diskussionen, at dansk hverken kan, skal eller vil nedlade sig til at være 'redskabsfag'. Men hver gang, der rutinemæssigt rynkes på næsen af den tanke, at indsigter, metoder eller håndværk fra mit fag skal kunne bruges frugtbart i faglige samspil med andre fag, har jeg i mit stille sind trøstet mig ved at tænke på matematikfaget.

Først og fremmest har jeres fag en enestående og indiskutabel position i både det danske og alle andre landes skolesystem. Og dette samtidig med, og på trods af, at matematik er det ultimative, og for mange fag helt uundværlige, redskabsfag. Man taler endda højstemt om matematik som *'the language of science'*, og man hævder - sikkert med rette - at samfundsfag A aldrig kan blive et rigtigt A-niveau uden matematikforståelse på et relativt avanceret niveau. Og hvor var klimadiskussionen uden kritisk forståelse for klimamodeller?

Altså kan man åbenbart godt være redskabsfag uden at der slås skår i et fags uantastelige position, siger jeg til mig selv. Måske endda på en måde, så det ligefrem står klart, at andre fag ville være skygger af sig selv uden kvalificerende bistand fra redskabsfaget.

Jeg synes, at I skulle benytte studieretningsgymnasiet til at komme markant på banen og ved enhver lejlighed demonstrere for elever og offentlighed, hvor afgørende og uundværlig matematisk stringens og tankegang er for alle tilgrænsende fag og for en lang række aktuelle, samfundsmæssige problemstillinger. Som vi siger i skrivepædagogikken: *Show it – don't tell it!* Og jeg kan i øvrigt slet ikke opfatte det som urimeligt – efter de mange kræfter vi i det nye gymnasium bruger på at skabe meningsfulde faglige samspil – at vi beder eleverne om at demonstrere i deres SRP, at de kan kombinere indsigter fra to, ofte nærtbeslægtede fag. (men for min skyld må man godt rydde ud i de mere særprægede eller rent ud søgte fagkombinationer)

Selvfølgelig kan det altid opfattes som et fald i platonisk forstand, fra den rene luft i ideernes verden ned til de mere grumsede omstændigheder blandt alverdens fænomener, men man kunne vel også sige, at man netop ved at demonstrere, hvordan abstraktion, systematik og logik kan gennemlyse en jordisk problemstilling, havde vist, hvad matematikken virkelig kan.

Årsberetning 2008

Den Danske Nationalkomite for Matematik

Af: Christian Berg, formand

Nationalkomiteen er bindeleddet mellem dansk matematik og Den Internationale Matematiske Union (IMU), og den orienterer Dansk Matematisk Forenings medlemmer gennem medlemsbladet MATILDE.

Nationalkomiteen har nu en hjemmeside http://nationalkomite.mathematics.dk/med link fra DMF.

Nationalkomiteens sammensætning er uændret siden sidste år, idet Christian Berg, Mikael Rørdam og Michael Sørensen er genvalgt for perioden 2008-2012.

I 2008 er Columbia blevet optaget som medlem af IMU i gruppe I og Norge er rykket op fra gruppe II til III. Endvidere er Kenya blevet associeret medlem, hvilket betyder Kenya får information om arbejdet i IMU uden at betale kontingent og uden at have stemmeret.

IMU arbejder på planlægningen af ICM (International Congress of Mathematicians) 2010 i Hyderabad i Indien, se http://www.icm2010.org.in og postere kan findes på adressen

http://www.mathunion.org/activities/icm/icm-2010/poster/.

Henrik W. Lenstra er udpeget som formand for programkomiteen, som skal udvælge talere i de forskellige videnskabelige sektioner. IMU's nomineringskomite, der har til opgave at forberede valgene ved IMU's generalforsamling i Bangalore August 2010 umiddelbart før ICM, består af IMU-præsident Laszlo Lovasz og den af ham valgte formand David Mumford. Derudover er udvalgt 3 medlemmer ved lodtrækning blandt forslag indsendt fra medlemslandene. Fra lande i gruppe I og II blev Anthony Afuwape fra Nigeria valgt, fra lande i gruppe III og IV blev Ian Sloan fra Australien valgt og endelig blev Nigel Hitchin fra England valgt som repræsentant fra gruppe V lande.

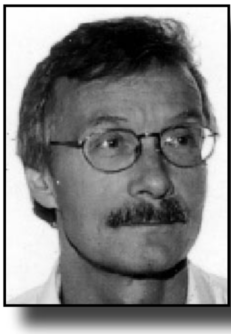
Fra Danmark (gruppe II) havde vi i nationalkomiteen foreslået Mikael Rørdam, som desværre ikke blev valgt.

Der foreligger 3 forslag til afholdelse af ICM2014
- Montreal, Canada
- Rio de Janeiro, Brazil
- Seoul, Republic of Korea

Den formelle beslutning om stedet tages på generalforsamlingen i 2010.

Mathematics and Finance:

The Black-Scholes Option Pricing Formula and Beyond



Af: Bernt Øksendal
Universitetet i Oslo
email:oksendal@math.uio.no

Invited paper for
"Matilde", Danish Mathematical Society

1 Introduction

There was a time when finance was completely without interest from a mathematical point of view. The mathematical content in finance was – at best – elementary and uninteresting. Today the situation is completely different. All companies which are dealing with finance on a large scale are using advanced mathematical methods. Financial experts are studying mathematics and mathematics researchers are studying finance. Almost every university now has a special program on mathematical finance.

There are several reasons for this new situation. The main reason is the construction and development of *stochastic analysis*: About 60 years ago mathematicians started to combine classical mathematical analysis (integrals, derivatives ...) with modern probability theory, developed by Kolmogorov in the 1930's. N. Wiener gave a rigorous construction of Brownian motion (the wiener process) and P. Lévy explored many essential features of this and other stochastic processes. K. Itô constructed the *stochastic integral*, later coined the Itô integral, and started seminal research about the properties of this and related concepts. J. Doob introduced and studied the concept of *martingales*, and together with P.-A. Meyer and others they founded the modern theory of semimartingales. In the first 20 years this research was purely mathematical. Then around 1970 it was disovered by H.P. McKean, P. Samuelsen and others that this new mathematical theory of stochastic analysis could be useful in finance. The final breakthrough came in 1973 when M. Scholes and F. Black published their celebrated *option pricing formula*. This theoretical price formula was based on advanced stochastic analysis, and agreed well with the price that had been established (by trial and failure) through trading on the option market, which had existed for some years already. In 1997 M. Scholes, together with R. Merton who also played an essential role in the option pricing formula and in addition made other fundamental contributions, were awarded the Nobel Prize in Economics for their achievements. (F. Black died in 1995.)

After the Black-Scholes formula was published there has been an enormous research activity within mathematical finance, and it shows no sign of slowing down. We will not attempt to give a comprehensive account of this activity here. But we will try to illustrate the interplay between mathematics and finance by looking at some themes in more detail.

In Section 2 we consider the simplest possible financial market with one risky asset and only two possible scenarios. We show that even in this simple case the option pricing question is nontrivial and requires a subtle equilibrium argument.

In Section 3 we extend the model to the multi-period case.

In Section 4 we explain the more realistic *time-continuous*, Brownian motion based market model setting of the Black-Scholes formula. Even this model is highly stylized compared to real financial markets, but nevertheless it catches some essential aspects of pricing of European options and related issues.

However, as the current financial crisis shows, the established mathematical models, albeit highly advanced, are still inadequate for a satisfactory understanding and handling of real-life financial markets. In particular, it has been pointed out that more emphasis should be put on the possibility of *discontinuities* or *jumps* ("cracks") in the market. There is a tractable mathematical machinery for handling this, namely the stochastic calculus driven by general *Lévy processes*, not just Brownian motion. This leads to models where stock prices may have jumps, which is more realistic than continuous models. On the other hand, such models are mathematically challenging. In Section 5 we discuss this more.

Finally, in Sections 6–8 we present other recent developments which represent research frontiers in mathematical finance today.

2 The Black-Scholes option pricing formula

Consider the following 1-period financial market with two investment possibilities:

[1]Centre of Mathematics for Applications (CMA), Dept of Mathematics, University of Oslo, P.O. Box 1053 Blindern, N–0316 Oslo, Norway. E-mail: oksendal@math.uio.no

[2]Norwegian School of Economics and Business Administration (NHH), Helleveien 30, N–5045 Bergen, Norway.

(i) We can buy *risk free assets* (e.g. *bonds*) with a fixed interest rate $r \geq 0$. For simplicity we here assume that $r = 0$.

(ii) We can buy *risky assets* (e.g. *stocks*). Let us denote the price of one stock at time t by $S(t)$, where $t = 0$ or $t = T > 0$. Assume that $\underline{\underline{S(0) = 100}}$ units, e.g. Danish Crowns (DKK). The price $S(T)$ at the future time T is uncertain at time $t = 0$. We assume that there are only two possible scenarios:

Scenario 1: The price goes *up* to *DKK 115* at time T. We assume that the probability p that this occurs is $\frac{1}{2}$. In other words, P (Scenario 1) $= p = \frac{1}{2}$, where P stands for "probability".

Scenario 2: The price goes *down* to *DKK 95* at time T. The probability $1 - p$ that this occurs is also $\frac{1}{2}$. So we have P (Scenario 2) $= 1 - p = \frac{1}{2}$.

A *European call option* in this market is a contract which gives the buyer of the contract the right – but not the obligation – to buy one stock at the specified future time T and at a specified price K, usually called the *exercise price*. In this example we assume that $\underline{\underline{K = \text{DKK } 105}}$. See Figure 1.

The question is:

What is the "right" price to pay for such a contract/option at time 0?

The answer depends of course on what we mean by "right" price. Some people will say that the right price should be the *expected payoff* at time T. So let us compute this:

Scenario 1: If the price goes up to DKK 115, then the buyer of the option can buy one stock for DKK 105, sell it again for DKK 115 and thus get a payoff of DKK$(115 - 105) =$ DKK 10. This happens with probability $p = \frac{1}{2}$.

Scenario 2: If the price goes down to DKK 95, then the buyer will not exercise the option and the payoff is 0. This also happens with probability $\frac{1}{2}$ $(= 1 - p)$.

We conclude that the *expected payoff* (wth respect to the probability law P) for the buyer is

$$E_P[\text{payoff}] = 10 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 \cdot \tfrac{1}{2} = \underline{\underline{5}}\ (\text{DKK}). \qquad (2.1)$$

(E_P denotes expectation with respect to P). Is this the right price to pay for the option at time 0? Perhaps surprisingly, the answer is *no*, if "right" price is interpreted in an *equilibrium sense*. By this we mean the following:

An *arbitrage* in this market is an investment policy at time 0 which at time T gives a (strictly) positive profit with a (strictly) positive probability and a (strictly negative profit with probability 0. Thus an arbitrage is a kind of "money machine", also called a "free lunch". There is no chance for a loss, and a positive chance for a positive profit. It is a basic equilibrium criterion for a financial market that *arbitrages cannot exist*. If a market had an arbitrage, then everybody would use it and the market would collapse. In view of this, we choose to define the "right" price of an option as the price which does not lead to an arbitrage for buyer or seller.

We claim that *the expected payoff price DKK 5 found earlier gives an arbitrage opportunity to the seller of the option*. Here is how:

If the seller receives DKK 5 at time 0 for the option, she can borrow DKK 95 in the bank and use the total amount, DKK 100, to buy one stock. This stock she keeps till time T and then she sells it. There are now to possibilities:

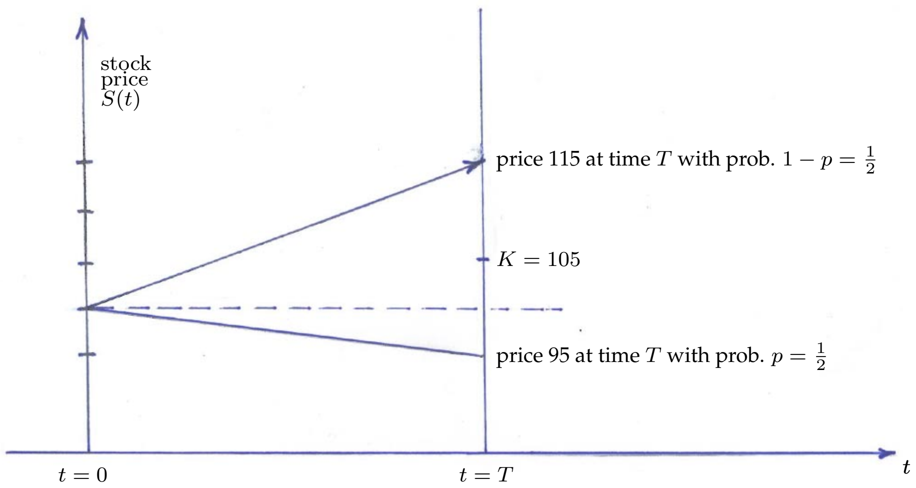


Figure 1

In Scenario 1 she receives DKK 115 for the stock. With this amount she can pay back the loan to the bank (DKK 95) and she can pay the buyer of the option the promised payoff, DKK 10. This leaves her with a *profit of DKK 10*.

In Scenario 2 she receives DKK 95 for the stock. This is exactly enough to pay back the bank. In this scenario there is nothing to pay to the owner of the option. Thus in this case the *profit (and the loss) is 0*.

We see that with this strategy the seller cannot lose money, and there is a positive probability for a positive profit. Hence paying DKK for the option leads to an *arbitrage for the seller*.

We conclude that, by such an equilibrium requirement, the price DKK 5 is too high.

What, then, is the non-arbitrage price of this option?

A fundamental part of the Black-Scholes option pricing formula states that the non-arbitrage price is given by the expected (and, in general, discounted, but here we have assumed $r = 0$) payoff *with respect to the risk neutral probability measure* Q, not with respect to P. Thus, in our case,

$$\text{price}_{\text{BS}} = E_Q[\text{payoff}] = 10 \cdot q + 0 \cdot (1 - q), \tag{2.2}$$

where $q = Q$ (Scenario 1), i.e. the Q-probability that Scenario 1 occurs.

How do we find this risk neutral probability measure Q?

According to Black-Scholes the measure Q is characterized by the property that the (discounted) stock price is a *martingale* with respect to it. In our setting this simply means that

$$E_Q[S(T)] = S(0), \tag{2.3}$$

where $S(t)$ is the stock price at time $t = 0, T$. This gives the equation

$$115 \cdot q + 95 \cdot (1 - q) = 100,$$

from which we get $q = \frac{1}{4}$. Therefore, according to (2.2) the right price for this option is

$$\text{price}_{\text{BS}} = 10 \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot \tfrac{3}{4} = \underline{\underline{2.50}}\ \text{(DKK)}. \tag{2.4}$$

More generally, if the interest rate in the bank is $r \geq 0$ and the exercise price at time T is $K > 0$, then the Black-Scholes option pricing formula states that the arbitrage free price for the option is

$$\text{price}_{\text{BS}} = E_Q\big[e^{-rT}(S(T) - K)^+\big], \tag{2.5}$$

where

$$(S(T) - K)^+ = \max\{S(T) - K, 0\}$$

and Q is the *risk neutral* probability measure, characterized by the property that the *discounted* stock price, $e^{-rt}S(t)$, is a *martingale* with respect to Q. In our 1-period market this simply means that

$$E_Q\big[e^{-rT}S(T)\big] = S(0). \tag{2.6}$$

The above example is too simple to be realistic, but nevertheless we have seen that it contains several essential features of real life financial markets. As another illustration of this, let us consider the more general situation where the probability p of Scenario 1 is not $\frac{1}{2}$, but some unknown number between 0 and 1. What can we say about the option price then? Note that *the risk neutral measure Q defined by equation (2.6) does not depend on* p. Therefore q is still $\frac{1}{4}$ and formula (2.5) gives *the same price 2.50 DKK. This shows that to decide the option price at* $t = 0$ *it is not necessary to know the probability* p *of Scenario 1*. This result is a useful (and perhaps surprising) consequence of the model. It turns out to remain true in the more elaborate (and realistic) models discussed in the next sections.

3 Multi-period models

A natural first extension of the model in Section 2 is the multi-period model, where trading takes place at specified times t_i, $0 \leq i \leq N - 1$, where

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_N = T.$$

At each trading time t_i the agent has to decide how many stocks, say $\varphi_1(t_i)$, to keep and how many bonds, say $\varphi_0(t_i)$ to keep. However, such a choice cannot be made arbitrarily and freely. It is necessary to put constraints of such a *trading strategy* (or *portfolio*) $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t))$.

(i) First of all, it must be *self-financing*, in the sense that if we decide to, say, buy stocks at time t_i, then we must borrow the corresponding amount in the bank. The precise mathematical way of expressing this is the following: Let

$$V(t) = \varphi_0(t)S_0(t) + \varphi_1(t)S_0(t), \tag{3.1}$$

be the *value* of the portfolio at time t, where $S_0(t)$ and $S(t)$ are the unit prices of the risk free and risky asset, respectively. Then the increase

$$\Delta V(t_i) = V(t_{i+1}) - V(t_i)$$

of the value right after transaction has taken place at time t_i should be coming from the increase of prices only, i.e. we should have

$$\Delta V(t_i) = \varphi_0(t_i)\Delta S_0(t_i) + \varphi_1(t_i)\Delta S_1(t_i) \tag{3.2}$$

where

$$\Delta S_k(t_i) = S_k(t_{i+1}) - S_k(t_i); \qquad k = 0, 1,\ i = 0, \ldots, N-1.$$

Condition (3.2) is called the *self-financing condition*. It is expressing mathematically that no money is coming into the system or going out of the system.

(ii) Second, the portfolio decision $\varphi(t_i)$ at time t_i must be based on the observed prices up to and including that time, and not on any future asset prices. Mathematically this is expressed by requiring the portfolio choice $\varphi(t_i)$ (as a random variable) to be *measurable with respect to the* σ*-algebra* $\mathcal{F}_{t_i}$ generated by *the previous asset prices* $S_0(s), S_1(s); 0 \leq s \leq t_i$.

If we assume, as in Section 2, that

$$S_0(t) = e^{rt} \qquad (r \geq 0 \text{ constant}), \tag{3.3}$$

then the *martingale condition* corresponding to (2.6) for a *risk neutral measure* Q becomes

$$E_Q\left[e^{-rt_{i+1}} S_1(t_{i+1}) | \mathcal{F}_{t_i}\right] = e^{-rt_i} S_1(t_i); \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3.4}$$

where $E_Q[\cdot|\mathcal{F}_{t_i}]$ denotes conditional expectation with respect to the σ-algebra $\mathcal{F}_{t_i}$.

An *arbitrage* in this market is a portfolio $\varphi(t)$ satisfying (i) and (ii) and such that the corresponding value process

$$V^\varphi(t) = \varphi(t) \cdot S(t) = \varphi_0(t) S_0(t) + \varphi_1(t) S(t)$$

satisfies

$$V^\varphi(0) = 0, \quad V^\varphi(T) \geq 0 \quad \text{a.s.} \quad \text{and} \quad P[V^\varphi(T) > 0] > 0, \tag{3.5}$$

where, as before, P denote s probability and a.s. means "almost surely", i.e. with probability 1. This is in agreement with the arbitrage concept we discussed in Section 2.

One can now prove that such a market is arbitrage free if and only if there exists (at least one) risk neutral measure Q. This result is sometimes called *the first fundamental theorem of asset pricing*. See e.g. [S].

If such a risk neutral measure Q exists, then the price

$$\text{price}_{\text{BS}} := E_Q[e^{-rT}(S_1(T) - K)^+] \tag{3.6}$$

will be an arbitrage free option price of the corresponding European call option.

This multi-period market is called *complete* if for every $\mathcal{F}_T$-measurable random variable F there exists an initial wealth $x \in \mathbb{R}$ and a portfolio $\varphi(t)$ satisfying (i) and (ii) such that

$$F = V_x^\varphi = x + \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(t_i) \cdot \Delta S(t_i) \quad \text{a.s.} \tag{3.7}$$

In other words, we should be able to reproduce (*replicate*) any given terminal "payoff" F by choosing the initial wealth x (constant) and the portfolio φ suitably. The *second fundamental theorem of asset pricing* states that *a given arbitrage-free market is complete if and only if there is only one risk neutral measure Q*.

If this is the case there is *only one* arbitrage-free price price_{BS}, namely the one given by (3.6). See e.g. [S].

4 Continuous models

The next step in the progression towards more realistic mathematical financial models is to introduce time-continuous markets, where asset prices change all the time (not just at prescribed discrete times t_i) and trading is allowed to take place continuously in $[0, T]$. In this setting the most basic model for the stock price $S(t)$ at time t is the equation

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = S_1(t)[\alpha + \sigma \text{ "noise"}]; \qquad S(0) > 0. \tag{4.1}$$

where α and $\sigma \neq 0$ are constants and "noise" represents the uncertainty of the price dynamics. If "noise" is interpreted as "white noise", then in a weak sense we have

$$\text{"noise"} = \frac{\text{"}dB(t)\text{"}}{dt} \tag{4.2}$$

where $B(t)$ is Brownian motion (the Wiener process) at time t. The rigorous interpretation of (4.1) is then that $S(t)$ satisfies the stochastic integral equation

$$S_1(t) = S_1(0) + \int_0^t \alpha S(s) ds + \int_0^t \sigma S(s) dB(s), \tag{4.3}$$

or – in differential form (shorthand notation) –

$$dS_1(t) = \alpha S_1(t) dt + \sigma S_1(t) dB(t); \qquad S(0) > 0. \tag{4.4}$$

The last integral on the right hand side of (4.3) is the famous *Itô inegral* mentioned earlier.

Using the *Itô formula*, which is a stochastic chain rule, one can prove that the solution of (4.3) is

$$S_1(t) = S_1(0) \exp((\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)); \qquad t \geq 0. \tag{4.5}$$

(See e.g. [Ø].)

The market $(S_0(t), S_1(t))$ with $S_0(t) = e^{rt}$ and $S(t)$ given by (4.5) is called the *Black-Scholes market*, because this was the market in which Black and Scholes proved their option pricing formula [BS]. Basically one can now transform the argument and formulas of the previous sections to this situation and obtain analogous results.

For example, the *value process* $V^\varphi(t)$ corresponding to a portfolio φ is defined by

$$V^\varphi(t) = \varphi(t) \cdot S(t); \qquad t \in [0, T]. \tag{4.6}$$

The portfolio is called *self-financing* if

$$dV^\varphi(t) = \varphi(t) \cdot dS(t). \tag{4.7}$$

A probability measure Q is called *risk neutral* if the discounted price process $e^{-rt}S_1(t)$ is a *Q-martingale*, i.e.

$$E_Q[e^{-rs}S_1(s)|\mathcal{F}_t] = e^{-rt}S_1(t) \quad \text{for all } s \geq t. \tag{4.8}$$

If there exists a risk neutral measure Q, then the market has no arbitrage. (But the converse is not true in this continuous time model. See [DS].)

If there is only one risk neutral measure Q, then the market is *complete*, in the sense that every bounded $\mathcal{F}_T$-measurable random variable F can be replicated, i.e. written as

$$F = x + \int_0^T \varphi(t) dS(t) \tag{4.9}$$

for some $x \in \mathbb{R}$ and some (admissible) portfolio φ. (We are neglecting some technical conditions here.)

One can show that this Black-Scholes market is indeed complete. Thus there is exactly one risk neutral probability measure Q, and the unique non-arbitrage price $\text{price}_{\text{BS}}(F)$ at $t = 0$ of a contract which pays F at time T is

$$\text{price}_{\text{BS}}(F) = E_Q[e^{-rT}F]. \tag{4.10}$$

5 Models with jumps

Finally we discuss more recent developments, where the possibility of jumps are introduced. A natural – and at the same time mathematical tractable – way of doing this is to add a jump term in the stock price model as follows:

$$dS_1(t) = S_1(t^-)\Big[\alpha dt + \sigma dB(t) + \gamma \int_{\mathbb{R}_0} z\tilde{N}(dt,dz)\Big] \quad (5.1)$$

where α, σ and γ are constants and

$$\tilde{N}(dt,dz) = N(dt,dz) - \nu(dz)dt. \quad (5.2)$$

Here $N([0,t],U)$ is the number of jumps of a given underlying Lévy process $\eta(s)$ at times s up time t with jump size $\Delta\eta(s) := \eta(s) - \eta(s^-) \in U$, U being a Borel set in $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, with closure $\bar{U} \subset \mathbb{R}_0$. And $\nu(U) := E[N([0,1],U)]$ is the Lévy measure of η. Intuitively, one can regard (5.1) as another interpretation of (4.1), but now with "noise" represented by

$$\text{"noise"} = \frac{\text{"}d\eta(t)\text{"}}{dt}, \quad (5.3)$$

where $\eta(t)$ is the given Lévy process.

There is a corresponding Itô formula for stochastic differential equations of the form (5.1), and using this one can prove that if $\gamma z \geq -1$ for a.a. z with respect to ν, then

$$S_1(t) = S_1(0)\exp\Big(\Big(\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\{\ln(1+\gamma z) - \gamma z\}\nu(dz)\Big)t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}\ln(1+\gamma z)\tilde{N}(ds,dz)\Big); \qquad 0 \leq t \leq T \quad (5.4)$$

See e.g. [ØS], Chapter 1.

Thus we see that also in this case $S_1(t)$ behaves like a "distorted" exponential function, but now it might jump (in either direction) at any time t. (The condition $\gamma z \geq -1$ prevents it from jumping to a negative value.)

In contrast to the (continuous) Black-Scholes market in Section 4, the market $(S_0(t), S_1(t))$ with $S_1(t)$ given by (5.4) is typically *incomplete*. This means that there are several (in fact infinitely many) risk neutral measures Q. If we let $\mathcal{M}$ denote the family of all risk neutral measures, then

$$\text{price}_{\text{buyer}} := \inf_{Q\in\mathcal{M}} E_Q[e^{-rT}F] \quad (5.5)$$

and

$$\text{price}_{\text{seller}} := \sup_{Q\in\mathcal{M}} E_Q[e^{-rT}F] \quad (5.6)$$

is called the *buyer's* and the *seller's* price, respectively, at time 0 of a contract which pays the random ($\mathcal{F}_T$-measurable) amount F at time T. Any price in the interval

$$[\text{price}_{\text{buyer}}, \text{price}_{\text{seller}}]$$

will be a non-arbitrage price. Therefore this interval is called the *non-arbitrage interval*. Note that in this situation an arbitrage-free price is no longer unique, and additional coniderations are required to determine the price. Since we all believe that real markets are incomplete, the jump models appear to be better suited to handle realistic situations. But they are also more complicated mathematically.

6 Market friction

So far we have assumed that all transactions can be carried out immediately, without any costs or delays. In real financial markets this is not the case. Usually there are *transaction costs* of several types involved. For example, one may have costs which are *proportional* to the volume traded. When modeling such situations mathematically one is led to using *singular* stochastic control theory. Another example of a transaction cost type is a *fixed cost* to be paid for any transaction, no matter how big or small. To deal with such situations one would use *impulse control theory*. See [ØS] for more information.

7 Asymmetric information

All the mathematical models we have discussed so far have assume that all agents involved have access to the same information, namely the information that can be obtained by observing the market prices up to the present moment. This is only an approximation of the real situation. For example, many traders in the financial only know *some* of the previous market values, not all of them. Or they get access to the information with some time delay. In these cases the trader only has *partial information* to her disposal when making the decisions. Another example is when the agent has (legal or illegal) access to information about the *future* value of some financial asset. In this case the agent is called an *insider*.

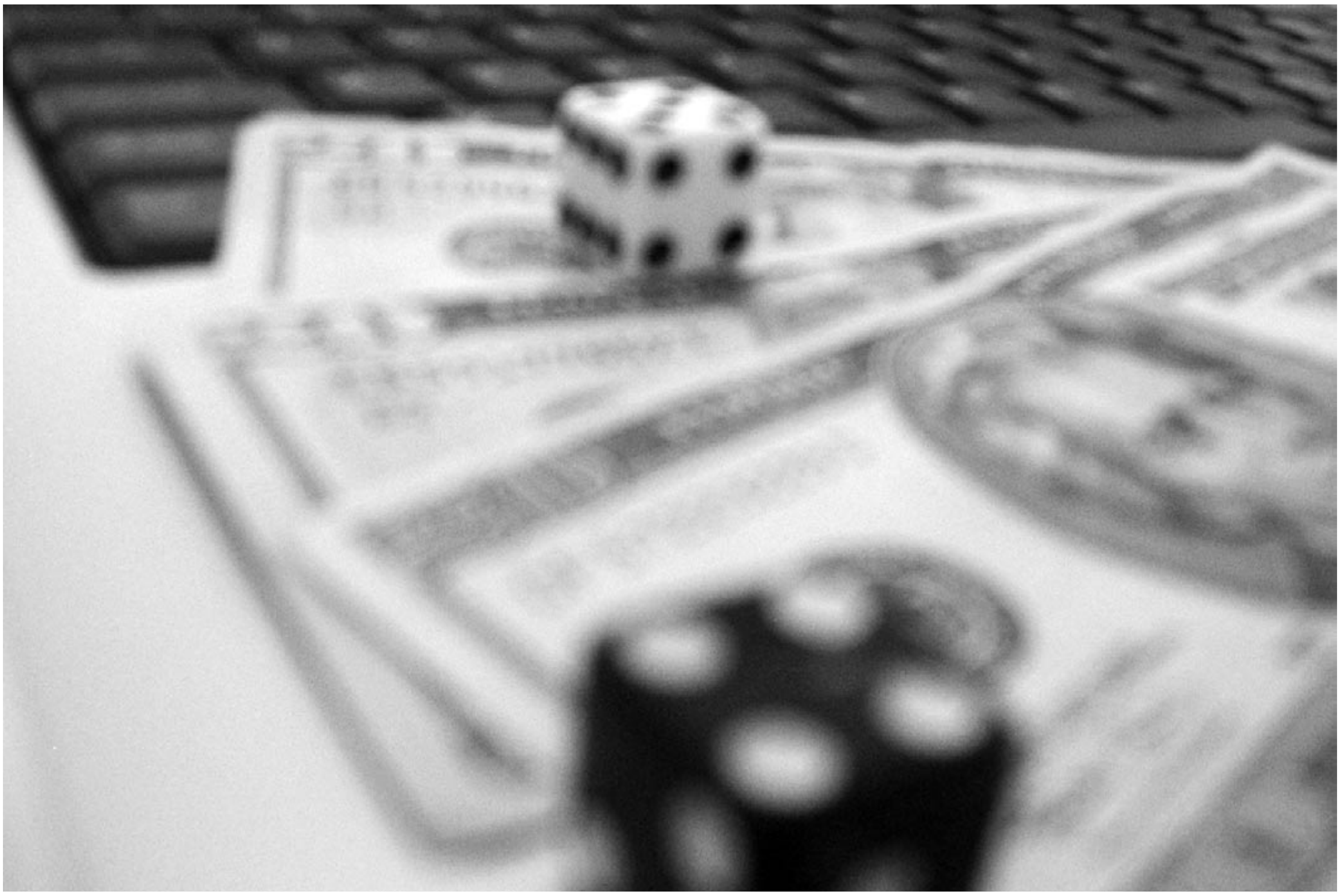
Dealing with the mathematical modeling of financial markets with partial and/or inside information represents a big mathematical challenge. One has to work with *anticipative stochastic calculus and Malliavin calculus* to deal with such issues. See e.g. [DØP] and the references therein.

8 Risk measures

An axiomatic construction of *risk measures* first appeared about 10 years ago, and it was subsequently extended to what we today call *convex risk measures*. Intuitively, the *risk* $\rho(F)$ of a financial standing F, is the amount we have to add to F to make the standing "acceptable". If we formulate this rigorously, we arrive at a set of axioms that the risk measure ρ should satisfy. In particular, it should be *convex*, i.e.

$$\rho(\lambda F + (1-\lambda)G) \leq \lambda\rho(F) + (1-\lambda)\rho(G)$$

for all financial standings F, G and all numbers $\lambda \in (0,1)$. Intuitively this means that *the risk is reduced by diversification*. Surprisingly, this crucial property does *not* hold for



the traditional and most commonly used risk model so far, namely the *value at risk* (VaR). Therefore one should abandon the VaR as a measure of risk and start using convex risk measures instead. When using mathematics to minimize the risk in this setting, one is faced with challenging problems in *stochastic differential game theory* and stochastic control of *forward-backward* stochastic differential equations. See e.g. [MØ], [ØS2], [ØS3].

9 Summary

We have tried to give a glimpse of the short – but highly successful – history of mathematical finance, from the Black-Scholes formula in 1973 to the most recent research developments of today. A striking feature is the fruitful interplay between financial concepts and the corresponding stochastic analysis machinery.

The current financial crises has many reasons. What seems clear in any case, is that there is a need for better understanding of how the financial markets work. To achieve this, it is necessary to continue and enhance the research activity within mathematics and finance and the interplay between the two.

References

[BS] F. Black and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities. J. Political Economy 81 (1973).

[CT] R. Cont and P. Tankov: Financial Modelling With Jump Processes. Chapman & Hall/CRC 2004.

[DØP] G. Di Nunno, B. Øksendal and F. Proske: Malliavin Calculus for Lévy Processes and Applications to Finance. Springer 2009.

[DS] F. Delbaen and W. Schachermayer: The Mathematics of Arbitrage. Springer 2008.

[Ø] B. Øksendal: Stochastic Differential Equations. 6th Edition. Springer 2003.

[ØS] B. Øksendal and A. Sulem: Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. 2nd edition. Springer 2007.

[ØS2] B. Øksendal and A. Sulem: Risk indifference pricing in jump diffusion markets. Mathematical Finance (to appear).

[ØS3] B. Øksendal and A. Sulem: Maximum principles for optimal control of forward-backward stochastic differential equations with jumps. E-print, University of Oslo 22/2008.

[MØ] S. Mataramvura and B. Øksendal: Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games. Stochastics 80 (2008), 317–337.

[S] A. Shiryaev: Essentials of Stochastic Finance. World Scientific 1999.

Matematiken och Skolan

Af: Sverker Lundin

1. Från skolan till matematiken

När vi tänker på och talar om matematik, utgår vi (oftast omedvetet) från att våra tankar och vårt tal *syftar* på något. Vi vet att alla inte menar exakt samma sak med ordet matematik, men vi utgår från att skillnaderna är så små att vi med hjälp av ordet kan få sagt det vi menar. Ett antagande som jag tror att de flesta gör, är att anledningen till att vi är relativt överens om vad matematik är för något är att matematiken helt enkelt är på ett visst sätt, oberoende av vad vi säger och tänker om den. Att vi delvis menar olika saker när vi säger matematik kan givet detta antagande förklaras med hänvisning till att vi har olika erfarenheter av matematiken: att vissa har kommit den närmare än andra, att några behärskar den och andra inte. De som misslyckats i skolan har känslor formade av detta, ingenjörer har ett annat perspektiv på matematiken än pedagoger, och så vidare. Dessa skillnader till trots tänker vi oss att matematiken *finns* och att det bara finns *en* matematik.

Min idé är att istället fokusera på själva föreställningarna om matematiken och se dem som ett resultat av att man deltagit i sammanhang där det talas om matematik och där man gör saker som går under namnet matematik. Här syftar jag i första hand på grund- och gymnasieskolans matematikundervisning, men även andra sammanhang. Man talar ibland om denna verksamhet som ett möte med matematiken. Jag menar istället att skolan får oss att *tro* på matematiken. Skolan får matematiken att framstå som den på förhand givna orsaken till det vi gör i skolan. Istället måste, menar jag, skolans utformning förstås som resultatet av en komplicerad historisk process i vilken den matematiska vetenskapen spelat en ganska blygsam roll. Att de allra flesta är överens om vad matematik är, beror utifrån denna synvinkel inte på att matematiken i sig själv är på ett visst sätt och ger sig tillkänna i skolan. Istället beror samsynen framför allt på att skolmatematisk undervisning bedrivs på ungefär samma sätt överallt där man talar om matematik. Att vi är överens beror inte på att det finns något bakom föreställningarna som de så att säga avbildar.

Här vill jag påpeka att jag i och med detta varken sagt något om vad matematiker ägnar sig åt på dagarna, eller något om den matematiska vetenskapens resultat. Vad jag talar om är snarast den allmänna uppfattningen om matematik, det sunda förnuftets matematik. Det tycks emellertid inte möjligt att skilja mellan *föreställningar* rörande matematik, och vad man skulle vilja kalla *själva matematiken.* Problemet är, enkelt uttryckt, att de allra flesta talar om matematik som om de visste vad de talade om, väl medvetna om att de inte vet särskilt mycket om vad matematik är. För att teoretiskt beskriva denna paradoxala status hos matematiken använder jag i min avhandling termen *sublimt objekt.* Karaktäristiskt för ett sublimt objekt är att man vet att det är *något* - fascinerande och lockande - men att man samtidigt inte är riktigt säkert på *vad* det är. Frånvaron av vetande utgör grunden för den fascination de sublima objekten väcker. Deras existens är högst påtaglig, men den är en effekt av att man på förhand på något sätt blivit övertygad om att de måste finnas. Min tes är att matematiken framstår som mer självklar ju mindre man vet om den matematiska vetenskapens samt ingenjörskonstens detaljer, och att det därför är den generella frånvaron av matematiska kunskaper i samhället som utgör grunden för det samförstånd rörande matematik som bland annat ligger till grund för skolmatematikens plats i utbildningssystemet.

2. Från matematiken till skolan

Vad spelar det för roll huruvida man ser matematiken som på förhand given, eller tvärtom, föreställningar om matematiken som en följd av att man tagit del av skolmatematisk undervisning? Det spelar stor roll, på grund av att man från skolans håll i stor utsträckning *utgår från matematiken.* Till exempel utgår man från att kunskaper i matematik inte bara är något alla behöver, utan dessutom är något som de allra flesta bara kan tillskansa sig genom en viss typ av undervisning, ledd av personer med särskild utbildning. Man utgår från att kunskaper i matematik bara kan växa fram genom att man tar del av sådan undervisning nästan dagligen, från sjuårsåldern, till och med de övre tonåren. Man utgår från att kunskaper i matematik kan mätas med skriftliga prov, och att den frånvaro av kunskaper som kan detekteras på detta sätt med nödvändighet korresponderar med en oförmåga att fatta riktiga beslut i sin vardag, med en oförmåga att delta som kompetent medborgare i ett demokratiskt samhälle, och med en allmän oförmåga till produktivt och i synnerhet kvalificerat arbete. (Om någon undrar över dessa exempel, kan sägas att utgör de ett axplock från gällande kurs- och läroplaner, samt aktuella rapporter och utredningar om matematikens plats i skolan.)

Jag vill inbjuda läsaren att föreställa sig vad eleverna faktiskt *gör* på matematiklektionerna, utan det tolkningsramverk som föreställningen om matematik utgör. För den som inte varit i en grundskola på länge, kan jag avslöja att skolmatematiken förändras mycket långsamt. Man kan tryggt utgå från sina egna erfarenheter - den ständiga retoriken om revolutionerande förändringar till trots. Skolmatematikens övningar får sin mening genom att ”vara matematik”. Sedda med en annan blick, kan de framstå som i det närmaste absurda.

3. Matematiken som genväg

Ett antagande som tycks rimligt, är att om man vill lära sig något, så är det bra att ägna sig åt det man vill lära sig. När det gäller praktiska ting råder knappast någon oenighet om detta: skall man lära sig spela piano, då skall man spela piano; skall man lära sig köra bil – ja, då är det bilkörning som gäller. Detta antagande kan formuleras: du lär dig det du gör.

Skolmatematiken utgår från att detta inte gäller verksamheter som innefattar matematik. Det är idag svårt att uppfatta den fulla innebörden av det alternativ som skolmatematiken tar för givet och utgår från. För mig blev skillnaden tydlig då jag studerade den svenska skolmatematikens förändring under 1700-talet och början av 1800-talet. Givet materialets begränsningar kunde jag i och för sig inte säga särskilt mycket om hur undervisning i praktiken bedrevs vid denna tid. Inte desto mindre framträdde mycket tydligt två radikalt olika ursprung till det som kring mitten av 1800-talet hade antagit en form som liknar dagens skolmatematik.

Det första alternativet är räknelärornas. De utgår i mångt och mycket från att man lär sig det man gör. Räknelärorna förklarar in i minsta detalj hur man i praktiken gör när man räknar. Metoderna är anpassade för en mängd olika specialfall. Förutom förklarande löpande text innehåller räknelärorna recept, ibland i punktform, som beskriver hur uträkningar skall gå till, samt olika typer av tabeller, varav vissa lämpligen skulle läras utantill. Böckerna riktade sig till en vuxen läsare och kunde troligtvis fungera både som grund för självstudier, som handbok och som utgångspunkt för undervisning. Räknelärorna uppmanade sina läsare att öva – för att lära sig räkna fort och rätt. Matematisk formalism användes i högst begränsad utsträckning i denna typ av böcker, även så sent som en bit in på 1800-talet.

Det andra alternativet är matematikens. Om syftet med räknelärorna var att visa hur man räknar i praktiken, syftade matematiken först och främst till högre mål – som att nå säker kunskap om hur verkligheten *är*. Matematikens ideal var den euklidiska geometrin. Matematiska studier förknippades redan från början med rationellt och logiskt tänkande, ibland med religiösa eller metafysiska övertoner. Med matematikens hjälp kunde verkligheten beskrivas på ett stringent sätt. Den kunde behärskas i teorin. Med algebrans hjälp kunde räknekonstens många räknesätt sammanfattas, bevisas och generaliseras. Även matematiken gjorde anspråk på att vara praktiskt användbar, men på ett annat sätt än räknekonsten. Vägen till matematikens praktiska nytta gick via kunskaper i matematik – vilka kontrasterade skarpt mot det praktiska kunnande som krävdes för att hantera de många praktiska situationer som beskrevs i räknelärorna. Även matematiken krävde övning, men en annan typ av övning än räknelärorna. Den krävde inskolning i ett matematiskt tänkesätt, övning i matematiskt tänkande. Övningen syftade till ett behärskande av matematiken, vilket sedan, i nästa led, med nödvändighet skulle leda till ett behärskande av praktiken. I räknelärorna var räknesätten anpassade till praktikens praktiska villkor. Läroböckerna i matematik utgick från att praktiken till sin natur var matematisk, och att kunskaper i matematik därmed också var kunskaper om praktiken.

Skillnaden mellan de två vägarna mot praktiskt användbara kunskaper blir tydlig då man jämför de övningsuppgifter som skulle leda till räknekonstens bemästrande med de som skulle leda till kunskaper i matematik. Räknelärornas exempel var (med vissa undantag) hämtade från praktiken. De lämnade inga detaljer utanför, eftersom det ofta var just dessa detaljer som bestämde vilket sätt att räkna som var tillämpligt. Räknelärornas exempel var ofta ur en matematisk synvinkel triviala, men inte desto mindre ur en praktisk synvinkel komplicerade. Matematikens exempel (här tänker jag främst på algebra) handlade på ett principellt plan om samma verklighet som räknekonsten. Men i den matematiska kontexten kom exemplen snarast att fungera som illustrationer av de matematiska principernas användning. De utformades i syfte att kunna lösas med hjälp av den matematik som läsaren förväntades behärska. Detta ansågs inte vara till exemplens nackdel, tvärtom: tillsammans konstituerade de en noga uttänkt väg mot matematiska kunskaper. Istället för räknelärornas detaljerade och i sig själva realistiska exempel, skulle de matematiska övningsuppgifterna leda till en typ av generella kunskaper som – när de väl var på plats – utgjorde ett mer kraftfullt instrument för behärskande av praktiken än räknelärornas exempel sammantagna.

Matematikens väg är, kan man säga, också vetenskapens väg. Den syftar inte till räknelärornas hantverksmässiga bemästrande, utan till beständigt och generaliserbart vetande. Utan att ifrågasätta det allmänna värdet av detta vetande, bör man se att det är något annat än praktikerns *know how*. Det märkliga med skolmatematiken är att den hämtade sina undervisningsmetoder och sitt grundläggande tänkesätt i fråga om kunskaper från matematiken, samtidigt som den tog över räknelärornas mål, att ge eleverna praktiskt användbara kunskaper. I den skolmatematiska undervisningen möter därför eleverna sin egen verklighet transformerad av matematikens blick – i tron att deras möte med denna transformerade bild, en bild där verkligheten lagts till rätta för att passa matematiken, skall utgöra en bättre väg mot praktiskt användbara kunskaper, än deras möte med verkligheten sådan den faktiskt är. Skolmatematikens väg mot praktiska kunskaper går via matematiken.

4. Det matematiska kunnandets form

I den skolmatematiska undervisningen presenteras verkligheten tillrättalagd, anpassad till matematiken. Men till vilken matematik? Frågan är synnerligen komplicerad. Problemet ligger bland annat i svårigheten att skilja mellan å ena sidan den vetenskapliga matematiken i egenskap av (mer eller mindre) institutionaliserad praktik, sammanbunden av en föränderlig uppsättning metoder och resultat, och å andra sidan föreställningar om den matematik lekmän tror att dessa praktiker kretsar kring. Det är lockande, men troligtvis i många fall missvisande, i synnerhet när det gäller skolmatematikens historia, att se den vetenskapliga matematiken som en orsak till förändringar inom andra samhällssfärer. I stor utsträckning är det nämligen snarare *föreställningar* om matematiken, formade i sammanhang långt från den vetenskapliga matematikens praktik, som får effekter. Skolmatematikens förändring kring sekelskiftet 1800 utgör en tydlig illustration av detta fenomen. Av denna anledning kan frågan om vilken matematik verkligheten anpassas till i den skolmatematiska undervisningspraktiken åtminstone efter 1850 ges svaret: skolans matematik, vilket innebär att det verkligheten anpassas till i själva verket först och främst är skolan själv. För att återknyta till det föregående avsnittet är det alltså *via skolan* som man i den skolmatematiska undervisningen närmar sig den praktik som eleverna skall lära sig behärska – inte bara på ett konkret praktiskt plan (undervisningen skött av läraren och äger rum i skolan), utan också på ett abstrakt plan såtillvida att eleverna måste ta till sig skolans bild av de praktiker undervisningen handlar om för att lyckas med skolans mätningar av i vilken mån de enligt skolan kan antas behärska verkligheten utanför skolan.

Låt mig ge ett exempel på den typ av föreställningar rörande matematiken som satte agendan för folkundervisningsprojektets ”anpassning” till matematiken strax efter sekelskiftet 1800. Friedrich Fröbel, ett stort namn i pedagogikens historia, skrev följande angående matematikens roll för barnuppfostran:

> Människan söker en fast punkt att utgå från, då hon vill komma till insikt om det inre sammanhanget mellan naturens mångfaldiga former. Ingenstädes finner hon en sådan punkt säkrare än i matematiken, som i sig innesluter all mångfald och som utgör det synliga uttrycket av all lagbundenhet. I matematiken uppenbaras såväl den yttre som den inre världen. Matematiken rör sig alltså både om människan och naturen. Den framgår ur världsanden, ur rena tankelagar, och är ett synligt uttryck för dem, för det absoluta tänkandet. De företeelser, förbindelser, former och gestalter, som har sin grund i detta absoluta tänkande, finner matematiken också utanför sig i yttervärlden. Oavhängiga av matematiken, av mänsklig ande och tanke, möter dessa företelser matematiken i yttervärlden, i naturen. Människan återfinner naturens mångfaldiga former, som tagit gestalt i yttervärlden utanför henne och oberoende av henne, dessa former återfinner hon inom sig själv, i sin ande, och i de lagar efter vilka hennes tankeliv rör sig. Matematiken synes då förena människan med naturen, den inre världen med den yttre och tanken med åskådningen (Människans Fostran, Lund: Studentlitteratur 1995 [1826], s. 138).

Man behöver inte vara idéhistoriker för att se att Fröbel knyter an till en världsbild som idag anses vara matematiken främmande. Inte desto mindre ger citatet en god bild av tidens strömningar rörande matematikens betydelse för grundläggande undervisning. Man såg matematiken som en förenande länk, mellan människan, Gud och naturen. Undervisningen syftade inte i första hand mot praktiskt användbara färdigheter. Den sågs som ett verktyg för att forma barnens själar till samklang med den verklighet de var en del av. I linje med inflytelserika filosofiska system talade man om detta formande i termer av *begrepp*. Man ville att barnen skulle forma *riktiga begrepp*, med vars hjälp verkligheten, i sig själv samtidigt gudomlig och matematisk, kunde begripas.

Givet detta mål blir ett antal egenskaper hos tidens skolmatematiska ideal begripliga. För det första: fokus på det allra enklaste, som till exempel talet *ett*. Man ville inprägla en intuitiv känsla för ”enheten”, vilken man ansåg utgjorde grunden för en av verklighetens mest grundläggande aspekter, nämligen att ting har antal. För det andra: nedvärderandet av (i synnerhet räknelärornas) förklaringar i löpande text, till fördel för det åskådliga, uppvisandet av matematiska samband med hjälp av verkligheten själv. För det tredje: ambitionen att låta även små barn ta del av undervisning i matematik. Eftersom målet var att i grunden omforma människans själ till samklang med matematiken (och därigenom Gud och naturen) var det av största vikt att börja tidigt. För det fjärde: uppvärderandet av repetitionen. Den förändring man ville åstadkomma kunde bara äga rum genom övning på, i första hand extremt grundläggande, matematiskt tänkande och matematiskt åskådande av den fysiskt närvarande verkligheten. De matematiska begreppen måste ”djupt och omsorgsfullt inpräglas” (Johann Heinrich Pestalozzi, Huru Gertrud undervisar sina barn, Göteborg: Wettergren & Kerber 1896 [1801], s. 90).

Idag vill man gärna distansera sig från det undervisningsideal jag just beskrivit, i synnerhet från ett ord som inprägling. Sedan början av 1900-talet har man förändrat sättet att tala om den grundläggande undervisningen i matematik. Idéerna är dock de samma: att målet är att i grunden omforma människan; att undervisningen måste utgå från verkligheten själv snarare än förklaringar i löpande text eller (än värre) genom att någon helt enkelt säger hur det är och hur man skall göra; att man måste ”möta matematiken” redan som ung för att ta den till sig; att matematiskt lärande kräver enorma tidsrymder; att formande av matematiska begrepp kräver arbete med oändliga mängder övningsuppgifter. Detta är skolans tolkning av matematikens konsekvenser för grundläggande undervisning, en tolkning som i stora drag lades fast kring sekelskiftet 1800.

För att tydliggöra vill jag, utan anspråk på att därmed ge ett förslag till hur skolmatematiken borde förändras, i klartext presenera alternativet till de ovanstående grundsatserna. För det första: att lära sig räkna kräver inte alls någon grundläggande själslig förändring. Det är något man kan lära sig att göra bättre eller sämre, precis som allt annat: till exempel att spela fotboll eller förstå analytisk filosofi. För det andra: om man skall lära sig något är det i allmänhet en stor hjälp om man får reda på vad det är man skall lära sig, antingen i löpande text eller genom att någon som redan vet förklarar efter bästa förmåga. För det tredje: det är helt meningslöst att försöka lära en sexåring matematik. Elementär aritmetik lär sig barn samtidigt som de lär sig prata. Med det andra kan utan risk för skada vänta tills intresse, eller möjligen konkreta behov, uppstår. För det fjärde: övning ger färdighet, men det man får färdighet i, är precis det man övar på. Skolmatematikens övningsuppgifter ger färdighet i att lösa skolmatematiska övningsuppgifter – en förmåga som är extremt betydelsefull för att klara skolmatematikens många examinationer. Deras betydelse för förmågan att hantera verkligheten utanför skolan – antingen man ser den som matematisk eller inte – är ganska liten. Olika människor lär sig saker på olika sätt, och det finns dessutom många olika sätt att "kunna" matematik. Matematik måste inte vara ett övningsämne.

5. De skolmatematiska övningarnas form

Om skolmatematiken är anpassad till matematiken, men denna matematik i sin tur bara, eller åtminstone i stor utsträckning, är resultatet av en sorts projektion från skolans håll, då kvarstår givetvis frågan om varför skolmatematiken är som den är. I det föregående avsnittet beskrev jag skolans matematik som resultatet av en tolkning, där personer som arbetade med undervisning, med utgångspunkt från föreställningar om den matematiska vetenskapen, skapat undervisningsformer "anpassade" till matematiken. Även om det givetvis går att se paralleller mellan dessa undervisningsformer och, till exempel, tidens vetenskapliga matematik, kan undervisningsformerna som sagt inte förklaras enbart med utgångspunkt från denna. Istället måste man se undervisningsformerna som en nyskapande förening av föreställningar och praktiker knutna till matematiken, föreställningar och praktiker knutna till barn och folkundervisning, samt inte minst undervisningens i många fall kraftigt begränsande praktiska förutsättningar. Kort sagt tolkade man matematiken på ett sådant sätt att de undervisningspraktiker som framstod som önskvärda med utgångspunkt från matematiken, också hade andra fördelar.

Detta framgår tydligt i fråga om de begreppsbildande undervisningspraktiker som bland andra Johann Heinrich Pestalozzi förespråkade kring sekelskiftet 1800. Barnen kunde varken läsa eller skriva – alltså skulle undervisningen vara åskådlig och kretsa kring ting snarare än tecken. Läraren kunde sällan särskilt mycket matematik själv – alltså lades fokus på det allra enklaste (talen ett till nio, addition, linjen, cirkeln). Barnen det rörde sig om ansågs i allmänhet inte ämnade för socialt uppåtstigande – alltså nedvärderades allt med vetenskapligt eller kulturellt värde. Läraren var ensam och barnen många – alltså förespråkades undervisningstekniker som gjorde barnen lugna och fokuserade, till exempel att barnen fick ge förutbestämda svar i kör enlig en förutbestämd rytm.

Ett annat illustrativt exempel på hur undervisningsidealen anpassades till det praktiskt önskvärda, är vad som hände med den svenska skolmatematiken knappt hundra år senare, mot 1800-talets slut. Vid denna tid expanderade folkskolan kraftigt. Samtidigt hade man börjat måna om att undervisningen skulle skötas av vuxna lärare snarare än duktiga elever, något som hade varit brukligt tidigare. Den form av undervisning som består i att en ensam lärare undervisar en klass av elever vilka alla (i bästa fall) befinner sig på ungefär samma kunskapsnivå bredde ut dig. Inledningsvis upplevde emellertid många lärare denna undervisningsform som mycket svårhanterlig, beroende på att var och en av eleverna krävde allt för mycket individuell hjälp. I synnerhet gällde detta undervisningen i räkning, där eleverna ofta behövde enskild hjälp då de körde fast på en eller annan uppgift.

Detta problem diskuterades livligt i svenska skoltidningar, i synnerhet under 1880-talet. Intressant i denna diskussion är att två olika sätt att förhålla sig till undervisningspraktiken löpte sida vid sida. Dels talade man givetvis om vad som krävdes för att eleverna skulle lära sig matematik. Då använde man termer som begreppsbildning, åskådlighet och självverksamhet, vilka konstrasterades mot mekanisk räkning och minneskunskaper. Samtidigt talade man emellertid också om de praktiska problem som läraren hade att bemästra i själva undervisningssituationen. Vad man om och om igen återkom till var nödvändigheten av att frigöra läraren från behovet av att hela tiden hjälpa eleverna enskilt. Den lösning som framträdde bar namnet *tysta övningar*. Detta var övningar tryckta i elevernas böcker, som var så enkla att eleverna kunde arbet med dem på egen hand, utan att behöva be läraren om hjälp. Tysta övningar förekom i flera av folkskolans ämnen, men inte minst i ämnet räkning.

Vad eleverna i praktiken fick göra under de tysta övnigarna i räkning, var att lösa serier av enkla övningsexempel. Från början av 1800-talet till början av 1900-talet ökade antalet övningsuppgifter i räkning som varje elev fick möta (tryckta i läroboken) under sin tid i skolan ungefärligen exponentiellt, från tiotal till tiotusental. Det fascinerande är att dessa övningsuppgifter var det gemensamma resultatet av de två ovan nämnda argumentationslinjerna, vilka alltså rörde sig på två helt olika plan. Å ena sidan ansågs övningsuppgifterna vara en förutsättning för matematisk begreppsbildning. De inlemmades i en mångfald snarlika teorier, vars gemensamma nämnare var det långsamma fortskridandets princip – att eleverna skulle upptäcka matematiken på egen hand, genom självständigt kreativt arbete. Å andra sidan ansågs uppgifterna helt enkelt *nödvändiga* i egenskap av tysta övningar.

Vad jag menar ägde rum under denna tid, är en form av meningsskapande, där det praktiskt och socialt nödvändiga fick mening genom att förläggas bortom det sociala. Att elever sitter timme efter timme, dag efter dag, vecka efter vecka, och ägnar sig åt meningslösheter enkom på grund av att ingen har tid med dem duger helt enkelt inte. Som genom ett trolleritrick framträder därför matematiken med ett *krav* på just det som ändå är praktiskt nödvändigt, vilket därmed får (en annan) mening. Denna mening framstår som ett resultat av matematikens objektivt givna egenskaper. Det som hänt är emellertid tvärtom att att matematiken *tilldelats* dessa egenskaper, bland annat av de lärare som diskuterade matematisk begreppsbildning sida vid sida med de tysta övningarnas problem. Det är med andra ord skolans matematik som pockar på tidskrävande undervisning.

6. Matematikens dubbla funktion

Skolmatematikens födelse bör förläggas till 1800-talets mitt. Då tog ett speciellt sätt att tala om skolan och matematiken form. Liksom tidigare sa man att *matematiken* är alldeles fantastisk - nyttig för alla, vacker, uppmuntrar till kreativitet och så vidare, med positiva attribut som skiftar mellan olika personer och framför allt mellan olika tidsepoker. Det nya var att man började kontrastera denna matematik mot *skolmatematiken*, vilken man ansåg vara bristfällig, på grund av tungrodda traditioner, felaktig lärarutbildning, bristande ekonomiska resurser och så vidare. Det förslag som denna tankefigur mynnade ut i var: att förändra skolan så att den gör matematiken rättvisa! Om skolmatematiken är tråkig, oanvändbar, och kanske till och med orsakar psykiskt lidande, kan detta - sade man - omöjligt bero på matematiken, som ju är vacker och glädjande. Man började betrakta skolmatematiken, i egenskap av social institution, som ett *hinder*, placerat mellan eleverna och matematiken, ett hinder som en riktig undervisningsmetod skulle kunna undanröja.

Detta sätt att tala om skolmatematikens problem är lätt att känna igen även idag, och det kan kännas igen vid varje tidpunkt från och med dess introduktion kring 1850. Men vad betyder det att denna retoriska figur utgör en så påtagligt närvarande konstant i skolmatematikens historia? Min förklaring är att detta sätt att tala hänger samman med skolmatematikens sociala funktion, som består i att å ena sidan konsekrera de som lyckas, och å den andra stänga ute de som misslyckas. Kritiken mot skolmatematiken gör det möjligt att förklara hur en elevs förvisso synnerligen långvariga exponering för matematikens goda egenskaper kan resultera i noll och intet och därmed på ett socialt plan: stängda dörrar. Kritiken säger nämligen att matematiken i dessa fall inte alls fanns där, i skolan. Det dessa elever erfor var skola blott och bart, och därav eländet. De som lyckades däremot, de mötte matematiken – trots undervisningsmetodernas brister; de tog den till sig, och fick därmed rätt att gå vidare.

Matematiska kunskaper är ett fåtals privilegium, lika mycket nu som före skolmatematikens födelse. Skillnaden ligger i den kraft med vilken flertalets avsaknad av dessa kunskaper gör sig påmind. Skolmatematiken skriker ut denna frånvaro tills dess att orden ekar i varje elevs och varje före detta elevs inre. De repetitiva övningar som enligt Pestalozzi skulle inprägla matematiska begrepp, inpräglar i själva verket en bild – av matematikens betydelse och ständiga närvaro, för de allra flesta på alla platser utom just i den egna själen, där alltså ett hål gapar tomt. Här ligger kärnan i mitt resonemang kring matematiken som sublimt objekt. Att det finns en så stor enighet om matematikens betydelse för grundläggande undervisning beror inte på att alla så väl bekanta med till exempel den matematiska vetenskapen. Förklaringen ligger tvärtom i det tomrum som den skolmatematiska undervisningen mejslat ut hos så många. Matematiken är kort sagt det man antar borde ha funnits där. Av resonemanget följer att ju större och mer skrämmande frånvaron ter sig, desto mer fantastisk måste givetvis matematiken antas vara.

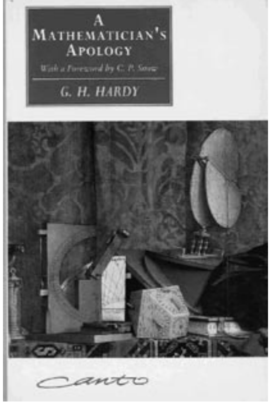
Vi får reda på att elevernas kunskaper i matematik är otillräckliga. För tio år sedan, för tjugo år sedan, för femtio år sedan och för hundra år sedan, fick den tidens TV-tittare, radiolyssnare och tidningsläsare reda på att elevernas kunskaper i matematik var otillräckliga. Man kunde förvänta sig att en stor del av den vuxna befolkningen skulle ha svårt att sköta sin vardag och sina jobb på grund av detta, men så är det inte. Tvärtom har lärare – vuxna lärare – svårt att förklara för sina elever vad matematiken de undervisar om skall användas till. Matematikdidaktiker talar om detta i termer av ”relevansparadoxen” som säger att matematiken finns överallt, men trots detta är mycket svår att upptäcka. Betydligt närmare sanningen är att det överallt närvarande är matematikens frånvaro. Matematiska kunskaper är det allra mest fantastiska som tänkas kan, något alla borde ha – men ack så många som saknar dem! Stackars oss kunniga, som i individens och samhällets tjänst måste stänga dörren för så många. Vi vill det ju inte. Det är bara det att vi behöver mer *resurser* – till utveckling av lärarutbildningen, framtagning av nya läroplaner, kompetensutveckling, mer och bättre matematikdidaktisk forskning, bättre samordning – för att hjälpa dessa olyckliga själar, eleverna som inte når godkända resultat, vuxna som inte inser matematikens sanna värde, lärare som är fast i traditionella undervisningsmetoder.

7. En illustrerande jämförelse

En jämförelse med medicinen kan tydliggöra vari matematikens särställning består. Både medicin och matematik är vetenskaper med obestridligt samhälleligt värde. Denna likhet till trots har de två ämnena helt olika position i skolan. Matematik är ett kärnämne. Medicin finns över huvud taget inte som eget ämne. Denna skillnad hänger samman med att även elementär aritmetik betraktas som tillämpning av matematik, medan till exempel att sätta på ett plåster eller diagnosticera sig själv som magsjuk ses som väsensskilt från den medicinska vetenskapen. Man säger därför att kunskaper i matematik är en förutsättning för att man skall kunna hantera även de allra mest elementära ”matematiska” problem, medan att säga något motsvarande i fråga om medicinen framstår som absurt. Matematiken kan sägas representera en förbluffande kontinuitet, mellan det enkla och det svåra, och även mellan olika delar av samhällslivet. Den medicinska vetenskapen representerar tvärtom en diskontinuitet, mellan vardagens sunda förnuft och läkarkårens expertis. På ett socialt plan avspeglas detta faktum i det att en mängd olika yrkesgrupper - från didaktiker och pedagoger, till matematiker och filosofer - gör anspråk på att säga vad matematik är och hur skolmatematiken bör vara utformad, medan å andra sidan läkarkåren ensam avgör vad medicin är för något.

Skolans matematik erbjuder ett sätt att knyta samman världen. Den gör en mängd olika fenomen till delvis samma sak, nämligen tillämpningar och yttringar av matematik. Att tro på skolans matematik är att se denna sammanbindande funktion som en egenskap hos matematiken.

Denne artikel stammmer fra Svenska Matematikersamfundets blad "Medlemsutskicket", Februar 2009. Vi takker for tilladelsen til at gengive den.



A mathematicians apology

Af: Seym Pound

I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world.

Those concluding words of Hardy have often been quoted. Often quoted in a spirit of shock and disapproval. For those who take offense, Hardy becomes the representative *par excellence* of an effete coterie of degenerate aestheticism seeking splendid seclusion in the proverbial Ivory Tower. However, one should keep in mind that those lines were written by a very bitter man looking back upon his life and whose past pleasures was now for ever beyond his reach. The actual argument he presents in his classical essay is far more nuanced and compelling, and even if you do not temperamentally agree with it, you should be compelled to take it seriously and respect his candor.

The book I got in October 1969 during my first semester at the University. It is a slight volume published by the Cambridge University Press and printed earlier that year. The dust jacket sports a picture of Hardy, one of the few extant snapshots, and between the covers the essay of Hardy is padded by a longish foreword by C.P.Snow, who provides an impressionistic portrait of the man himself, rounding out the snatches Hardy provides *en passent*[1]. And an essay it is, rather than a book, a quick leafing of its small pages covered with large print gives an estimate of about 70'000 characters. I have read it a couple of times in my life. Excerpts maybe in the Newman anthology of the World of Mathematics before I sampled it in the original in my late teens. As with many books you read in your youth it influences your thinking, often without you being aware of it, so that many ideas and opinions you may think are your own, can often be traced back to a more original source. This is something that was also brought home to me during my recent rereading. It is interesting to read a book during different stages of your life, apart from the opportunities of nostalgic revival (because in addition books read during formative years are often quite well retained in memory), those re-readings high-light different things.

The essay is engagingly written with a deft touch and certainly confirming Hardy's hunch, that had not chosen to become a mathematician, but had sought an extra-academic pursuit, journalism would have been closest to his heart and natural skill. But it is also written with a sadness bordering onto bitterness, which Snow is very careful to point out. Because even if it is ultimately a celebration of mathematics, it basically is an apology for doing mathematics and devoting your whole life to it. Mathematics itself needs no apologists, although it is not always so easy to explain why, and Hardy makes some sincere, if somewhat half-hearted attempts to do just that, namely to explain why, but even his half-hearted attempts are better articulated than most other attempts, and may indeed go some way in explaining the classical cult status of his book.

First Hardy explains that one should do what one is best at. Only a minority of people have some talent, and very few of those who are talented are endowed with real talent, i.e. being able to do something very well indeed. Such an attitude of course goes against the grain of modern egalitarian notions, but Hardy was born and bred in a time in which the celebration of talent and genius was generally accepted, not only the ephemeral appearances of such[2]. Hardy is not bragging, he is very clear about the limitations of talents, while a few may be blessed with some, talent is almost always very specialized, and doing well in one discipline almost always exclude rising above mediocrity in others. When Hardy speaks of talents, he does not only mean mathematical, or poetic or generally creative talent s, but he also includes sports, being himself an enthusiastic tennis-player and cricketer. Furhermore he makes the rather remarkable claim that he has never known any person with a genuine gift for mathematics, who has not pursued a mathematical career, and for whom any alternative would have been unthinkable. As it is, it is indeed a rather remarkable statement, and even if it would be hard to prove in any sense, it does indicate a very strong moral obligation. A moral obligation strong enough by itself to obviate the need of any apology. A cynical observer may of course point out that this moral attitude of Hardy, was simply a consequence of growing up in a social class taking such familiar injunctions of the Bible to cultivate your gifts sincerely with the ambition of bettering themselves. Nevertheless it does provide one of the moral pillars of his arguments.

But wherein lies the moral imperative? In particular what motives drive people to do research? There is of course a variety of most admirable ones, but Hardy selects three crucial ones, presented in order of importance. The most important, without which no other motivation would make any sense, is curiosity, the desire to know the truth. Then comes the professional pride in doing ones best and avoiding the shame of not performing up to par, when

[1]It is remarkable that no full-length biography has been written of him (but few mathematicians have been the subject of such), all what there appears to be available is in addition to obituaries and encyclopedic entries, this sketch by Snow

[2]As to the great majority of people who posse no particular talent, the message seems to be that it does not really matter what they do, as they have nothing to waste anyway.

ones talents are concerned. And finally ambition, the desire for reputation and the power such might yield. It is typical of the sardonic wit of Hardy to include the third, something more sentimental men would have abstained from doing.

Hardy himself was initially seduced into mathematics by his success, following the recognition of his talent and the admiration it engendered. I suspect that many mathematicians have shared this heady experience, and thus ironically receiving their most fervent accolades before they have even started to discover mathematics itself. The mathematical competition in the form of the Tripos pervaded mathematics at Cambridge still at Hardy's times, and when he himself came of age he worked to have it abolished. British mathematics at the end of the 19th century was in fact rather backward compared to continental standards[3]. The idea of mathematics was what we now would call mathematical physics, where mechanics, especially hydromechanics, played an important role. The Tripos examinations were a rat-race, in which the candidates employed tutors to teach them the tricks of the trade, and thus to reduce the art of solving problems to a kind of obstacle course in which the object was to neutralize what the examiners had thrown in their ways[4]. Hardy admitted that he had a good teacher giving him the invaluable advice to read Jordan's *Cours d'Analys* and finally he started to realize what mathematics was all about. Hardy eventually become a Fourth Wrangler in 1898, something that rankled him, because h e thought that he should have won, although the competition itself was ridiculous. So much to be said about the rather ignominious motivation of competition, although most successful people are far from being inured to it. Let us now instead turn to the ultimate motivation for any scientist - curiosity.

The main point Hardy makes is that is indeed the ultimate motivation also for scientists who are engaged in what the members of the general public see as most beneficial, medicine (or physiology as Hardy calls it) being perhaps the most obvious example. Those people may claim that they are motivated by a passion to alleviate the suffering of mankind, a very noble sentiment if any. But noble sentiments only carry you so far, if you are really to make some progress you need to be genuinely interested in the intrinsic aspects of the problem. This I think is a very crucial observation[5] Of course a medical man does not need to apologise to the public why he is devoting his life to medical research. This is of course very conven ient, public relations are something medical researchers seldom have to worry about[6]. I will not belabour this point further.

This fundamental motivation is crucial in order to make sense of Hardys attitude towards applied mathematics, and although Hardy is known for his championship of pure mathematics[7] he basically did not make a distinction based on applicability but on intrinsic interest. Thus the division was not really between pure and applied, as between interesting and un-interesting mathematics. Then it is another thing that Hardy found pure mathematics generally far more interesting than applied mathematics, finding the latter plodding and pedestrian[8] . I believe that this is a sentiment shared by most mathematicians whether pure or applied, the real sweet problems are pure in character. Now applications may inspire problems in pure mathematics, but the real reason that those are solved are because of the intellectual satisfaction involved in solving them. Thus Hardy claims that even if you desperately want to solve a problem because of its applications, you are only succesful if you are inter ested in the problem as a mathematical problem.

Now, one should have no illusions about Hardy's disparaging attitude towards applied problems as formulated above[9]. It did not mean that he abhorred applications, (except of course those pertaining to warfare of which he had some pretty sardonic things to say during the First World War) on the contrary he saw applications as a manifestation of the seriousness and depth of mathematics, but as he noted, Shakespeare had a far more pervasive influence on the English language than say his contemporary X. but this was just a consequence of being by far the better poet. It is the poetry of Shakespeare that counts, the influence is just a consequence of it, and not its justification. To summarize: Mathematics need not be justified by its applications, although they are testimonies to its worth. What justifies mathematics is the curiosity it engenders in its practioners. This is of course a moral stand, but why do we live at all? The quest for discovery and truth is as worthy a reason for existing at all as any-

[3]Bertrand Russell was five years older than Hardy, but still of the same generation. It has been suggested by Monk in his biography that the uninspired teaching of mathematics at Cambridge steered Russell towards philosophy. It is hard though to believe that Russell would have turned out to be as celebrated a mathematician as he eventually turned to be as a philosopher. Furthermore the same people who did well in mathematics also tended to do well in classics (and vice versa?), indicating a general ability of playing the game.

[4]This reminds me of the ambition of latter-day didactics people to teach problem-solving using the books by Polya

[5]This is an example of an idea which I have believed I had independantly thought of, until I realized by rereading that I must have read it in Hardy long before, and even if it might not have registered consciously it must have done so unconsiously.

[6]Of course if their prescribed remedies go awry, they will find themselves (temporarily) in the dog-house and incur public wrath to an extent mathematicians never have to experience.

[7]His Calculus book was appropiately called 'A course on Pure Mathematics' and ran into nine editions, the first stemming from 1908, the last in 1944, reprinted several times.

[8]Much of applied mathematics, or rather the application of mathematics to the practical world involves the fiddling with mathematical models in order to tailor theory to facts. And in fact ultimately most of such models are used for numerical simulation, t he principles of which are purely mathematical. In physics there is a two-way street, but not one in say biology, where biology seldom if ever presents mathematical ideas. Of course there are very important problems in biology, such as to figure out the way that proteins configurate themselves spatially, a deterministic process crucial in understanding their bio-chemical functions. Such problems are very hard but apparently not amenable to real mathematical insights, and their solutions attained by simulation and ad-hoc reasoning.

[9]Hardy pointed out the biologist Hogben as a championship of the usefulness of mathematics, remarking that all Hogben knew was 'school' mathematics, and that he had no sense at all of the beauty and fascination of 'higher' mathematics. He grudgingly admitted that Hogben may after all have done a communal service by pointing out to the illiterate that there was more to mathematics than meets the eye. Hogbens book 'Mathematics for the Millions' was a big success, and it has in fact inspired more than one great mathematician among whom Mumford has testified to the effect Hogben had on him.

thing else. What you chose is a matter of temperament and ability. For those who have no aptitude for mathematics, the mathematical quest may indeed seem incomprehensible, and in the absence of any practical applications also appear totally irrelevant. What Hardy is trying to do is to give testimony to the worthiness of mathematical creation, and even if tha t is an elitist ambition I find it eminently justifiable. The real hard task that Hardy confronts is to make the fascination of mathematics comprehensible even to the non-mathematician. It is a task that in principle could be impossible, because only a minority would be susceptible to it[10].

Hardy points out that in fact the worth and usefulness of mathematics is indeed recognized by the general public, and in fact at his time such a recognition would no doubt also have been spiced with a certain amount of admiration. Then he proceeds to claim that the public is in fact fascinated by incipient mathematics as testified by the general interest in puzzles and games. Hardy believes that this interest in mathematics is in fact more pervasive than in music, which at least on the face of it seems hard to agree with. One wonders what Hardy would have made of the recent craze for Sudokus, the solving of which has little intrinsic interest to a mathematician. The point he wants to make is that even if people may claim practical justification they do indeed show great appreciation of things devoid of any practical implications[11]. Chess is ma thematical he explains, but only on a trivial level, just as mathematical recreations. Chess has no significance beyond itself, but mathematics has. And here he comes to the crux of the matter, namely to explain what is meant by mathematical significance, and how it really differs from the much more readily explicable practical applicability. Hardy decides to present two gems from Greek mathematics, namely the proof of the infinitude of the primes and the irationality of $\sqrt{2}$. To appreciate such gems you need no mathematical education, nor any lengthy introductions, just a dormant susceptibility to the beauty manifested through the combination of surprise and inevitability that marks a real mathematical argument. In chess, Hardy remarks, you may sacrifice a piece to gain an advantage, in mathematics you sacrifice the whole game (he is surely refering to proof by contradiction) in order to gain the world. It is doubtful whether Hardy really succeeds, but it is doubtful whether any popular mathematical text really succeed at all, except to those that are destined to succumb anyway. As examples of trivial mathematics he picks more or less at random from Rose *Mathematical Recreations* There are just two four-digit numbers that are integral multiples of their reversals. Namely $8712 = 4 \times 2178, 9801 = 9 \times 1089$ something that may intrigue amateurs but leave mathematicians cold. It is not particular difficult to prove such things (one can always use trial and error for what is but a rather limited number of cases) and verifying the fact is not instructive. There simply is nothing that is 'going on'. The human activity of mathematics is filled with false leads, the ancient obsession with perfect numbers and such things, being obvious examples. It is not the uselessness that is fascinating with pure mathematics, but the way it relates to other mathematical things. That mathematics constitute a multiply connected web, the realization of whi ch surely being what seduces the mathematically attuned to mathematics itself.

The age old controversy on Platonism and Mathematics is of course unavoidable in any philosophical discussion on mathematics, and Hardy confronts it without dwelling on it. He makes a distinction between the real physical world and the mathematical, claiming that one can prove nothing about the former through the latter[12]. Furthermore '317' is a prime whether we humans exist or not. In general though he is not particularly concerned with the question, Platonic facts tend to be too abstract and general to be interesting. The fact that '$8712 = 4 \times 2178$' is as unchanging and Platonic that '317' is a prime or '$\sqrt{2}$' is not rational, but what is really interesting is our human relation to those facts, and with such a focus the Platonic character of mathematics becomes irre levant, although by most mathematicians taken for granted[13]. To Hardy mathematics is an art, a creative art, where patterns are made out of ideas, and hence more endurable than any other human activity. Such an endurability comes with a price, namely the mathematical legacy is chillingly impersonal. In the works of a poet, even a philosopher, the personality of the creator is to some extent purveyed as well, but not so in mathematics. Even if you can be quite emotional about mathematics, it provides no vehicle to express emotions as such[14]. A mathematician is like a painter, he observes the mathematical world, he makes discoveries, but what is fascinating to the individual artist is the form he choses to render those in, and the significance he attributes to them. Thus mathematics is a humanistic, artistic endeavour, not really a scientific one.

The fact that mathematics is a creative pursuit if anything at all, makes it impossible for a mathematician just to contemplate the eternal mathematical truths, he has to discover new ones. It is not the fixity that fascinates but the fluidity[15]. To really do mathematics is really hard work,

[10] As usual when an expert tries to reach out to make a case for his field, the most susceptible outsiders are those who may never yet have realized their intrinsic susceptibility, in practice this means the young (and still corruptible).

[11] The human interest in say jewellery and precious stones surely illustrates a general tendency to be fascinated by the useless.

[12] In particular that different mathematical geometries exist, and their existences are in no way affected by the particular physical geometric manifestation our (local) space happens to conform to

[13] Some people consider the Platonic persuasions of mathematicians to be naive and unthinking, but I fail to see what advantages are really gained by denying it. The remarkable convergence of mathematical development across cultural barriers is something even die-hard anti-Platonists are bound to admit. Ramanujam is in this respect a very interesting example. His mathematical strangeness is not really a social cultural one, but a manifestation of his singular autodidactic education. And even here, there is of course a convergence, otherwise there would have been no fruitful exchange.

[14] Hardy relates the question if a memorial would be made of you, would you then prefer to have your statue placed high enough so none of your features were discernable, or would you rather have it low, so everyone could recognise you. Hardy apparently would prefer the first, while most people would be more comfortable with the second. The point being that as far as enduring fame goes, mathematics is really impersonal.

[15] A mathematician repeatedly goes over familiar grounds, just as Hardy went back to the elementary examples he proposes, but here the saying of Heraclitus holds sway, namely of you never stepping into the same river twice. Each time you revist something familiar you learn something new, because you place it into a different context, if for no other reason than it becomes a matter of comparisons to previous contexts.

and your prime is but short and when you get old you inevitable lose the knack. Hardy may have been the one who coined the phrase 'mathematics is a young mans game' pointing out that the average age of election to the Royal Societry is lowest for mathematicians[16] . Hardy himself was a late bloomer, paradoxical for a mathematical progidy, claiming that he did not achieve his prime until his early forties. By his late fifties the energy and the originality were gone, and when he was writing his Apology he considered himself washed out, unable anymore to contribute significantly. Some mathematicians at the end of their careers may claim that they have never been as good as they are now. Such men I suspect are either extremly vital, or, what is far more likely, have never really tried to do mathematics seriously[17].

In spite of everything this rather melancholy book (as Hardy famously points out at the very start that *It is a melancholy experience for a professional mathematician to find himself writing about mathematics*) does convey a sense of guilt. Hardy had a charmed, priviliged life, effectively protected from the usual viccissitudes of normal existence. Hardy himself had been seduced by the charms of an academic life through the rather second-rate book *A Fellow at Trinity*[18], and myself must admit that in my youth life at Cambridge, as relayed by Russell and Hardy seemed to me to be the closest approximation of blissful heaven on earth I could imagine. It was a life of sherry and walnuts in the combination room, clever discussions at High table, serene twilight walks over well-manicured lawns accompanied by chimes from nearby chapels[19]. And it is this aspect of Hardy, the University Don spending (at most) four hours of concentration each day on mathematics, the rest lounging around, that C.P.Snow reports on with such fascination.

Snow had no deeper interest in mathematics, and what hence really made Hardy tick was totally opaque to him. It was a common interest of cricket that brought him into Hardy's orbit initially, an interest which in the case of Hardy was obsessive, in the case of Snow passing. To Snow Hardy was the excentric genius (although Hardy would deny such an exalted characterizations[20]) and he compares him to Einstein. The Hardy that comes across is the brilliant conversationalist, obsessed not only with clever word-games but also with cricket. In fact the latter obsession makes one wonder whether he did not after all have a strong autistic streak in him[21]. Snow also reports on his strange phobia for mirrors, and for being a novelist he displays a striking lack of imagination in attributing this to anti-narcissism[22]. But while Einstein tended to become stranger and stranger the more you got to know him [23], Hardy ap peared more and more normal, the deeper you penetrated behind his stances. Could it be that after all Hardy was rather ordinary, just a very clever boy among the other clever dons, sparking with wit in a self-contained universe of esoteric mathematics and classical wisdom? As noted above Hardy matured late and it is tempting to speculate, as Hardy did himself, that the key to his success was his close collaboration with Littlewood and Ramanujam, the latter being the supreme romantic accident of his life[24]. As with many men who mature late, Snow explains, they stay young for a long time, but such extended grace make them singularly unequipped to face the rigo rs of ageing. Well into his fifties Hardy was a keen athlete, never strong he was on the other hand slim and agile, and played a good game of tennis. At the age of sixty-two he suffered a coronary thrombosis, he did recover of sorts, but the active life to which he considered himself entitled, was over, and it was at the beginning of those bitter twilight years he wrote his famous Apology. He lingered on for another decade before he finally succumbed, prematurely aged.

Denne artikel stammmer fra Svenska Matematikersamfundets blad "Medlemsutskicket", Februar 2008. Vi takker for tilladelsen til at gengive den.

[16] As well as pointing out the outstanding contributions by those how died very early, such as Galois, Abel and Riemann.

[17] The mathematician Ruelle points out that most scientists have never ever achieved anything of value having quit before they have even started in earnest.

[18] In literature as in mathematics, it is rather the second-rate that has practical applications

[19] Hardy professed along with p olitical radicalism a militant atheism and a concomitant horror of organized religion, not unusual among those benefitting from a sheltered existence.

[20] At his best, he claimed that he might possibly have been the fifth best mathematician in the world, the identities of at least two people he must have ranked ahead of himself are obvious to guess

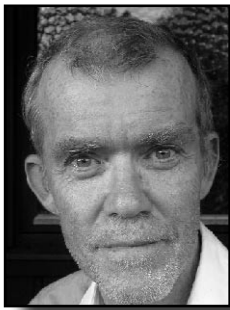
[21] The last thing he heard as he was dying, was his sister reading him the cricket news. Maynard-Keynes used to chide him that if he spent as much concentration on the stock-exchange columns in the mornings as he did on those devoted to cricket, he would have made a bundle.

[22] I can well imagine the phobia having deeper roots than a mere disgust for ones appearance, which after all is a very narcissistic feature. To look yourself in the mirror is to externalize yourself, seeing yourself just as a thing among other things, and then to rob you of your subconscious comfort of solipsism and to provide a reminder of the ephemeral nature of your being. To gaze at yourself is an act of self-reference frought with the usual dizzying paradoxes that such inevitably entail.

[23] did Snow get to know Einstein? or is he but vicariously reporting?

[24] Snow reports in his foreword that Hardy was not the first mathematician that Ramanujam contacted, two previous quite well-known (but not named by Snow, although they were at the time already dead) had received his unsolicited manuscripts, but chosen to ignore them, a practice Snow admits is rather understandable.

King of Infinite Space



Af: Ulf Persson

King of Infinite Space. Donald Coxeter, the Man Who Saved Geometry. Siobhan Roberts. Walker& Company, New York 2006, 399p.

'À bas Euclide! Mort aux triangles!'. Orden är inte Coxeters, utan Dieudonnés, som i denna bok har satts att spela skurken, en artikulerad representant för de mörkermän som utgör kretsen kring Bourbaki. En sammanslutning, för att inte säga sammansvärjning, mot allt som heter intuition och konkretion, med syfte att ersätta detta med det formella och det abstrakta. Den klassiska skolmatematiken, med sin betoning på syntetisk geometri, ansågs, speciellt av 60-talets matematisk pedagogiska gurun vara förlegad. Istället för bilder och figurer, skulle det vara strikta logiska resonemeng. Istället för att fördjupa sig i kuriosa skulle man koncentrera sig på det väsentliga och allmänna. Visst låg det mycket i detta ifrågasättande; den moderna matematiken rymmer så mycket av spänning och elegans som nog skulle ha gått att föra ner på betydligt lägre nivå och därmed också fått utgöra stimuland för många flera elever. Varje matematiker kan nog bidraga med sin egen li sta på vad som skulle vara lämpligt. Men så blev det aldrig, den duvning i geometri som elever förr i tiden bestods med ersattes inte av någonting annat. Följden blev en förflackning, snarare än en fördjupning i skolmatematiken i hela västvärlden över.

Det är klart att den geometri som Coxeter så egensinnigt ägnade sig åt under sitt liv ansågs vara förlegad, ålderdomlig och elementär och hade mera av förströelse karaktär än av en seriös sysselsättning. Matematiken under första delen av 1900-talet genomgick en explosionsartad utveckling, där framför allt abstraktare infallsvinklar, formidabla formella apparater, och en allmänn tendens till övergripande axiomatisering, inte så mycket ur rent logisk synpunkt som ur tankeekonomisk, spelade en central roll. Bourbaki har oftast setts som sinnebilden för denna formaliserande och strukturerande process; dock skall man komma ihåg att Bourbaki egentligen bara täckte en ganska smal del av matematiken, ingenting av exempelvis hård analys finns där att hämta. Coxeter rönte dock så småningom uppskattning; han visade att man kan bedriva intressant och fundamental matematik utan att behöva tillägna sig någon vidlyftig, teknisk begreppsapparatur. I motsats till det mesta av matematiken kan faktiskt Coxeters arbeten göras tillgängliga för en bredare allmänhet, även om man inte skall förledas tro att han på något sätt är en 'alternativ' matematiker, som kommer fram till sina resultat genom ren intuition och inte via beräkningar. Exempel på sådana är snarare Escher och Buckminster Fuller, vilka båda, på gott och ont, skulle komma att spela en viss roll i Coxeters liv.

Coxeters liv var anmärkningsvärt långt, men åtminstone ur biografisk synpunkt, tämligen händelselöst. Hur skall man förvänta sig att en större allmänhet som aldrig tidigare har hört talas om Coxeter skall lockas att läsa om honom? Författarinnan försöker lösa detta genom att inte bara presentera en biografi om mannen men även en plädering för geometrins betydelse. Hon är ingen matematiker, men som mången icke-matematiker (och matematiker också för den delen) närande en obesvarad kärlek till matematiken. Vad vi håller i handen är således inte en geometrisk lärobok av något slag, utan en journalistisk ansamling av citat baserade på en mängd interjuver med nyckelpersoner. Risken med detta är att hon överdriver Coxeters betydelse. Coxeter är ingen Einstein eller Darwin inom matematiken. Denna hyperboli är lite olycklig, Coxeter står stadigt på sina egna ben.

Coxeter föddes i London för drygt 100 år sedan. Han var enda barnet till ett omaka par en viss Lucy Gee porträttmålare och Harald Coxeter en utagerande kedjerökande autodidakt som försörjde sig som tillverkare av kirurgiska instrument. Äktenskapet skulle snart utmynna i en skilsmässa, något som tog den känslige enstöringen till son mycket hårt, och som skulle innebära ett trauma som skulle plåga honom långt upp i vuxen ålder. Fadern gifte sedan om sig med en mycket yngre kvinna och skaffade den unge mannen att antal halvsyskon. Retrospektivt ter sig dock den unge mannens uppväxt mycket idyllisk. Visserligen en edwardiansk idyll, men med starka inslag av den viktorianska epoken, som ger associationer till Lewis Carroll. Den ensamme pojken skrev musik och fantiserade ihop imaginära länder och påhittade språk, något som en och annan läsare må nicka igenkännande till. Med den musikaliska begåvningen var det si och så, men med den matematiska rörde det sig om orginalitet. Att fa ntisera om den fjärde dimensionen är något som fascinerar många skolpojkar, men få har tagit sådana fantasier med ett sådant brinnande systematiskt allvar som den unge Coxeter. Hans intresse för flerdimensionella polytoper väcktes således på ett mycket tidigt stadium och det intresset behöll han livet ut. Som så många med uppslukande och fokuserande intressen hade han inget större socialt behov, framför allt inte av personer som inte delade dessa. Som förväntat var hans tid i internatskola ett mindre helvete, dock med förmildrande omständigheter som vänskapen med klasskamraten Peetrie, även han känd för bidrag till polytopteori.

Barndomen är inte alltid en lycklig tid. Vad som däremot utgör höjdpunkten i de flesta personers liv är den tidiga ungdomen, då världen (förhoppningsvis) öppnar sig. För Coxeter innebar detta att studera matematik i Cambridge. Vi associerar till Hardy och Littlewood, men även om dessa tog honom under sina vingar (Coxeter sände som skolpojke några integraler till Hardy som skamset erkände att han spenderat alldeles för mycket tid på dem) så var det inte hos dessa han sög sin matematiska inspiration. En något excentrisk källa för sådan fann han hos en äldre dam - Alice Stott, en dotter till George Boole, och som i sin ungdom hade fattat en passion för 4-dimensionella polytoper[1] och hade bland annat återupptäckt Schläflis klassifikation av de sex regelbundna polytoperna i denna dimension. Hon saknade elementär matematisk teknik och kom till sina slutsatser rent syntetiskt via en impo nerande visuell intuition. Akademiskt fann han sin hemvist hos Baker och dennes studenter, av vilka du Val förtjänar att lyftas fram. Baker var en geometriker av kontinentalt stuk, mer befryndad med de klassiska italienska algebraiska geometrikerna än med sina brittiska kolleger, och är bland annat ihågkommen av ett monumental geometriskt verk - Principles of Geometry. Det blev en avhandling till slut, som föga förvånande handlade om just polytoper, och som presenterades 1931. I denna veva besökte den amerikanske algebraiske topologen Lefschetz[2] blev imponerad av Coxeter och anbefallde honom att söka ett Rockefeller stipendium.

Så blev det och på sensommaren 1932 tog Coxeter båten över Atlanten. Det glada sällskapslivet på båten förvirrade och gjorde honom förlägen, men han lyckades i alla fall tillskansa sig en ung kvinnas uppmärksamhet och lära henne att rita en 4-dimensionell polytop. Året vid Princeton betydde att han konfronterades med en skara lysande matematiker, såsom Veblen och von Neumann, utan att för den skulle förledas från den väg han slagit in på. Hans fokusering på polytoper fick Lefschetz att ge honom smeknamnet 'Mr.Polytope', något som Coxeter inte helt uppskattade. Det var under denna tid han grundlade vad som skulle bli hans främsta bidrag till matematiken, nämligen presentationen av grupper genererade av reflektioner, och utvecklandet av den kompakta notation för dessa, kända som Coxeter diagram. Och vilka, ironiskt nog, så småningom kom att inlemmas i en Bourbakis mest uppskattade volymer.

Hans 'stint' vid Princeton avslutades med en klassisk 'cross-country-trip' i sällskap med sin fader. En tripp som även inkluderade ett besök på Chicagos World Fair. Han spenderade ett mellanår i Cambridge[3] innan han på nytt sökte sig tillbaka till Princeton där han kom att tillbringa läsåret 1934-35. Princeton hade vid detta laget nått en viss ryktbarhet i och med Einsteins närvaro, men med Einstein hade Coxeter ingen kontakt; däremot med Hermann Weyl vars intresse för representationer av Liegrupper hade överraskande kopplingar, via rotsystem, till diskreta grupper och reflektioner. Coxeter deltog aktivt i ett av Weyls seminarier och fick förtroendet att skriva några kapitel i de föreläsningsanteckningar som trycktes och spreds och gjorde hans namn känt i vidare kretsar . Dock hade Coxeter nått det stadium i karriären där en mera permanent lösning av försörjningen är av nöden. Men, mitt under depressionen förekom inte alltför många erbjudanden. Det han fick lockade honom, nämligen att undervisa i en skola i Vermont. Veblen avrådde honom emellertid på det bestämdaste, och när Cambridge avböjde hans begäran om att uppskjuta sitt stipendium avsade han sig erbjudandet och återvände till Trinity College.

Förhoppningen stod till professuren som skulle bli ledig efter Bakers pensionering, och i början av 1936 sökte han tjänsten. Men, han blev förbigången, liksom för övrigt du Val, och professuren gick istället till Hodge, med stöd av Weyl och Lefschetz[4], och därefter framstod ett tidigare erbjudande att fara till Toronto betydligt mera lockande. Året 1936 visade sig bli något av ett ödesår för Coxeter. Han träffade den holländska *au pair* flickan Rien Brouwer (till Coxeters initiala besvikelse ej relatered till den kände holländske matematikern och konstruktivisten) och efter en kort uppvaktning friade han till henne[5]. Bröllopet sattes till slutet av augusti, men innan dess följde han med sin fader Harold på en resa till Norge i samband med kongressen i Oslo samma sommar[6]. Pappan, Harold, var till skillnad från sonen en äventyrlig individ som uppskattade strapatser i form av långa bergsvandringar och nakendopp i iskalla glaciärbäckar. Sonen klagade över skoskav och avhöll sig från alltför uppfriskande bad. Strax efter återkomsten till England nåddes Coxeter av ett sorgebud. Fadern hade, medan han undervisade sina yngsta barn i undervattningsimning i Brighton, drabbats av en hjärtattack och drunknat. Istället för att skjuta upp br öllopet fick det gå av stapeln ett par dagar efter begravningen och i betydligt blygsammare skala än planerat. Mången inbjuden gäst fick till sin stora häpnad läsa om det ingångna äktenskapet ett par veckor tidigare än förväntat. I slutet av augusti gick färden återigen över Atlanten.

Under drygt fyrtio års tid var Coxeter knuten till Torontos matematiska institution. Fullvärdig professor blev han först i slutet av 40-talet, och med den framgång hans böcker rönte (Regular Polytopes, publicerad 1948, samt Introduction to Geometry 1961), fick han åtskilliga löneförhöjningar i början av 50-talet, som dock omvandlades till lönesänkningar på 70-talet som ett led i adminstrationens desperata försök att få honom att pensionera sig; strävanden som kröntes med framgång först 1977. Om denna långa period har författarinnan inte mycket

[1]Enligt Coxeter är hon ansvarig för att ha introducerat termen 'polytope' i engelskan.

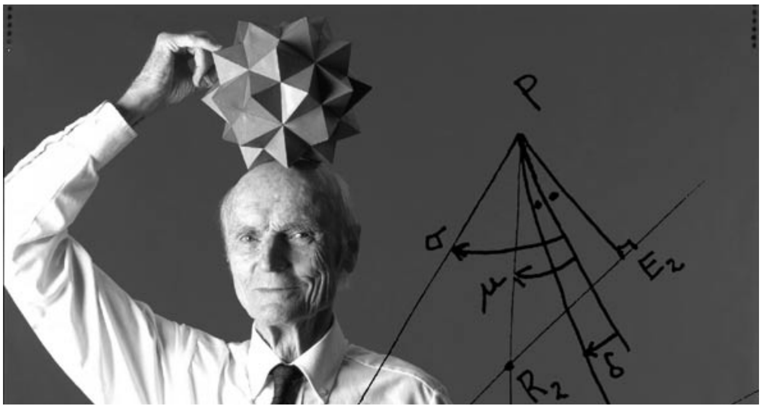
[2]Ursprungligen kemist, men genom en olycka som sådan hade han förlorat sina bägge händer, och kan ses på en journalfilm föreläsa gestikulerande med två svarthandskade proteser. Lefschetz är känd för sin intuition och slarviga bevis, de senare lätt fixade av rutinmässigt arbetande matematiker.

[3]Coxeter ådrog sig under sina Cambridge år Wittgensteins sympatiska intresse. Detta var dock knappast återgäldat. Coxeter fann Wittgenstein obegriplig för att inte säga nonsenseaktig.

[4]Att Hodge utnämndes bör vara knappast förvånande. Hodgeteorin har spelat en fundamental roll i den moderna komplexa algebraiska geometrin och flervariabel komplex analys, men Hodge förblir ett obskyrt namn utanför analysen.

[5]Kanske delvis influerad av sin fars varningar om att inte vara alltför passiv med risk att någon av hans charmerand e kolleger kunde utnyttja hennes mottaglighet i ett främmande land. Men kanske också delvis av en önskan att så snabbt och smärtfritt få den delen av livsuppgiften undanstökad.

[6]Den kongress som för övrigt utdelade de två första Fieldsmedaljerna, och som skulle visa sig blev den sista kongressen innan kriget inledandes ett långt uppehåll på fjorton år.



Donald Coxeter

att säga. De Kanadensiska vintrarna utgjorde en obehaglig chock till att börja med, och frun lobbade för en päls. Coxeter var av naturen mycket sparsam. Badvattnet återanvändes liksom ostämplade frimärken. Två barn föddes, en flicka och en pojke, varav ingen visade någon håg för matematiken, men däremot klagade över sina föräldrars känslomässiga försummelse av dem. Coxeter var helt uppslukad av sin matematiska gärning, och upplevde s av sina barn knappast som en fadersfigur utan snarare som ett äldre syskon som krävde ständig tillsyn från modern, som helt tagit kontrollen av hans praktiska liv och bestämde bland annat hur han skulle klä sig och när han skulle snyta sin ständigt droppande näsa. Coxeter visade dock ett visst politiskt engagemeng. Han var under kriget pacifist (inte helt *comme il faut* i det provinsiella Toronto), och stödde under början av 50-talet många av sina kolleger som råkade illa ut under McCarthy hysterin. Och slutligen skrev han långt senare under en protest mot att förära George W. Bush ett hedersdoktorat vid Toronto. Men detta var uppenbarligen krusningar på ytan.

Jag har tidigare nämnt två personer vars vägar korsade Coxeters. Buckminster Fuller höjde Coxeter till skyarna som den störste geometrikern i modern tid, men förhållandet mellan dessa, till sina temperament så väsenskilda personligheter surnade snart och Coxeter fattade avsky för den förres självhävdelseinstinkter. Betydligt kongenialare var hans relation till den holländske grafikern Escher som han uppmuntrade och lanserade. Escher kom fram till sina matematiskt underfundiga illustrationer rent intuitivt och förstod inte alls Coxeters matematiskt konventionella förklaringar hur elementära de än må ha varit. Escher åtnjuter en viss kultstatus bland matematiker och likasinnade, men i konstvärlden i stort ses han ner på.

Givetvis innebar pensioneringen inte att Coxeter slutade med matematik. Till de närmare fyrtio åren i Toronto skall man lägga nästan trettio år av oavbruten seniorverksamhet. Coxeter var gammal mycket länge. Lång, mager för att inte säga på gränsen till utmärglad, hade han sett ålderstigen ut nästan sedan ungdomen. Själv har jag träffat på honom två gånger. Första gången var när han höll ett kollokvium vid Columbia University våren 1976. ADE-singulariteter var mycket i ropet inom algebraisk geometri vid den tiden och en av mina kolleger hade bjudit in honom. Jag minns att Coxeter uttryckte förvåning över en sådan välfylld sal en torsdageftermiddag, i Toronto skulle de flesta redan givit sig av för den långa 'weekenden'. Jag minns inte så mycket av föredraget annat än att det rörde sig om komplexa speglingar, och att jag för första gången konfronterades med Schläflis (p, q, r) notation. Andra och sista gången var under ett kort besök jag gjorde hos en kollega vid Torontouniver sitetet våren 1983. Coxeter, som då måste ha varit pensionerad, gav en liten gästföreläsning vid ett seminarium om de 27 linjerna på kubiska ytor, uppenbarligen ett rutinuppträdande. Sammankomsten var informell och jag hade tillfälle att växla några ord med honom efteråt. Jag frapperades av hans okunnighet om ett mycket elementärt faktum (men han kan mycket väl ha missuppfattat det hela).

Coxeter var aktiv in i det sista, även om han rent fysiologiskt borde ha legat i sin grav sedan många år. Han avslutade korrekturläsningen av en artikel endast två dagar innan sin död i slutet av mars 2003. Hans önskan om att ingen begravning skulle anordnas hörsammades och hans barn strödde askan under ett träd på tomten. Hans hjärna däremot kremerades inte utan sändes till en neurolog vid Hamilton, Ontario, som redan tidigare under hans levnad hade utsatt den för diverse skanningar. Vissa förstoringar jämförbara med Einsteins har noterats, liksom att bådas hjärnor var mera symmetriska än normalt.

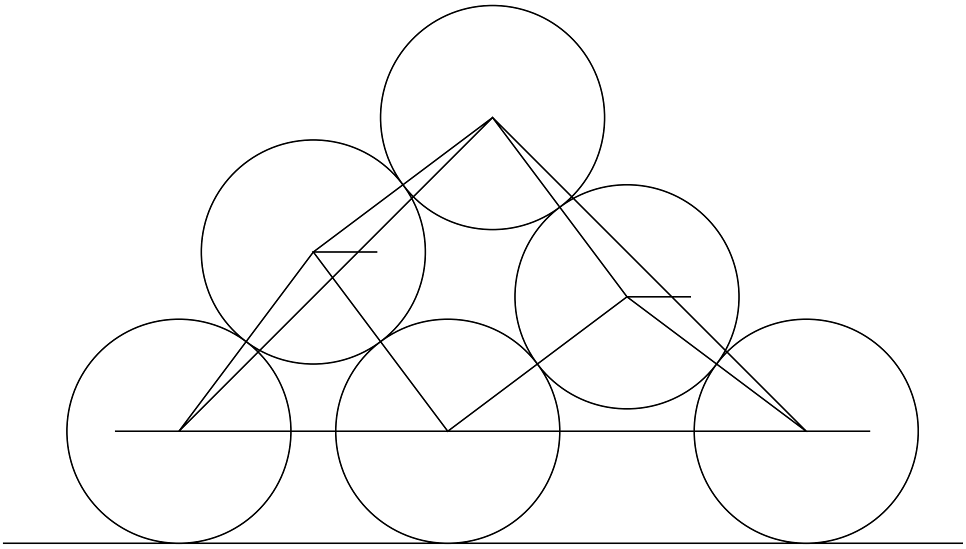
Jag misstänker att förträdesvis matematiker kommer att uppskatta boken, även om författaren (och förlaget) givetvis har haft större ambitioner. För att nå en större läsekrets må man även instruera den oinvigde i vad Coxeter sysslade med. Författarinnan gör tappra försök, inte helt oävna, samt försöker anknyta till heta områden som såväl kosmologi och sträng-teori till Fulleriner och datorgrafik. Douglas Hofstedter har skrivit ett uppskattande förord. Och förlaget har tillåtit en omfattande notapparat samt diverse bihang, som en lista över de regelbundna polytoperna i 3 och 4 dimensioner (som alla vet, eller bör veta, är klassifikationen anti-klimaktisk i högre dimensioner) en lista med coxeterdiagram, Morleys sats, och Penroses 'Tilings'. Dessutom en fullständig lista över Coxeters alla publikationer som börjar med en notis till Math.Gazette 1926 och avslutas med ett konferensbidrag om fyra ömsesidigt tangerande cirklar 2005.

Denne artikel stammmer fra Svenska Matematikersamfundets blad "Medlemsutskicket", Oktober 2007. Vi takker for tilladelsen til at gengive den.

LØSNINGER

Problemklubben “Con Amore” har løst de fleste af opgaverne.

De lystige kroner



Der ligger seks kroner i énkronestykker på et bord. De tre ligger på en ret linie. De ligger ikke helt tæt sammen men så tæt at der ikke kan presses en krone til mellem to af dem.

To kroner støder til to af de tre til samme side og udenpå dem støder den sidste krone til begge de to. Nu kunne det se ud til at den sidste krone ligger lige langt fra de to yderste. Det gør den selvfølgelig hvis den tredie krone ligger lige midt mellem de to andre. Men gør den det altid?

Ja, da de to smalle trekanter er kongruente.

Den mystiske pyramide

Ægyptens ældste pyramide, trinpyramiden ved Sakkara, ligner ikke Cheops’ og de andre. Som navnet antyder, har den snarere form som en kæmpetrappe, mere som Mayaernes pyramider.

Hvis vi begynder fra over, er der én sten i det øverste lag, fire i det næste, ni i det tredie, osv.

Når vi nu får at vide, at antallet af sten, der ialt er medgået til byggeriet, er et kvadrattal, og at der er medgået mere end én sten, hvor mange trin har så pyramiden?

(Det er vanskeligt at bevise, at der kun er én løsning.)

24 trin. Antallet af sten er jo

$$1+4+9+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

som skal være et kvadrat. De tre faktorer i tælleren skal enten være kvadrattal, eller 2, 3 eller 6 gange et kvadrattal. Blandt mulighederne må man undersøge

$$n+1=p^2 \qquad 2n+1=q^2 \qquad n=6\times r^2$$

Af de to første fås

$$q^2 - 2p^2 = -1$$

som f. eks. løses af $p = q = 1$. Da

$$1^2 - 2 \times 1^2 = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$$

kan vi jo opløfte til en ulige potens, m, og få

$$q^2 - 2p^2 = (q - \sqrt{2}p)(q + \sqrt{2}p) = (1 - \sqrt{2})^m (1 + \sqrt{2})^m = (-1)^m = -1$$

Vi prøver os frem med $m = 3, 5, 7, 9$ og finder

$$\begin{aligned}
(1 - \sqrt{2})^3 &= 7 - 5\sqrt{2} \\
(1 - \sqrt{2})^5 &= 41 - 29\sqrt{2} \\
(1 - \sqrt{2})^7 &= 239 - 169\sqrt{2} \\
(1 - \sqrt{2})^9 &= 1393 - 985\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Hertil svarer højderne, som skal være 6 gange et kvadrattal:

$$\begin{aligned}
&n = 5^2 - 1 = 24 = 6 \times 2^2, \quad n = 29^2 - 1 = 840 = 6 \times 140, \\
&n = 169^2 - 1 = 28560 = 6 \times 4760, \quad n = 985^2 - 1 = 970224 = 6 \times 161704, \ldots
\end{aligned}$$

Af de fundne kan kun $n = 24$ bruges. Det kan vises, at det er den eneste løsning, bortset fra $n = 1$.

Klassikeren

Et sted ude i tundraen havde man fået rejst tre kraftværker, et elektricitetsværk, et gasværk og et vandværk. Nu var det ellers et øde område, der var ialt kun tre huse, der skulle forsynes med strøm, gas og vand.

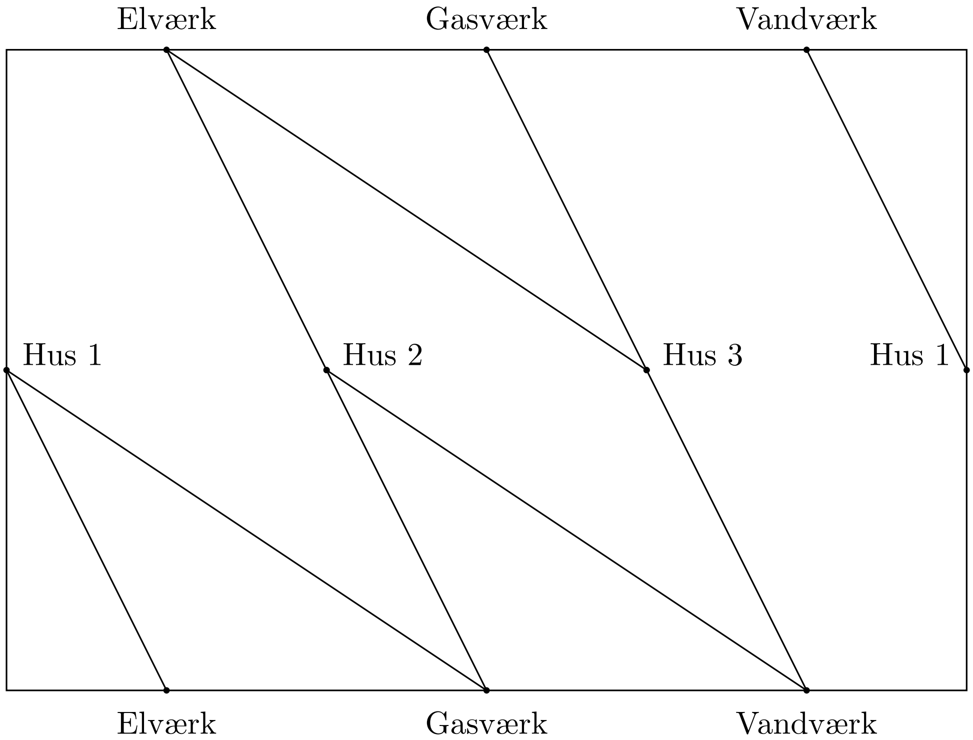
Men det var ikke helt problemfrit. Man skulle jo trække ledningerne oven på jorden, som var for stivfrossen til at grave i, men ledningerne tålte ikke at krydse hinanden. Og selv om der kun var de tre værker og de tre huse, havde ingeniørerne endnu ikke fundet en rørføring, der løste problemet.

Hvorfor ikke?

Når vi har forbundet to af husene til samtlige tre kraftværker, er verden blevet inddelt i tre områder, et uden elektricitet, et uden gas og et uden vand. Det tredie hus kan kun placeres i ét af de tre.

Men oppe på den ringformede asteroide, Torus II, var det lykkedes de lokale ingeniører at løse rørføringsproblemet.

Hvordan?



Æventyret

Der var engang en prins, der skulle vælge sig en prinsesse. Han havde valget mellem tre søstre, som alle var unge og smukke. Deres far var en viis gammel konge, og han ville sikre sig, at hans kommende svigersøn havde omløb i hovedet. Så han sagde til prinsen:

"Før du får min velsignelse til at ægte en af mine døtre, vil jeg sætte dit mod og din intelligens på en prøve.

Du får lov til at stille én af prinsesserne ét spørgsmål, som kan besvares med "ja" eller "nej". Den ene vil svare sandfærdigt, den anden vil svare falsk, og den tredje, som er min yndlingsdatter, kan svare sandfærdigt eller falsk, som hun vil. Hun har alligevel aldrig rettet sig efter mig.

Ud fra svaret på dit spørgsmål skal du vælge din brud. Men jeg advarer dig: Hvis du vælger min yndlingsdatter, skal du have dit hoved hugget af!"

Prinsen havde ingen anelse om, hvem der var kongens yndligsdatter, lige så lidt som han anede, hvem der ville tale sandt, og hvem falsk. Han måtte altså formulere sit spørgsmål sådan, at ligegyldigt hvem han spurgte, og ligegyldigt, hvad hun svarede, skulle han ud fra svaret kunne vælge en af de to andre til sin brud.

Naturligvis stillede prinsen et så snedigt spørgsmål, at han med sikkerhed undgik yndlingsprinsessen. Og kongen blev så imponeret, at han alligevel gav prinsen yndlingsdatteren, og de to levede lykkeligt til deres dages ende.

Hvordan mon prinsen formulerede sit spørgsmål?

Vi kalder prinsesserne "S" for sand, "F" for falsk og "Y" for "yndling". Prinsen kalder dem A, B og C, men ved ikke, hvem der er hvem. Nu spørger han A: "Er B mere tilbøjelig til at svare falsk end C?"

Nu kan han få to svar, og for hvert svar kan A være hver af de tre prinsesser. Det giver følgende muligheder:

		"ja"			"nej"	
A	S	F	Y	S	F	Y
B	F	S	F,S	Y	Y	?
C	Y	Y	?	F	S	S,F

Hvis altså A svarer "ja", kan prinsen vælge B, og svarer A "nej", kan prinsen vælge C.

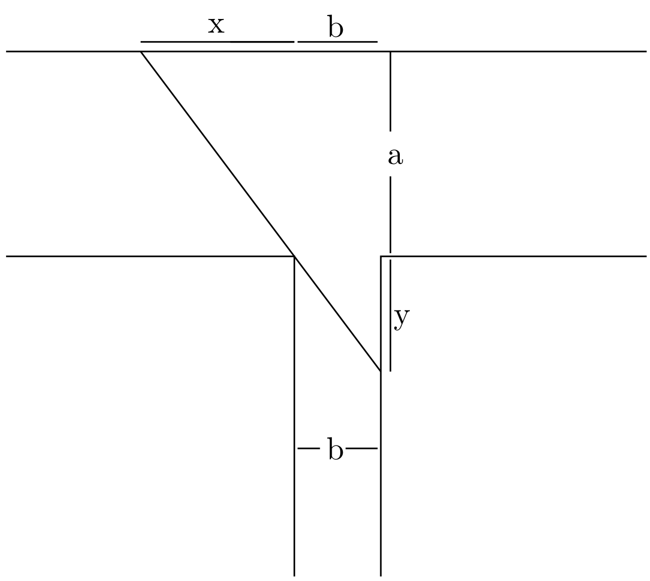
En rørende historie

Et vandrør er 6,4 cm i diameter, og midt på røret er der et T–rør, så siderøret er 2,7 cm i diameter. Siderøret sidder altså nøjagtig vinkelret på hovedrøret.

Nu løber vandet i en strøm gennem hovedrøret, og en del af vandet løber ud ad siderøret. Man har nu tilsat nogle mikadopinde til vandet, og det er meningen, at de ikke må løbe ud ad siderøret.

Man har derfor spurgt kommuneingeniøren, hvor lange mikadopindene skal være, for at de ikke på nogen måde kan dreje om ad siderøret. Hvis de prøver, skal de sætte sig fast.

Hvad er den kritiske grænseværdi for mikadopindene?



12,5 cm. Når en pind drejer om hjørnet, kan vi jo forlænge den til røring med de to rør. Den forlængede pind har et eller andet sted en minimumslængde, som netop er 12,5 cm.

Hvis hovedrøret har bredden a og birøret bredden b, og ved en stilling af pinden rammer dens forlængelse hovedrøret i afstanden x fra birøret og birøret i afstanden y fra hovedrøret. Så gælder ifølge Pythagoras, at længden af den forlængede pind er

$$\sqrt{(a+y)^2 + (b+x)^2}$$

Samtidig fås af de to ensvinklede trekanter med siderne a, x hhv. y, b, at

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$$

eller bedre

$$xy = ab$$

Minimum under bibetingelse opnås, når rangen af matricen af partielle afledede er mindre end maksimal, her 2, altså når rangen af matricen

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 2(b+x) & 2(a+y) \end{pmatrix}$$

er 1, dvs, når

$$\frac{b+x}{y} = \frac{a+y}{x}$$

eller

$$bx + x^2 = ay + y^2$$

Når vi ganger med x^2 og bruger ligningen $xy = ab$, står der

$$x^4 + bx^3 = a^2bx + a^2b^2 = a^2b(x+b)$$

hvoraf

$$x^3 = a^2b$$

og straks

$$y^3 = ab^2$$

Den kritiske længde bliver herefter

$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

Et biproblem

Betragt en regulær sekskant, der er gennemskåret i et regelmæssigt trekantet mønster. Man tænker sig, at hver side er delt i n lige store stykker, og derefter er alle de linier, der er parallelle med siderne, tegnet.

Problemet er at tælle alle forekommende regulære sekskanter på figuren.

Der er n^3. Man tager en terning og deler hver side i n lige store stykker. Nu deles terningen i n^3 små terninger med snit, der er parallelle med hver af de tre sider.

Derefter projiceres terningerne langs en hoveddiagonal ned på et stykke papir. Denne projektion svarer til figuren. Og de små terninger står i entydig korrespondance med sekskanterne på følgende måde. Hver lille terning ligge i netop én terning, der har den lille som sit nederste hjørne, og som er så stor som der er plads til i den oprindelige. Og disse terninger korresponderer enentydigt med sekskanterne i figuren.

Vejerboden

I den klassiske opgave er der givet 12 kugler, hvoraf de 11 er ens. Man skal så afsløre den aparte i 3 vejninger. Samtidig skal det afgøres, om den er lettere eller tungere end de andre.

Til hjælp har man en almindelig skålvægt med to skåle.

Men til variation af temaet har vi denne gang 14 kugler, hvoraf de 13 vejer nøjagtig 10 g. Desuden har vi et 10 gramslod.

Vi skal igen afsløre den aparte kugle i højst 3 vejninger, men det er ikke krævet, at vi finder ud af, om den er lettere eller tungere end de andre.

Hvordan skal man bære sig ad med det?

Lad os kalde kuglerne 1–14. Vi vejer nu 1–5 mod 6–9 + loddet. Hvis der er ligevægt, så er den aparte blandt 10–14. Vi vejer så 10–11 mod 12+loddet. Er der ligevægt, vejer vi 13 mod loddet.

Hvis 10–11 mod 12+loddet giver udslag, vejer vi 10 mod 11. Hvis nu 10 går ned og 11 op, ser vi på, om 10+11 gik op. I så fald er den aparte 11, ellers er det 10.

Hvis derimod 1–5 gik op og 6–9+loddet ned, så vejes 1,2,6,7 mod 3,8,10,11. Går nu 1,2,6,7 atter op, så er enten 8 tungere eller 1 eller 2 lettere. Derfor vejes 1 mod 2. Går derimod 1,2,6,7 ned, så er enten 3 lettere eller 6 eller 7 tungere. Det afgøres med 6 og 7 på hver sin skål.

Er endelig 1,2,6,7 i ligevægt med 3,8.10,11, så er den aparte jo en af 4, 5, der er lettere eller 9, der er tungere. Det afgøres af 4 mod 5.

Gitterpunkterne

Forleden dag sad jeg og slog krusseduller på et almindeligt ark ternet papir. Så kom jeg for skade at lege med gitterpunkterne. Jeg valgte 5 af dem tilfældigt ud.

Så tegnede jeg alle 10 forbindelseslinier mellem dem. Og hver gang var der et af liniestykkerne, der passerede hen over et gitterpunkt.

Hvorfor det?

Forklaring.

Vi giver gitterpunkterne koordinater, der så altid bliver hele tal. Når vi vælger 5 gitterpunkter, så må der mindst være 2 af dem, hvis koordinater begge har samme paritet (lige–ulige). Men så vil midtpunktet af liniestykket, der forbinder de to, være et gitterpunkt.

Pythagoras

En Pythagoræisk trekant med heltallige sider, x, y og z, der opfylder

$$x^2 + y^2 = z^2$$

må have mindst én side som et lige tal. Og ingen Pythagoræisk trekant har en side af længde 2. Men man kan tænke sig en Pythagoræisk trekant, hvis sider er to primtal og et tal, der er det dobbelte af et primtal.

Opgaven går ud på at bestemme *samtlige* Pythagoræiske trekanter af den slags.

Der er kun én, nemlig trekanten med siderne 2×2, 3 og 5. Fordi de Pythagoræiske trekanter med primiske sider fås af formerne

$$x = 2pq, \quad y = (p+q)(p-q), \quad z = p^2 + q^2$$

hvor p og q er primiske. Men så må x være det dobbelte af et primtal, p et primtal og $q = 1$. Men skal y også være et primtal, må $p+q$ være et primtal og $p-q=1$. Det lader sig netop gøre for $p = 2$. Men så er $x = 2 \times 2 \times 1 = 2 \times 2$, $y = (2+1)(2-1) = 3$ og $z = 2^2 + 1^2 = 5$.

De logiske frimærkesamlere

Tre personer – A, B og C – var alle fuldstændig logiske. De kunne alle tre øjeblikkelig drage alle de logiske konsekvenser af alle præmisser. Desuden vidste hver af dem, at de to andre var lige så logiske som han selv. Man viste dem syv frimærker; to røde, to gule og tre grønne. Derpå fik de bind for øjnene, og et frimærke blev klistret i panden af dem hver især, mens de resterende frimærker blev lagt ned i en skuffe. Da øjenbindene var fjernet, spurgte man A: "Kan du nævne én farve, som dit frimærke i hvert fald ikke har?" "Nej," svarede A. Så fik B det samme spørgsmål, og han svarede også "nej".

Er det muligt ud fra disse oplysninger at regne sig frem til, hvilken farve A's frimærke havde? Eller B's? Eller C's?

C's. Hvis C's frimærke er rødt, så kan B regne ud, at hans eget ikke er rødt. For så havde A sagt, at hans ikke var rødt. Tilsvarende hvis C's frimærke er gult. Altså er C's frimærke grønt.

Joakim von And i Sahara

Joakim von And er som bekendt verdens rigeste og nærigste and. Da han derfor engang skulle køre over Sahara i jeep, måtte han jo spekulere på, hvor billigt det kunne lade sig gøre.

Nu var hans jeeps kun i stand til at køre en trediedel af vejen på en fuld tank, men til gengæld kunne alle hans jeeps køre fuldautomatisk uden chauffør, og han havde masser af dem. Og han kunne let tømme og fylde tankene midt i ørkenen uden at spilde. Men med fuld tank menes så meget benzin, som en jeep på nogen måde kan medbringe.

Problemet er, hvordan slipper Joakim von And billigst muligt over ørkenen, når hele hans flåde af jeeps står på den ene side. Hvor mange jeeps skal han bruge, og hvordan skal han bære sig ad? (Han kan bare efterlade sine jeeps i ørkenen, de skal ikke returneres.)

Han skal bruge 11 jeeps og $10\frac{1969}{2520}$ tankfulde benzin.

Lad os sige, at ørkenen er 7560 km bred, og at en jeep kan køre 2520 km på en fuld tank.

De sidste 2520 km tilbagelægges med 1 jeep og en tankfuld benzin. De næstsidste 1260 km tilbagelægges i 2 jeeps med to tankfulde benzin. Når de tilsammen har én tankfuld benzin tilbage, samles benzinen i den ene jeep.

De trediesidste 840 km tilbagelægges i 3 jeeps, osv. 4 jeeps kører 630 km, 5 jeeps kører 504 km, 6 jeeps kører 420 km, 7 jeeps kører 360 km, 8 jeeps kører 315 km, 9 jeeps kører 280 km, 10 jeeps kører 252 km.

Så mangler der kun 179 km, som kan tilbagelægges af 11 jeeps, med den ene tank knap fuld. Den nøjes med $\frac{1969}{2520}$ tankfuld benzin.

Denne gang vil vi mindes Hans Tornehave ved at bringe nogle af hans typiske eksamensopgaver i elementær analyse.

Opgave 1.

Find konvergensradius for potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)z^n,$$

og undersøg tillige, hvis konvergensradius er endelig, om rækkerne konvergerer på konvergenscirklens periferi.

Opgave 2.

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(\sinh x - 1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \cosh x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \cosh x - x.$$

Opgave 3.

Undersøg, om de ved

$$f(x) = e^{-x}\sin e^x, \quad g(x) = e^{-x}\sin e^{2x}$$

definerede afbildninger $f, g : [0, \infty[$ ind i $\mathbb{R}$ er ligelig kontinuerte.

Opgave 4.

Find alle punkter $x^* \in \mathbb{R}^2$ som har en omegn, i hvilken ligningen

$$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2x_2 = 1$$

éntydigt bestemmer en implicit given funktion $x_2 = f(x_1)$, som tilfredsstiller betingelsen $Df(x_1^*) = 0$.

Opgave 5.

Lad $[a, b] \subsetneqq \mathbb{R}$ være et interval. Lad $\alpha : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være strengt voksende, og lad $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuert og ikke konstant. Vis de skarpe uligheder

$$(\alpha(b)-\alpha(a))m < \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) < (\alpha(b)-\alpha(a))M,$$

hvor $m = \inf f([a, b])$ og $M = \sup f([a, b])$.

Opgave 6.

Vis, at

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cos(y\sin t)\mathrm{d}t = 0.$$

Opgave 7.

Bevis formlen

$$\frac{1}{2}(\log(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)x^n,$$

og angiv potensrækkens konvergensradius.

Opgave 8.

I Hilbertrummet $\mathbb{R}^\infty$ betragtes mængden M af punkter a, for hvilke $\sum na_n^2$ er konvergent. Vis, at $a \in M$, $b \in M$, $k \in \mathbb{R}$ medfører $ka \in M$ og $a + b \in M$. Vis, at M er overalt tæt i $\mathbb{R}^\infty$, og at 0 ikke er et indre punkt i M.

Opgave 9.

Med Φ betegner vi den ved

$$\Phi f(x) = xDf(x)$$

definerede differentialoperator. Vis, at differentialligningen

$$\Phi^{op}\chi = x\chi,$$

hvor $p \in \mathbb{N}$, har den ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^p}$$

definerede afbindning $f : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ som løsning.

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C

Kirken »Longuelo Chiesa di Maria Santissima Immaculata" lidt uden for Bergamo. Kirken er karakterisk ved, at den gør udpræget brug af parabler og hyperbolske parabolieder i sit design.

Foto: Tafteberg Jakobsen