mat
M A T I L D E

TEMA:

Matematik og økonomi

NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR 33 DECEMBER 2007

Leder

Af: Bent Ørsted

Dette nummer af Matilde omhandler bl. a. matematik og økonomi; vi har fået nogle professionelle økonomer til at beskrive hvordan problemstillinger i den virkelige verden af planlægning, prisfastsættelse og andre finansielle spørgsmål kan behandles og vekselvirker med den matematiske verden. Som det ses er der tale om en stigende rolle for matematikken - hvad der sikkert også er kendt fra de finansielle aspekter af den moderne verden. Finansmatematik/financial mathematics har indtaget ikke bare Wall Street, men kan også findes omtalt på noget så jordnært som udtalelser og kendelser fra ligningsrådet vedrørende værdien (i skattemæssig sammenhæng) af aktieoptioner; her viger man ikke tilbage for at henvise til den berømte Black-Scholes ligning, der giver en stokastisk differentialligning (altså ikke nogen let sag) for f. eks. prisen af en aktie som funktion af tiden. Det er interessant (uden at vi vil gå i detaljer) at denne ligning involverer et led der er en Brownsk bevægelse, altså en tilfældig bevægelse, der svarer til det fysiske fænomen tilfældig drift af en partikel. Faktisk er de matematiske metoder på de finansielle markeder af stadig stigende kompleksitet, og stadig flere »quants«, også kaldet financial engineers, opfinder stadig nye finansielle produkter til det store kasino.

Lige fra sandsynlighedsregningens barndom har spil og teorien for hvordan og hvornår man vinder været et tilbagevendende emne. For eksempel i følgende simple variant af hvad der minder lidt om »Deal, no deal«: Studieværten står foran tre kufferter, hvor den ene indeholder en million mens de to andre er tomme. Deltageren peger på en af kufferterne, hvorefter værten åbner en af de to andre kufferter - den viser sig at være tom. Nu tilbyder værten deltageren frit at vælge hvilken af de to sidste kufferter han vil åbne; vil han stå ved sit første valg, eller vil han nu skifte mening og tage den sidste kuffert? Hvad skal den nervøse deltager spille på? Ja, det bedste er at skifte, for så vinder han en million med sandsynlighed 2/3, mens han vinder med sandsynlighed 1/3 hvis han fastholder.

Også i den virkelige verden er der store penge at tjene, hvis man kan få sandsynligheden på sin side (og tilsvarende kan man let tabe, hvis den er imod en - at spille i lotto svarer således ca. til, at man fra et togvindue forsøger at kaste en sten ud ad vinduet for at ramme en spand, der står langs banen et eller andet sted mellem Høje Tåstrup og Ålborg - med bind for øjnene). Et berømt eksempel er matematikeren James Simons (kendt for Chern-Simons teori, der anvendes i forbindelse med gauge teori); hans firma Renaissance Technologies har i gennemsnit indtjent 30 procent om året siden 1988; i 2006 indtjente han for en af sine fonde 1.7 milliarder US dollars. Han er blevet kaldt the world's leading quant.

Men kompleksiteten er efterhånden blevet svær at overskue, således også i forbindelse med krisen omkring 8. august i år, hvor amerikanske banker oplevede store udsving i kreditværdigheden i forbindelse med det såkaldte subprime morgage market. En vittig iagttager beskrev det således: In fact, the summer might be described as a time when too many investors had purchased standard deviations that were too high for their means. Selv James Simons tabte 8.7 procent i august.

Vi har i dette nummer af Matilde bl. a. også et interview med Abel prisvinderen S. Varadhan (venligt stillet til rådighed af European Mathematical Society Newletter), der har fået prisen for sine arbejder om sandsynlighedsteori og statistik; som så mange andre emner indenfor matematikken er også dette i rivende udvikling - og godt på vej til at blive et af de vigtigste i dette århundrede. I øvrigt er denne rolle godt hjulpet på vej af udviklingen i biologi, hvor især det nye begreb bioinformatics har givet genetikken helt nye perspektiver. Næste nummer af Matilde har som emne netop biologi og matematik.

Som tidligere nævnt ser vi gerne, at Matildes læsere giver deres reaktioner til kende, enten det måtte være i form af debatoplæg, kommentarer til artikler eller andet, eller måske forslag til emner eller artikler, der måtte være af interesse. Et blad som dette, og Dansk Matematisk Forening i det hele taget, er jo et fælles forum for vores fælles interesse i matematikken og dens vilkår i Danmark/verden.

mat

MATILDE – NYHEDSBREV FOR
DANSK MATEMATISK FORENING
medlem af
EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY

Nummer 33
December 2007

ADRESSE:

MATILDE
INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG
KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 KØBENHAVN Ø

FAX: 3532 0704
e-post:
matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Matilde udkommer 4 gange om året

Indlæg til næste nummer skal være redaktionen i hænde senest
fredag 28. marts 2008
Tema: Biologi og matematik

Indhold:

Af: Jens Erik Nielsen
Cand. scient. oecon., Ph.D.
Lokale Pengeinstitutter
Toldbodgade 33, 4. sal
1253 København K.

Udlån og matematik i de mindre danske pengeinstitutter

Med virkning fra 1. januar 2005 blev der indført nye regnskabsregler for indregning og måling (værdiansættelse) af udlån i de danske pengeinstitutter. Formålet med ændringen var at bringe de danske regler i overensstemmelse med de internationale regnskabsstandarder, kaldet IFRS (International Financial Reporting Standards).

En af de væsentlige ændringer ved de nye regler for indregning og måling (værdiansættelse) af udlån var, at man gik fra et forsigtighedsprincip til et "neutralitetsprincip". Forsigtighedsprincippet betød, at pengeinstitutterne kunne (og skulle) hensætte midler til tab, når der var en sandsynliggjort risiko for tab. Forsigtighedsprincippet indebar i praksis et stort element af skøn ved opgørelsen af hensættelserne til tab og dermed også mulighed for at polstre sig til dårligere tider. Neutralitetsprincippet ændrer fundamentalt ved principperne for indregning og måling af udlån og stiller samtidig pengeinstitutternes regnskabs- og revisionsafdelinger overfor en stor matematisk udfordring. Udfordringen består i, at pengeinstitutterne nu ikke længere blot kan anlægge et skøn over de forventede tab. I stedet skal nedskrivningerne efter de nye regler basere sig på matematisk-statistiske modeller, der på baggrund af såkaldte objektive indikationer for værdiforringelse fastlægger, hvor stort nedskrivningsbehovet er (jf. note 1).

De nye regnskabsregler indeholder metodefrihed med hensyn til modelvalg, så længe at regnskabsreglerne overholdes. I praksis er det specielt to metoder, som har fundet vej til de danske pengeinstitutter.

Den ene metode baserer sig på en rating tilgang, hvor lån klassificeres i forskellige ratinggrupper afhængigt af lånenes kreditrisiko. Et nedskrivningsbehov opstår efter denne metode, hvis et lån vandrer fra en ratinggruppe med lav risiko til en ratinggruppe med en højere risiko. Alternativt kan et nedskrivningsbehov opstå som følge af nye tabserfaringer indenfor en given ratinggruppe.

Mindre pengeinstitutter har ikke umiddelbart mulighed for at følge ratingtilgangen, som stiller store krav til pengeinstitutternes dataopsamling samt store krav til det modeltekniske setup. I stedet har mange af de mindre pengeinstitutter valgt en segmenteringstilgang. Segmenteringstilgangen opdeler institutternes udlån i en række grupper, som er homogene med hensyn til kreditrisiko. Ud fra historiske data vil der for hver gruppe blive opstillet en regressionsmodel, hvor en række makroøkonomiske tidsserier beskriver udviklingen i kreditrisiko. Estimaterne herfra kan så anvendes til at bestemme nedskrivningsbehovet i de enkelte grupper.

Værdien af et udlån

Når man skal bestemme, hvad nedskrivningsbehovet for en gruppe af udlån er, må man først analysere, hvad værdien af et udlån er. Set fra pengeinstituttets synspunkt er et lån karakteriseret ved en række fremtidige betalinger. Man kan altså sige, at pengeinstitutterne køber retten til at modtage en række fremtidige betalinger af låntagerne. Spørgsmålet er nu, hvad værdien af et sådant produkt er. Hvis man antager, at låntager overholder sine betalingsforpligtelser, så er værdien af udlånet givet ved den tilbagediskonterede værdi af de fremtidige kontraktlige betalinger, hvilket også kaldes nettonutidsværdien (eller Net Present Value, NPV). Denne kan matematisk skrives som

$$NPV = \sum_{t=1}^{N} (1+r)^{-t} B_t$$

hvor B_t er den kontraktlige betaling der skal falde på tidspunkt t, N er antallet af kontraktlige betalinger og r er diskonteringsrenten. Hvilken rente, der skal benyttes, fremgår af regnskabsbekendtgørelsen. Men et pengeinstitut har jo ikke kun et enkelt udlån. Det har en hel serie af udlån med forskellige løbetider, forskellige kontraktlige betalinger og forskellige rentesatser. Den samlede nettonutidsværdi af et pengeinstituts udlån er summen af samtlige udlåns nettonutidsværdier, hvilket vi kan skrive som

$$\overline{NPV} = \sum_{k=1}^{K} NPV^k = \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{N^k} (1+r^k)^{-t} B_t^k$$

hvor K er antallet af udlån i det pågældende pengeinstitut. Den regnskabsmæssige værdi af samtlige udlån i et pengeinstitut er altså

$$\overline{NPV}.$$

Nedskrivningsbehovet

For pengeinstitutterne er spørgsmålet, hvad der sker med værdien af deres udlån, hvis de kontraktlige betalinger ikke overholdes. Regnskabsreglerne opererer med to tilgange til vurdering af nedskrivningsbehovet. Pengeinstitutterne skal foretage begge disse vurderinger. For det første skal pengeinstituttet foretage en individuel vurdering af sine betydende udlån. I den individuelle vurdering baserer nedskrivningsbehovet sig på en individuel analyse af lånets risiko. For det andet skal pengeinstituttet foretage en gruppevis vurdering af sine udlån. Den gruppevise vurdering omfatter alle individuelt gennemgåede udlån, som ikke er individuelt nedskrevet, og herudover alle instituttets øvrige udlån. Ved den gruppevise vurdering foretages der en gruppevis nedskrivning på en gruppe af udlån i situationen, hvor der indtræffer en objektiv indikation for værdiforringelse, som erfaringsmæssigt har en virkning på størrelsen af de forventede fremtidige betalingsstrømme. I denne situation er det ikke muligt at identificere de lån, hvorpå der vil blive realiseret tab. Det er derimod muligt at knytte nogle objektive tabssandsynligheder til de fremtidige betalinger. Hvis disse sandsynligheder indikerer, at de forventede fremtidige kontraktlige betalinger ikke bliver overholdt i det omfang pengeinstituttet forventede, da lånene blev stiftet, så er der opstået en værdiforringelse af lånene og der vil derfor skulle foretages en gruppevis nedskrivning. Lader vi $\overline{B}_t^k$ være de nye forventede betalinger, vil værdien af bankens udlån være givet ved

$$\overline{NPV} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{N^k}(1+r^k)^{-t}\overline{B}_t^k$$

Regnskabsreglerne siger nu, at nedskrivningsbehovet på udlånene kan beregnes som forskellen mellem $\overline{NPV}$ og $\overline{NPV}$. Fra ovenstående formler kan vi se, at denne værdi er givet ved

$$\overline{NPV} - \overline{NPV} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{N^k}(1+r^k)^{-t}(\overline{B}_t^k - \overline{B}_t^k)$$

Vi ser altså, at nedskrivningsbehovet er givet ved nettonutidsværdien af den del af de fremtidige betalinger, som pengeinstitutterne ikke længere forventer at modtage, idet $\overline{B}_t^k - \overline{B}_t^k$ jo netop er forskellen mellem det man kontraktligt skulle have modtaget, og det man nu forventer at modtage.

Udfordringen for pengeinstitutterne er nu at finde en metode, der kan beskrive forskellen $\overline{B}_t^k - \overline{B}_t^k$. Antages det, at alle fremtidige betalinger forventes reduceret med samme faktor α, kan ovenstående simplificeres. De forventede fremtidige betalinger vil nu være givet ved $\overline{B}_t^k = (1-\alpha)\overline{B}_t^k$ og nedskrivningsbehovet kan nu skrives som

$$\overline{NPV} - \overline{NPV} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{N^k}(1+r^k)^{-t}(\alpha\overline{B}_t^k)$$

Bruger vi nu formlen for $\overline{NPV}$ kan vi skrive

$$\frac{\overline{NPV} - \overline{NPV}}{\overline{NPV}} = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{N^k}(1+r^k)^{-t}\alpha\overline{B}_t^k}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{N^k}(1+r^k)^{-t}\overline{B}_t^k} = \alpha$$

Faktoren α beskriver altså ikke kun den forventede reduktion i alle de fremtidige betalinger, men også det procentvise tab i nettonutidsværdi.

Økonometrisk modellering af tabsprocenter

På baggrund af pengeinstitutternes konstaterede tab og den regnskabsmæssige værdi af deres udlån kan der fremskaffes data til beregning af α tilbage i tiden. Med andre ord, så er det muligt at konstruere en tidsserie, α_1, over historiske tabsprocenter. Med denne viden kan der nu opstilles en model, der ud fra forskellige makroøkonomiske faktorer beskriver tabssandsynlighederne. Ændringer i disse makroøkonomiske faktorer udtrykker, at der er indtrådt en objektiv indikation for værdiforringelse og at der derved kan være opstået et nedskrivningsbehov. Lader vi nu Y_t betegne nedskrivningsbehovet i periode t, kan man opstille en (simpel) økonometrisk model

$$Y_t = f(X_t) + \varepsilon_t$$

hvor *f* beskriver sammenhængen mellem en mængde af makroøkonomiske variable X_t og ε_t er et stokastisk fejlled. Den simple modelform ovenfor kan udstrækkes til endog meget komplekse modeller, hvor der er korrelation mellem fejlledene over tid, hvor der indgår lag (dvs. værdier for tidligere perioder) og ikke-lineære sammenhænge (Se note 2). Sådanne modeller kan ofte estimeres ved brug af statistiske softwarepakker som f.eks. SAS eller SPSS.

Den fremtidige udvikling

Udviklingen i statistiske metoder og opsamling af nye data gør, at de fleste modeller konstant skal udvikles og tilpasses nye forhold. Dette gør sig også gældende for de modeller, der er ved at finde vej ind i pengeinstitutternes regnskabsafdelinger. Som nævnt, så går udviklingen i Danmark i retning af to metoder til regnskabsmæssig vurdering af udlån. Større pengeinstitutter vælger ofte en ratingbaseret tilgang, hvorimod de mindre pengeinstututter ikke har tilstrækkelig størrelse til at kunne udnytte de muligheder, denne metode forventes at give. Derfor baserer en stor del af de mindre danske pengeinstitutter sig på en segmenteringsmodel, der følger de tanker, der er blevet præsenteret i denne artikel.

Noter:

1: www.finanstilsynet.dk. Bekendtgørelse om finansielle rapporter for kreditinstitutter og fondsmæglerselskaber m.fl., § 51, § 52, § 53 og § 54.

2: Se for eksempel Johnston & DiNardo (1997) Econometric Methods, Fourth Edition, McGraw-Hill, New York.

En matematisk ”frihåndstegning”

Af: Anna Marie Mikkelsen
email: amkm@ama.aarhus.dk

Cand. Scient. Oecon. 1989; fuldmægtig ved Århus Sporveje 1989-1992, budgetchef samme sted i 1992, økonomichef fra 1994 og trafikchef fra 2003. Ydelseschef i Århus Kommune fra 2006.

Ved en juridisk kompliceret lov om 300 timers reglen, hvor de fremmeste jurister er uenige om tolkning af loven, udtalte en professor i jura i radioen, at den måde nogle jurister tolker loven på er en ”juridisk frihåndstegning”.

Sagt med andre ord – er det professorens holdning, at de jurister, der tolker loven anderledes end professoren selv, fuldstændig har misforstået lovgivningen – og de må da kunne forstå, at det er forkert.

For en god ordens skyld skal nævnes, at spørgsmålet om den juridiske tolkning endnu ikke er afklaret, og bliver forhåbentlig afklaret i nær fremtid af Ankestyrelsen.

Inden for den juridiske disciplin handler det således om antagelser om ønsket effekt, skrivning af loven, vedtagelse af loven og virkning i samfundet. Der er her mange paralleller til den matematiske verden, hvor der også er tale om studie af årsag og virkning.

Når jeg så begiver mig ud i en matematisk ”frihåndstegning”, så lad det være sagt med det samme, det er ikke en matematisk tolkning. Det primære er gennem et par eksempler, at sætte fokus mod en retning for hvor, hvad og hvordan matematik-økonomi fremadrettet kan videreudvikles, formidles og anvendes.

Både den offentlige sektor og IT-teknologien er inden i en rivende udvikling. Hvor end man ser hen, er der talrige muligheder for at anvende den matematisk-økonomiske disciplin og tankegang. Det er så spørgsmålet, om der skal nye organisationsformer og samspilsformer til for proaktiv at påvirke udviklingen til gavn for samfundet generelt.

Kollektiv trafik

Kollektiv trafik er et område, hvor såvel planlægning som teknologi appellerer til udfordringer for planlæggere og ingeniører. Der er operationsanalytiske modeller, der kan anvendes som støtte til at træffe beslutninger på såvel det strategiske, det taktiske og det operationelle niveau.

Begreberne er for eksempelvis ruteplanlægning, køreplanlægning, vognplanlægning, mandskabsplanlægning og daglig tjenesteplanlægning. Foruden de økonomiske planlægningsmæssige problemstillinger, er der tilsvarende matematisk-indtægtsmæssige overvejelser for sammensætning af takstsystemer, som kunderne finder acceptable og som optimerer indtægtsprovenuet.

Det er alle begreber, som er velkendte og klassiske fra den operationsanalytiske litteratur. Det er begreber, der i forskellige organisationer arbejdes med på mange forskellige kompetenceniveauer. Den matematiske kompleksitet er høj, og for en almindelig driftsorganisation handler det ofte om at træffe hverdagens beslutninger uden kendskab til den matematiske kompleksitet.

Aktørerne er mange

Aktørerne indenfor dette operationsanalytiske felt er mange – der er forskere, ”algoritme-huse”, softwareudviklere, konsulenter og driftsorganisationer indenfor kollektiv trafik.

Ud fra flere års kendskab til den kollektive trafik er det indtrykket, at det kun er få steder i verden, hvor man er i front på det forskningsmæssige område indenfor disse typer planlægning. Det er indtrykket, at omsætningen af forskning og resultater i anvendelsesorienterede IT-systemer, der kan anvendes af en almindelig bruger uden operationsanalytisk viden, også kun sker få steder.

En indsigt i hvor der sker en udvikling, kan man få ved at følge de internationale konferencer ”Computer-aided Systems in Public Transport”. Den teknologiske udvikling, med stadig kraftigere og hurtigere computere, betyder, at flere forskningsresultater omkring algoritmer til løsning af disse planlægnings-problemstillinger kan omsættes til udvikling af IT-systemer til salg i branchen indenfor kollektiv trafik.

Det er dygtigt gjort, at de forskningsmæssige oprationsanalytiske resultater er omsat til kommerciel anvendelse. Det har imidlertid den betydning, at nye forskningsresultater omkring smartere udvikling af algoritmer, der via software omsættes til IT-produkter ikke nødvendigvis fortsat bliver fuldt ud offentlig tilgængelig, da en virksomheds produktion og salg af egne IT-produkter beskyttes mod konkurrenter. Et forhold der i den sidste ende kan blive begrænsende for den almene udvikling.

Projektorienterede organisatoriske matrixmodeller

Forskning indenfor matematik-økonomi er en uundværlig del for at sikre den langsigtede udvikling og fremdrift i et samfund. Det er dog værd at overveje nye typer af matrixorganisationer for sikring af fremdrift og overgang fra de forskningsmæssige resultater og til proaktiv fremdrift i anvendelsen af de forskningsmæssige resultater i samfundet, herunder et feedback til de forskningsmæssige områder og den videre udvikling.

Her har kommunikation og formidling en stor rolle. Operationsanalysen, som en del af det matematisk-økonomiske område, har så høj en kompleksitet, at en operationsanalytiker har vanskelig ved at forklare personer, der ikke er matematisk orienteret, hvad det er vedkommende arbejder med, og hvilke resultater der er opnået.

En ny model for sikring af langt større anvendelse af de operationsanalytiske resultater på forskellige forskningsområder, kunne være gennem etablering af projekter på tværs af organisatoriske strukturer og kompetencer.

For eksempel kunne der arbejdes med en model, hvor der i en matrixorganisation sammensættes operationsanalytikere, eksperter indenfor anvendt datalogi, konsulenter, softwareudviklere, personer med branchekendskab samt ikke mindst kommunikationsfolk. En gruppe, der fik et samlet fastsat mål om at omdanne forskningsresultater til konkret anvendelse og dernæst til fastlæggelse af nye mål for forskningsområder.

Kommunikation er en ny og væsentlig del af dette. For uden god, præcis og letforståelig kommunikation af resultater, vil resultaterne ofte få vanskelig ved at nå ud.

Det sociale område

Et andet område indenfor den offentlige sektor hvor anvendelse af IT-teknologi er i udvikling er det sociale område. Det er et område, hvor der hidtidig har været begrænset anvendelse af matematisk-økonomisk tankgang i løsning af opgaverne. Det sociale område er typisk karakteriseret ved, at det handler meget om de såkaldt bløde samfundsmæssige områder - mennesker, deres aktuelle situation og deres fremtidige muligheder. Man kan derfor stille det spørgsmål – har det virkelig mening at anvende den matematiske tankegang indenfor det sociale område? Svaret er ja.

Hver dag sidder der rigtig mange offentlige ansatte og laver daglige vurderinger omkring menneskers situation indenfor det sociale område. Det er personalegrupper som jurister, læger, psykologer, socialrådgivere, administratorer m.fl. der arbejder indenfor dette felt.

For nogle af de sociale områder gælder det fastlæggelse af handleplaner og tiltag for det enkelte menneske. For andre dele af det sociale område handler det om økonomien for det enkelte menneske i form af hvilke økonomiske ydelser, der stilles til rådighed for de svageste grupper i vores samfund for at hjælpe dem i gang igen. Og for helt tredje områder handler det om til stadighed at kunne dokumentere virkning og effekt af forskellige tiltag for forbedring af forhold for mennesker.

Den i indledningen omtalte 300 timers regel er et eksempel på en regel indenfor det sociale område, der ikke alene er juridisk teknisk kompleks at tolke men også beregningsteknisk og administrativ kompleks.

Disciplinen matematik-økonomi anvendes ikke meget indenfor området i dag, men den teknologiske udvikling indenfor IT og den stigende brug af internet understøtter perspektivet i at tænke i helt nye retninger for udvikling og arbejdsgange.

Prøv en gang at lade en forsker indenfor matematik-økonom lægge de operationsanalytiske formler til side for en stund, stoppe op, og lave et studie af for eksempel Lov og social service. Her vil matematikeren kunne konstatere, at der er tale om en komplekse lovgivninger og administrationen heraf er tilsvarende kompleks.

Lad så eksempelvis matematik-økonomen oversætte juraen i Lov om social service i matematiske formler og økonomiske slutninger. Et resultat der herefter kan omdannes til et IT-program af specialister inden for anvendt datalogi.

Igen kunne en projektorienteret sammensætning af en matrixorganisation nedsættes med et formål om at skabe nye resultater være interessant. En proces hvor personer med viden indenfor matematik-økonomi, anvendt datalogi og jura kan være med til at forenkle processer omkring oversættelse af lovgivning til administrative systemer. Inden for ydelsesområder som for eksempel udbetaling af kontanthjælp og sygedagpenge er det tiltag, der både kan forbedre service og afklaring for den enkelte borger og effektiviteten i den offentlige organisation af betydning.

Den ultimative løsning vil være, at lovgrundlaget er omsat i matematiske formler, der danner baggrund for, at der inden for anvendt datalogi udvikles IT-systemer, således at borgeren kan få sin sag afklaret samme dag, som borgeren møder frem.

Mange projekter at tage fat på

Matematik handler meget om studie og beskrivelse af årsag og virkning i den fysiske og virkelige verden. Det handler om logik, hvad må antages, hvorledes skal holdes styr på definitioner og andre forudsætninger, og hvorledes bliver så virkningen i den virkelige verden.

Derfor tag initiativ til etablering af projekter, hvor der sker sammenkædning af den matematisk-økonomiske tænkning med anvendt datalogi og andre akademiske discipliner, konsulenter og driftsorganisationer. Der er mange områder, hvor det nuværende teknologiske niveau kan understøtte en digitalisering af arbejdsgange og formidling via personlige indgange på internettet.

Det er tid at tænke i nye måder at udvikle på, og der er mange af projekter at tage fat på.

Regnskab og matematik

Af John Christensen
Syddansk Universitet
email: jcn@sam.sdu.dk

1 Introduktion

Nu er det snart 35 år siden jeg forlod Århus Universitet som den første matematik økonom. Det giver anledning til at reflektere over, hvordan jeg har anvendt matematik, som dog var en hovedbestanddel af min uddannelse. Jeg blev kort efter kandidateksamen ansat ved det daværende Odense Universitet til bl.a. at forske i regnskabsvæsen. Jeg blev hængende der og er i dag professor i regnskab ved Syddansk Universitet.

For 35 år siden var indholdet af matematik, der blev anvendt i forskningen i regnskab særdeles begrænset, og dette måske på trods af, at det moderne bogholderi og dermed det moderne regnskab blev grundlagt af en italiensk matematiker ved navn Pacioli i 1594. Anvendelsen af matematik er der rådet bod på i de sidste 35 års forskning, og nu er matematik ofte anvendt på et ret højt niveau i en stor mængde af den internationale forskning. Jeg vil i denne korte artikkel beskrive, hvordan min matematiske grunduddannelse har været anvendt i min forskning og hvordan den har hjulpet mig til at forstå regnskabets rolle bedre. Bemærk venligst at ingen formuleringer er fuldstændig stringente. Det kan gøres, men her er hovedsigtet udelukkende at illustrere anvendelsen af matematik til analysen af regnskabet og da er stringens ikke hensigtsmæssig.

2 Regnskabsteori

På overfladen er regnskabet et kedeligt emne at studere, da det for den udenforstående blot handler om at registrere de økonomiske transaktioner, der har fundet sted i en virksomhed i en given periode. Der kan gå megen tid med at diskutere hvilken konto en given transaktion skal henføres til. Det er typisk en diskussion, der drejer sig om hvilken type transaktion, den foreliggende ligner mest. Lidt overordnet er det en lidet frugtbar diskussion.

Regnskabet er ikke et økonomisk gode, der er af værdi i sig selv, men et gode der kun får værdi i det øjeblik, det anvendes som beslutningsgrundlag til at forbedre beslutninger. I lidt videre perspektiv giver regnskabet information til anvendelse i beslutningsprocessen. Den typiske målsætning, der skal forfølges ved disse beslutninger, er langsigtet profitmaksimering. Nu er det ikke sådan at regnskabet skal vise den optimale beslutning; regnskabet er en database af de økonomiske transaktion, der har fundet sted i fortiden, og det gode spørgsmål er, hvilken information man kan få ved at analysere regnskaber. Det vil sige, at regnskabet er information der skal hjælpe med til at tage beslutninger af økonomisk karakter. Det betyder, at hvis man vil studere regnskabet, skal det analyseres i sammenhæng med virksomhedens økonomiske beslutninger. Regnskabet er så en informationskilde der kan anvendes i forbindelse med beslutningerne.

3 En model af virksomheden

Udgangspunktet for mange af mine analyser af regnskabet er en model af en virksomhed og dens beslutningsproblem. Kunsten er her at gøre modellen interessant samtidig med at den kan analyseres. Den skal derfor være tilstrækkelig simpel. Mange overvejelser og forsøg har vist at en model af følgende form er tilstrækkelig for mange formål, når sigtet er at analysere produktomkostninger i forskellige sammenhænge.

$$\max \sum Pq - \sum c_i x_i$$

under bibetingelserne

$$Aq \leq f(x)$$

Denne model giver en repræsentation af virksomhedens beslutningsproblem, hvor kun produktionsfaktorerne og virksomhedens output indgår. Transformationsprocessen (produktionsprocessen) er beskrevet i bibetingelserne. Der er følgelig ikke behov for en egentlig omkostningsfunktion eller produktomkostninger. Ved en transformation kan problemet omformuleres til at omfatte en egentlig omkostningsfunktion, og den vil da tage følgende form:

$$C(q) = \qquad \min \sum c_i x_i$$

under bibetingelserne

$$Aq \leq f(x)$$

Det oprindelige problem bliver nu:

$\max \sum Pq - C(q).$

Bemærk, her er ikke antaget en lineær omkostningsfuntion på trods af, at det ofte er tilfældet inden for faget regnskab. Modellen tillader substitution mellem forskellige produktionsfaktorer her symboliseret ved x vektoren og omkostningsfuntionen afspejler et til enhver produktion optimalt mix af inputfaktorer. Det er ingen tilfældighed; uden alternative muligheder for sammensætning af produktionsprogram er der intet økonomisk problem. For økonomer er de marginale omkostninger vigtige, fordi de vejleder i forbindelse med kortsigtet tilpasning, og de kan findes som

$\frac{\partial C(q)}{\partial q_i} = \lambda A_i$

hvor λ er Lagrangemultiplikatoren på bibetingelsen og A_i er den i´te søjle i koefficient matricen. Der er altså tale om lineræe marginalomkostninger i en vis forstand. Det er vigtigt at bemærke, fordi mange regnskabsprocedurer anvender linearitet. Det er også vigtigt at bemærke, at der er sammenhæng mellem marginalomkostningerne på de enkelte produkter; Lagrange multiplikatorerne genanvendes mens koefficientmatricen beskriver produkternes forskellighed.

4 Mere struktur - flere afdelinger

Mere struktur gør det muligt at sige mere. Specifikt vil jeg her kort anvende min simple model til at illustrere, hvordan man kan analysere det moderne Activity Based Costing - ABC regnskab. Til det formål udviddes strukturen i produktionsbegrænsningerne til at beskrive en virksomhed med flere afdelinger. Konkret antages, at der er to producerende afdelinger, og en der fungerer som en serviceafdeling der kun leverer ydelser til de to producerende afdelinger. Bibetingelserne beskriver denne struktur. Det betyder, at min model af virksomhedens omkostninger får følgende udseende:

$C(q) = \quad \min \sum c_i x_i$

under bibetingelserne

$a_1 q \le f(x_1, x_2, x_3)$

$a_2 q \le g(x_4, x_5, x_6)$

$x_3 + x_6 \le h(x_7, x_8)$

Igen er det muligt at udtrykke marginalomkostninger ved hjælp af Lagrange multiplikatorerne og det giver igen et lineært udtryk:

$MC_i = \frac{\partial C(q)}{\partial q_i} = \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i}$

Marginalomkostningen har her et specielt simpelt udseende. De er lineære og kun Lagrange multiplikatorerne for de to første bibetingelser indgår. Den tredje begrænsning indgår kun implicit. Produkternes forskellighed i forhold til marginal omkostningerne er beskrevet af koefficienterne i a-vektorerne.

Nu til lidt regnskab og specielt ABC-regnskab. Omkostninger opsamles på i regnskabet konti, og man skal i den forbindelse forestille sig, at der er en konto pr. afdeling eller pr. bibetingelse i ovenstående optimeringsproblem. For eksempel opsamles følgende i afdeling 1: $omk_1 = c_1x_1 + c_2x_2$, i afdeling 2 opsamles: $omk_2 = c_4x_4 + c_5x_5$ og i afdeling 3 opsamles: $omk_3 = c_7x_7 + c_8x_8$. Det er de fundamentale registreringer i regnskabssystemet. På basis af disse registreringer ønsker virksomheden at estimere marginalomkostningerne, der skal anvendes til beslutningstagen. En nærliggende løsning vil være at fordele omkostningerne fra afdeling 3 til de to producerende afdelinger og her vil en fordeling baseret på forbrug (x_3, x_6) være en oplagt mulighed. Dette vil være en stiliseret version af et Activity Based Costing (ABC)-regnskabssystem. Et sådant system er meget anvendt i praksis.

Et klassisk alternativ vil være at fordele samtlige omkostningerne fra de tre afdelinger til produkterne baseret på eksempelvis produkternes forbrug af direkte arbejdskraft målt i kroner. Et klassisk regnskabssystem er ofte opbygget på denne måde.

I det givne eksempel er det indlysende, at årsagssammenhængen mellem serviceafdelingens omkostninger og de producerende afdelingers aktivitetsniveau beskrives af det anførte forbrug (x_3, x_6).Det taler til fordel for et ABC regnskabssystem og der er blevet argumenteret for anvendelse af denne fordelingsnøgle i forbindelse med markedsføring af ABC-regnskabssystemet.

I denne simple matematiske struktur er det muligt at analysere meritterne af et ABC-regnskabssystem og finde ud af om det er bedre til at estimere produktomkostninger end et klassisk system. Hvis der er tale om lineære produktionsfunktioner (f, g, h) er det næsten trivielt at vise, at ABC regnskabet dominerer det klassiske. På den anden side er det ikke nødvendigvis tilfældet, hvis produktionsfunktionerne ikke alle er lineære. Det er let at producere eksempler, hvor det klassiske regnskabssystem er bedst.

I denne forbindelse er det værd at bemærke, at de fremførte begrundelser for at virksomheder er store og producerer mange produkter er at det er økonomisk fordelagtigt. Det betyder, at produktionsfunktioneren (f, g, h) ikke alle kan være lineære. Dermed kan det konkluderes at svaret på hvilket regnskabssystem der er bedst afhænger af de konkrete produktionsfunktioner. Et argument der udelukkende tager udgangspunkt i strukturen i produktionsprocessen er ikke tilstrækkeligt.

Intern afregning mellem økonomiske enheder er ofte et problem, der giver anledning til ophidsede debatter. Eksempler på sådanne interne afregninger findes i mange udgaver i den offentlige sektor og kan have karakter af en refusion af omkostninger. Der er således i princippet tale om omkostningsrefusion, når patienter behandles på et hospital i en anden region end den hvor patienten er hjemmehørende. Undervisning på uddannelser, der omfatter flere fakulteter, er et andet eksempel. Også i denne sammenhæng anvendes ofte simple modeller til denne interne afregning, og der er næsten altid tale om en linær afregning. Ovenstående simple model kan også anvendes til at analysere dette problem. Der er atter nogle direkte produktionsfaktorer, der umiddelbart kan knyttes sammen med produktionen. Der er løn, materialer og produktionen beskrevet ved produktionsfunktionerne (f og g). Der er også en del af produktionen, der ikke direkte kan knyttes til produktionen og disse har karakter af forskellige serviceydelser. De er symboliseret ved produktionsfunktionen h.

Afregningen skal som hovedregel baseres på objektive kendsgerninger og enhedens opgørelse af omkostninger på de tre ovennævnte kategorier kan anvendes. Spørgsmålet er blot hvordan. Det kan ligeledes konstateres, hvordan de to typer af serviceydelser eller produkter har trukket på de to produktionsfunktioner (f og g). Endelig kan det konstateres, hvordan de to produktionsfunktioner (f og g) har trukket på serviceafdelingen.

Formålet med afregningen er at sikre at produktionen foregår efficient således at omkostninger minimeres. Det skal sikres, at der ikke refunderes for "meget" samtidig med at organisationens overskud maksimeres.

Dette giver ikke anledning til konflikt, hvis det igen er tale om lineære produktionsfunktioner (f, g, h) eller hvis der er tale om aftagende skalaafkast i de to primære produktionsfunktioner (f, g). I alle andre tilfælde vil den foreslåede afregningsmetode lede til inefficiens. Det hænger sammen med, at virksomheden vil søge at producere mere i de produktionsprocesser, hvor der er voksende skalaafkast og viderefakturere produktionen til den anden enhed. Hvis der er aftagende skalaafkast i serviceafdelingen, h, vil virksomheden producere mindre af denne serviceydelse. De ydelser substitueres med at dyrere produktionsprocesser til de serviceydelser, der viderefaktureres. Pointen er, at denne anvendelse af en tilsyneladende præcis beskrivelse af de faktiske sammenhænge i produktionen som basis for en refusionsordning ikke nødvendigvis leder til efficiens. I et forsøg på at opnå den maksimale profit vil virksomheden anvende et ikke efficient produktionsprogram. Der anvendes flere eller dyrere resourcertil den produktion der er omfattet af refusionsordningen. Resultetet er at sikre at den produktion af serviceydelser, der medgår til den primære produktion bliver produceret billigere.

Hvad er alternativet? Et alternativ, der kan overvejes, er at anvende en simplere metode som basis for omkostningsrefusionen. Konkret kan man forestille sig at refusionen udelukkende baseres på forbruget af de direkte løntimer, og omkostningerne fra ovennævnte produktionsprocesser (f, g og h) dækkes via et tillæg til de direkte løntimer. Det er for eksempel det, der sker på et vilkårligt autoværksted. Hvis denne metode anvendes vil virksomheden forsøge at overforbruge lidt af de direkte løntimer, men al anden produktion, der anvender produktionsprocesserne (f, g, h) vil ikke være ramt af inefficient faktorforbrug.

Svaret på om den ene eller den anden metode skal anvendes som basis for refusionen blive et spørgsmål om, hvor det er lettes at kontrollere virksomheden. Som ovennævnte historie er skruet sammen, bliver det et spørgsmål om, hvorvidt der er bedst mulighed for at sikre minimal inefficiens i anvendelsen af løntimer eller i anvendelsen af de tre processer (f, g, h). Dette problem er en del af et større problemkompleks, der går under navnet principal agent problemet. Den model har været anvendt til at studere virksomhedens kontrolproblem med henblik på at forstå motivation af medarbejdere eller incitamentproblemer i virksomheden ud fra en økonoms synsvinkel. Det giver jeg en kort beskrivelse af neden for.

5 Agent problemet

Principal agent problemet er det problem en arbejdsgiver (principal) står overfor, når han ønsker at ansætte en agent til at udføre et stykke arbejde for sig. Spørgsmålet er, hvordan en optimal ansættelseskontrakt sammensættes. Det antages, at resultatet, x, af indsatsen i virksomheden er stokastisk, og at dette resultat skal deles mellem de to parter, hvor agenten får $s(x)$. I de fleste tilfælde antages agenten at være risikoavers, således at der skal betales en risikopræmie for at få agenten til at påtage sig en risiko. Agenten antages også at være arbejdsavers (i det mindste på marginalen), således at han foretrækker mindre arbejde for mere. Samlet betyder dette at agentens præferencer kan beskrives ved en nyttefunktion (konkav) der afhænger af løn, $s(x)$ og a. Principalen eller ejeren af virksomheden antages risikoneutal. Dette er en simplificerende antagelse, der ikke er nødvendig men praktisk. Agenten har mulighed for at søge beskæftigelse andetsteds og derfor skal agenten have forventning om mindst det samme udkomme af at arbejde for virksomheden, som hvis han gik til en alternativ arbejdsgiver. Dette beløb svarer til at han opnår "nytten" $U(M)$, hvor M symboliserer markedsaflønningen. Desuden skal agenten betales en kompensation for de leverede anstrengelser, således at den smalede velfærd for agenten når op på det alternative niveau. Til slut antages, at det ikke kan observeres hvilken indsats, a, der leveres af den ansatte agent. Det betyder, at det resultat, der opnås i virksomheden, skal anvendes som basis for aflønning af agenten. Der skal således laves en resultatlønskontrakt.

Formelt set får programmet til bestemmelse af den optimale aflønningskontrakt følgende udseende:

Find det sæt af $a, s(x)$, der løser følgende:

$$\max[E(x - s(x))]$$

under bibetingelserne

$$E[U(s(x),a)] \geq E[U(M),a_0)]$$

$$a \in \arg\max E[U(s(x),a)]$$

Det bemærkes, at der tages forventning over virksomhedens resultat, x, og fordelingen af x afhænger af det valgte a. Før løsning erstattes bibetingelsen om valg af a af den tilsvarende første ordens betingelse. Under et passende sæt af antagelser er det tilladeligt. Problemet kan løses ved en anvendelse af variationsregning eller kontrolteori. Løsningen er fra mange synsvinkler interessant og kan karakteriseres ved følgende udtryk:

$$\frac{1}{U'(s*(x))} = \lambda + \mu \frac{f_a(x|a)}{f(x|a)}; \forall x \in X.$$

Det bemærkes, at venstresiden afhænger af agentens risikopræferencer, mens højre siden udelukkende afhænger af Lagrange multiplikatorerne på de to to bibetingelser (λ og μ) og af tæthedsfunktionen for x der igen afhænger af den valgte handling. Det sidste led kan genkendes som en likelihood ratio og kan fortolkes som informationsindholdet i x om a. Denne tolkning får en række interessante konsekvenser for forståelsen af regnskabssystemets rolle som en del af virksomhedens kontrolsystem.

Hvis agenten ikke er arbejdsavers vil Lagrange multiplikatoren på den anden bibetingelse være $\mu = 0$. Det betyder, at agenten aflønnes med en konstant uafhængigt af resultatets størrelse. Incitamentbetaling er unødvendig, og der opnås optimal risikodeling. Den risikoneutrale principal (virksomhed) tager hele risikoen. Hvis de personlige omkostninger, der er forbundet med arbejde og der fuldstændigt bæres af agenten, konvergerer mod 0, vil aflønningen som funktion også konvergere mod en konstant aflønning.

Hvis x er ekstremt informativ, således at x fuldstændig afslører den valgte handling vil den optimale aflønning ligeledes være en konstant. Her gælder ligeledes en konvergens, således at et mere informativt x om den valgte handling a vil lede til at mindre risiko er pålagt den ansatte agent. Det betyder en billigere forventet aflønning og dermed et bedre resultat for ejeren. Den ansatte er indifferent og har altid en nytte på $U(M)$.

Hvis agentens risikoaversion går mod nul vil den samlede løsning til agentproblemet konvergere mod den optimale løsning for det problem, hvor alle kan observere den valgte handling. Denne løsning vil bestå i at sælge virksomheden til den ansatte agent.

Disse tre partielle analyser af den optimale aflønningskontrakt viser, at hver af de to personer i denne organisation bidrager på hver sin måde til fællesskabet. Principalen, der er risikoneutral bidrager med villighed til at bære risiko, mens agenten bidrager med arbejdskraft. Aflønningskontrakten er et resultat af en afvejning af disse to forhold.

En konsekvens af dette er, at det er ikke resultater, der tæller i forbindelse med valg af aflønningskontrakt. Det er ikke sådan, at et større resultat x fører til en højere løn. Det er derimod informationsindholdet i resultatet om det valgte a, der afgør lønnens størrelse. En større likelihood-ratio fører til en højere løn.

Den for regnskabet vigtige konsekvens af ovenstående første ordens betingelse er, at en ny informationsvariabel, y, er værdifuld for organisationen, hvis den bibringer ny information om den ikke observerbare handling, a, som ikke er indeholdt i virksomhedens resultat, x. Det har betydning for, hvilken information man skal lede efter, hvis man ønsker at forbedre værdien af virksomhedens regnskabssystem. Pointen er, at ovennævnte y er af værdi uanset agentens risikopræferencer.

Inden jeg forlader virksomhedens kontrolproblem skal jeg kort vende tilbage til refusionsproblemet, der blev behandlet tidligere. I det beskrevne problem er virksomhedens produktionsfunktion ukendt for opdragsgiver og kun de realiserede omkostninger er kendt. Dertil kommer så en usikker viden om niveauet for omkostningerne vil være kendt i form af en apriori sandsynlighedsfordeling. Hvorvidt man skal lade refusionen afhænge af lønomkostninger eller de andre omkostningskategorier afhænger dermed af spredningen på apriodifordelingen.

6 Konklusion

Artiklen her har været en lille smagsprøve på de modeller jeg har anvendt i min forskning i virksomhedens regnskab. Problemerne her er knyttet til opgørelse af produktomkostninger og incitamentproblemer. Modelmæssigt anvender analysen af de to problemkomplekser forskellige modeller, men i virkeligheden er de to snævert knyttet sammen. Der er for begge omremset nogle af de konklusioner analysen af de to problemstillinger har givet anledning til.

Når jeg analyserer et konkret regnskabsmæssigt problem er udfordringen at konstruere den simplest mulige model, der indeholder det given problem og som samtidigt er generel nok til at have udsagnskraft der taler til det analyserede problem. Modellen skal kunne analysere og derfor må den ikke være for kompleks. Modeller der anvendes til at studere regnskaber skal ofte dels have en beskrivelse af virksomhedens økonomi og dels have en beskrivelse af hvordan regnskabssystemet afbilder denne økonomi, herunder hvilke konsekvenser for beslutningstagen alternative regnskabssystemer vil have. Modellen skal dybest set udelukkende anvendes til at uddanne vores intuition for den studerede type af problemer.

Hvilke del af min matematiske uddannele har jeg så anvendt. Jeg tror næppe, der er dele af den grunduddannelse jeg fik i sin tid, som jeg ikke har anvendt. Sandsynlighedsregning og statistik anvendes ofte, fordi beskrivelse af et regnskabssystem leder til en beskrivelse af et informationssystem. Det kræver en beskrivelse, der omfatter et sandsynlighedsrum med alt hvad der dertil hører. Som økonom tror man på, at vi alle stræber efter en rationel adfærd og en beskrivelse af det, leder til anvendelse af nyttefunktioner og forventninger i form af sandsynlighed, som kan være af såvel objektiv som subjektiv karakter. Savage's Foundation of Statistics fra 1954 er en fundamental kilde. Beskrivelse af rationalitet leder ofte til formulering af optimeringsproblemer og de vildeste omfatter optimering i funktionsrum.

7 Litteratur i udvalg

Christensen, J. og J.S.Demski: Accounting Theory. An Information Content Perspective, (co-author Joel S. Demski.),McGraw-Hill/Irwin, 2003, pp 1- 465

Christensen, J. og J.S.Demski: Factor Choice Distortion under Cost-Based Reimbursement, (co-author Joel S. Demski.), Journal of Management Accounting Research, 2003, pp 145-160

Meddelelse:

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs tidsskrifter har været svært tilgængelige rundt omkring i verden, og selv om et stort antal artikler hører til de mest citerede inden for deres felt, er det langt fra sikkert, at de også hører til de mest læste. Det har Selskabet nu taget konsekvensen af med at lægge Matematisk Fysiske Meddelelser bind 1-50 fra 1917 til 2002 paa internettet,
http:/www.sdu.dk/Bibliotek/matfys
hvor enhver kvit og frit kan downloade artiklerne uden password og accesskode. Enkelte artikler mangler endnu men vil snart blive sat ind. De seneste bind er dog ikke frit tilgængelige men skal købes, inden karenstiden på fem år er ovre. På indeværende tidspunkt er der også planer om at gøre Matematisk Fysiske Skrifter tilgængelige.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. [illegible]

SUR LA MULTIPLICATION DE SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES

PAR DES SÉRIES SOMMABLES PAR LA MÉTHODE DE CESÀRO

PAR

A. F. ANDERSEN

KØBENHAVN

[illegible]

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

[illegible]

Interview with Abel prize recipient

Srinivasa Varadhan

**Conducted by Martin Raussen (Aalborg, Denmark)
and Christian Skau (Trondheim, Norway)**

Oslo, May 21, 2007

This interview has also appeared in the EMS newsletter

Professor Varadhan, first of all I would like to congratulate you for having been awarded the Abel Prize this year.
By extension, my congratulations go to the field of probability and statistics since you are the first recipient from this area. Incidentally, last year at the International Congress of Mathematicians in Madrid, Fields medals were given to mathematicians with expertise in this area for the first time, as well.
How come that it took so long time before probability and statistics were recognized so prestigiously, at the International Congress of Mathematicians last year and with the Abel Prize this year? Is it pure coincidence that this happens two years in a row? Could you add some comments on the development of the relations between probability and statistics on the one hand and the rest of mathematics on the other hand?

Probability became a branch of mathematics very recently in the 1930s after Kolmogorov wrote his book. Until then it was not really considered as a proper branch of mathematics. In that sense it has taken some time for the mathematical community to feel comfortable with probability the way they are comfortable with number theory and geometry. Perhaps that is one of the reasons why it took a lot of time.

In recent years probability has been used in many areas. Mathematical finance for example uses a lot of probability. These days, probability has a lot of exposure and connections with other branches of mathematics have come up. The most recent example has to do with conformal invariance for which the Fields medal was given last year. These connections have brought probability to the attention of the mathematics community, and the awards are perhaps a reflection of that.

Career

The next question is about your career. You were born in Chennai, the capital of Tamil Nadu, on the South-East coast of India, in 1940. You went to school there and then to the Presidency College at Madras University. I would like to ask you about these formative years: What was the first reason for your interest in mathematical problems? Did that happen under the influence of your father, who was a teacher of mathematics? Were there other people, or were there specific problems that made you first interested in mathematics?

My father was in fact a teacher of science, not so much mathematics. In my early school days I was good in mathematics, which just meant that I could add, subtract and multiply without making mistakes. Anyway I had no difficulty with mathematics. At high school I had an excellent mathematics teacher who asked some of his better students to come to his house during weekends, Saturday or Sunday, and give them extra problems to work on. We thought of these problems just as intellectual games that we played, it was not like an exam; it was more for enjoyment. That gave me the idea that mathematics is something that you can enjoy doing like playing chess or solving puzzles. That attitude made mathematics a much more friendly subject, not something to be afraid of, and that played a role in why I got interested in mathematics.

After that I went to college for five years. I had excellent teachers throughout. By the time I graduated with a master degree in statistics, I had three years of solid grounding in pure mathematics. My background was strong when I graduated from College.

Was there a specific reason that you graduated in statistics rather than in other branches of mathematics?

The option at that time was either to go into mathematics or into statistics. There was not that much difference between these two. If you went into mathematics, you studied pure and applied mathematics; if you went into statistics, you studied pure mathematics and statistics. You replaced applied mathematics with statistics; that was the only difference between the two programs. Looking back, part of the reason for going into statistics rather then mathematics, was the perception that if you went into statistics your job opportunities were better; you could be employed in the industry and so on. I f you went into mathematics, you would end up as a school teacher. There was that perception; I do not know how real it was.

With your degree in statistics it seemed quite natural that you continued at the Indian Statistical Institute at Kolkata. There you found yourself quite soon in a group of bright students that, seemingly without too much influence from their teachers, started to study new areas of fundamental mathematics and then applied those to problems coming from probability theory; with a lot of success:
You were able to extend certain limit theorems for sto-

chastic processes to higher dimensional spaces; problems that other mathematicians from outside India had been working on for several years without so much success. Could you tell us a bit about this development and whom you collaborated with?

The Indian system at that time was very like much the British system: If you decided to study for a doctoral degree, there were no courses; you were supposed to do research and to produce a thesis. You could ask your advisor questions and he would answer you, but there was no formal guidance as is the case in the USA for example. When I went there I had the idea that I would be looking for a job within some industry. I was told that I should work on statistical quality control, so I spent close to 6 or 8 months studying statistical quality control; in the end, that left me totally unsatisfied.

Then I met Varadarajan, Parthasarathy and Ranga Rao, who worked in probability from a totally mathematical point of view. They convinced me that I was not spending my time usefully, and that I better learn some mathematics if I wanted to do anything at all. I got interested, and I think in the second year I was there, we said to ourselves: let us work on a problem. We picked a problem concerning probability distributions on groups. That got us started; we eventually solved the problem and in the process also learned the tools that were needed for it.

It was a lot of fun: the three of us constantly exchanged ideas starting at seven o'clock in the morning. We were all bachelors, living in the same dormitory. The work day lasted from 7 am to 9 pm; it was a terrific time to learn. In fact, the second paper we wrote had Abel in its title, because it has something to do with locally compact abelian groups.

From what you tell us, it seems that your work can serve as an example for the fact that the combination of motivations and insights from real world problems on the one hand and of fundamental abstract mathematical tools on the other hand has shown to be extremely fruitful. This brings me to a question about the distinction between pure and applied mathematics that some people focus on. Is it meaningful at all - in your own case and maybe in general?

I think that distinction, in my case at least, is not really present. I usually look at mathematics in the following way: There is a specific problem that needs to be solved. The problem is a mathematical problem, but the origin of the problem could be physics, statistics or could be another application, an economic application perhaps. But the model is there, and it is clear what mathematical problem you have to solve. But of course, if the problem came from physics or some application, there is an intuition that helps you to reason what the possible answer could be. The challenge is how to translate this intuition into rigorous mathematics. That requires tools, and sometimes the tools may not be around and you may have to invent these tools and that is where the challenge and the excitement of doing mathematics is, as far as I am concerned. That is the reason why I have been doing it.

India and the 3rd world

May I come back to your Indian background? You are the first Abel Prize recipient with an education from a 3rd world country. In 1963, you left Kolkata and went to the Courant Institute of Mathematical Sciences in New York, where you still are working. I wonder whether you still strongly feel your Indian background - in mathematics, in training, your life style, your religion and philosophy?

For 23 years, I grew up in India, and I think that part of your life always stays with you. I am still very much an Indian in the way I live. I prefer Indian food to anything else, and I have some religious feelings about Hinduism and I am a practising Hindu. So my religious beliefs are based on my real life, and my lifestyle is very much Indian. But when you are living in the United States you learn to adjust a little bit, you perhaps have a combination of the two that you are comfortable with.

My training in India has been mainly in classical analysis. No matter what you do, even if you do the most abstract mathematics, you use it as a tool. At crucial points, I think you need to go back to your classical roots and do some tough estimates here and there; I think the classical training definitely helps there. The abstract mathematical tools then help you to put some results in perspective. You can see what the larger impact of what you have done is. To assess that, modern training gives you some help.

The best known Indian mathematician of the past, at least here in the West, is certainly Srinivasa Ramanujan. He is known both for his very untraditional methods and results, and his note books are still studied by a lot of mathematicians around the world. He is certainly also known for his tragically fate and his untimely death. Has he played a specific role in your life as a role model? Is that still true for many Indian mathematicians?

I think the name of Ramanujan has been familiar to most Indians today. Maybe, when I was growing up, it was more familiar to people from the South than from the North, because he came from the southern part of India, but we definitely knew of him as a great mathematician. At that age, I did not really know the details of his work. Even now, I have only a vague idea of what it is about. People still do not seem to know how exactly he arrived at those results. He seemed to have a mental process that led him to these things, which he has not fully explained in his work. In spite of spending years with Hardy, the West was not able to penetrate the barrier and understand how his mind worked. I do not think we can do anything about it now.

Mathematical Institutions

You spent the last years of your life in India at the Indian Statistical Institute (ISI) at Kolkata. There is another well-known research institute in India, the Tata Institute. I know that there has been some competition between these two institutions although they are specialising in different fields. Can you comment on this competition,

From the interview

the ongoing relations between the two institutes and their respective strengths?

I do not know when the competition started. The Indian Statistical Institute was founded by Mahalanobis in 1931; the Tata Institute was founded by Bhabha in 1945. They were both great friends of Jawaharlal Nehru, the prime minister at the time, he encouraged them both. Maybe, there are some rivalries at that level, the institutional level. The mathematics division of the Indian Statistical Institute had Dr. C.R. Rao, who was my advisor, as its scientific director, and the mathematics division of the Tata Institute was headed by Dr. Chandrasekharan; he was the moving force behind the mathematics school of Tata Institute. Maybe, there is some competition there.

I know many of the faculty of the Tata Institute; in fact many of them were from the same region in the South and they went to the same university, the same college, perhaps even to the same high school. So the relationships between the two faculties have always been friendly.

It is true, the emphasis is very different. At Tata, they have concentrated on number theory and algebraic geometry and certain parts of abstract mathematics. The Indian Statistical Institute on the other hand has concentrated more on probability and statistics. Although there has been some overlap, it is really not that much.

We have heard that you still entertain close relations to India and to Chennai and its Mathematical Institute, in particular. And in general, you are interested in the academic development of 3rd World countries, in particular through the Third World Academy of Sciences. Please tell us about your connections and your activities there?

I go to Chennai maybe once a year now. Earlier it used to be twice a year, when my parents were alive. I use to go and spend a month or two in Chennai, and I visit the two mathematical institutions in Chennai: There is the Chennai Mathematics Institute, and there is also the Institute of Mathematical Sciences in Chennai. I have visited both of them at different times; I have close contacts with their leadership and their faculty.

In earlier times, I visited the Bangalore centre of the Tata Institute: The Tata Institute in Mumbai has a Centre for Applicable Mathematics in Bangalore. I spent some time visiting them, and we have had students from there coming to the Courant Institute to take their degrees and so on. To the extent possible, I try to go back and keep in touch. Nowadays, with e-mail, they can ask me for advice, and I try to help out as much I can. The next couple of years, I have some plans to spend part of my sabbatical in Chennai lecturing at Chennai Mathematics Institute.

You are already the second Abel Prize winner working at the Courant Institute of Mathematical Sciences in New York, after Peter Lax. At least in the world of applied mathematics, the Courant Institute seems to play a very special role. Could you explain how this worked out? What makes the Courant Institute to such a special place?

We are back to the 1930's, when the Courant Institute was started. There was no applied mathematics in the United States. Richard Courant came and he started this mathematics institute with the emphasis on applied mathematics. His view of applied mathematics was broad enough so that it included pure mathematics. I mean, he did not see the distinction between pure and applied mathematics. He needed to apply mathematics, and he developed the tools, he needed to do it. And from that point of view, I think analysis played an important role.

The Courant Institute has always been very strong in applied mathematics and analysis. And in the 1960's, there was a grant from the Sloan foundation to develop probability and statistics at the Courant Institute. They started it, and probability was successful, I think. Statistics did not quite work out, so we still do not have really much statistics at the Courant Institute. We have a lot of probability, analysis, and applied mathematics, and in recent years some differential geometry as well. In these areas we are very strong.

The Courant Institute has always been successful in hiring the best faculty. The emphasis has mostly been on analysis and applied mathematics. Perhaps that reflects why we have had two Abel prize winners out of the first five.

Mathematical Research: Process and Results

You have given deep and seminal contributions to the area of mathematics which is called probability theory. What attracted you to probability theory in the first place?

When I joined my undergraduate program in statistics, probability was part of statistics; so you had to learn some probability. I realised that I had some intuition for probability in the sense that I could sense what one was trying to do, more than just calculating some number. I cannot explain it, I just had some feeling for it. That helped a lot; that motivated me to go deeper into it.

Modern probability theory, as you mentioned earlier, started with Kolmogorov in the 1930's. You had an interesting encounter with Kolmogorov: He wrote from Moscow about your doctoral thesis at the Indian Statistical Institute, that you finished when you were 22 years: "This is not the work of a student, but of a mature master". Did you ever meet Kolmogorov? Did you have any interaction with him mathematically later?

Yes, I have met him; he came to India in 1962. I had just submitted my thesis, and he was one of the examiners of the thesis, but he was going to take the thesis back to Moscow and then to write a report; so the report was not coming at that time. He spent a month in India, and some of us graduate students spent most of our time travelling with him all over India. There was a period where we would meet him every day. There were some reports about it mentioned in the Indian press recently, which were not quite accurate.

But there is one incident that I remember very well. I was giving a lecture on my thesis work with Kolmogorov in the audience. The lecture was supposed to last for an hour, but in my enthusiasm it lasted an hour and a half. He was not protesting, but some members in the audience were getting restless. When the lecture ended, he got up to make some comments and people started leaving the lecture hall before he could say something, and he got very angry. He threw the chalk down with great force and stormed out of the room. My immediate reaction was: There goes my PhD! A group of students ran after him to where he was staying, and I apologized for taking too much time. He said: No no; in Russia, our seminars last three hours. I am not angry at you, but those people in the audience, when Kolmogorov stands up to speak, they should wait and listen.

That is a nice story!
Among your many research contributions, the one which is associated with so-called large deviations must rank as one of the most important. Can you tell us first what large deviations are and why the study of these is so important; and what are the applications?

The subject of large deviations goes back to the early thirties. It in fact started in Scandinavia, with actuaries working for the insurance industry. The pioneer who started that subject was named Esscher. He was interested in a situation where too many claims could be made against the insurance company, he was worried about the total claim amount exceeding the reserve fund set aside for paying these claims, and he wanted to calculate the probability of this. Those days the standard model was that each individual claim is a random variable, you assume some distribution for it, and the total claim is then the sum of a large number of independent random variables. And what you are really interested in is the probability that the sum of a large number of independent random variables exceeds a certain amount. You are interested in estimating the tail probabilities of sums of independent random variables.

People knew the central limit theorem at the time, which tells you that the distribution of sums of independent random variables has a Gaussian approximation. If you do the Gaussian approximation, the answer you get is not correct. It is not correct in the sense that the Gaussian approximation is still valid, but the error is measured in terms of difference. Both these numbers are very small, therefore the difference between them is small, so the central limit theorem is valid. But you are interested in how small it is, you are interested in the ratio of these two things, not just the difference of these small numbers.

The idea is: how do you shift your focus so that you can look at the ratio rather then just at the difference. Esscher came up with this idea, that is called Esscher's tilt; it is a little technical. It is a way of changing the measure that you use in a very special manner. And from this point of view, what was originally a tail event, now becomes a central event. So you can estimate it much more accurately and then go from this estimate to what you want, usually by a factor which is much more manageable. This way of estimation is very successful in calculating the exact asymptotics of these tail probabilities. That is the origin of large deviations. What you are really interested in is estimating the probabilities of certain events. It does not matter how they occur; they arise in some way. These are events with very small probability, but you would like to have some idea of how small it is. You would like to measure it in logarithmic scale, "e to the minus how big". That is the sense in which it is used and formulated these days.

Large deviations have lots of applications, not the least in finance; is that correct?

I think in finance or other areas, what the theory actually tells you is not just what the probability is, but it also tells you if an event with such a small probability occurred, how it occurred. You can trace back the history of it and explain how it occurred and what else would have occurred. So you are concerned of analysing entire circumstances. In Esscher's method, there is the tilt that produced it; then that tilt could have produced other things, too; they would all happen if this event happened; it gives you more information than just how small the probability is. This has become useful in mathematical finance because you write an option which means: if something happens at a certain time, then you promise to pay somebody something. But what you pay may depend on not just what happened at that time, it may depend on the history. So you would like to know if something happened at this time, what was the history that produced it? Large deviation theory is able to predict this.

Together with Donsker you reduced the general large deviation principle to a powerful variational principle. Specifically, you introduced the so-called Donsker-Varadhan rate function and studied its behaviour. Could you elaborate a little how you proceeded, and what type of rate functions you could handle and analyse?

If you go back to the Esscher theory of large deviations for sums of random variables, that requires the calculation of the moment generating function. Since they are independent random variables, the moment generating functions are products of the individual ones; if they are all the same, you get just the n-th power of one moment generating function. What really controls the large deviation is the logarithm of the moment generating function. The logarithm of the n-th power is just a multiple of the logarithm of the original moment generating function, which now controls your large deviation. On the other hand, if your random variables are not independent, but dependent like in a Markov chain or something like that, then there is no longer just one moment generating function. It is important to know how the moment generating function of the sum grows; it does not grow like a product but it grows in some way. This is related by the Feynman-Kac formula to the principal eigenvalue of the generator of the Markov process involved. There is a connection between the rate function and the so-called principal eigenvalue. This is what our theory used considerably. The rate function is constructed as the Legendre transform or the convex conjugate of the logarithm of the principal eigenvalue.

Before we leave the subject of the large deviation principle, could you please comment on the so-called Varadhan integral lemma which is used in many areas. Why is that?

I do not think Varadhan's lemma is used that much, probably large deviation theory is used more. The reason why I called it a lemma is that I did not want to call it a theorem. It is really a very simple thing that tells you that if probabilities behave in a certain way, then certain integrals behave in a certain way. The proof just requires approximating the integral by a sum and doing the most elementary estimate. What is important there is just a point of view and not so much the actual estimates in the work involved; this is quite minimal.

But it pops up apparently in many different areas; is that correct?

The basic idea in this is very simple: if you take two positive numbers a and b and raise them to a very high power and you look at the sum, the sum is just like the power of the larger one; the smaller one is insignificant, you can replace the logarithm of the sum by just a maximum. The logarithm of the sum of the exponential behaves just like the maximum. That is the idea, when you have just a finite number of exponentials, then in some sense integrating is not different from summation if you have the right estimates. That was how I looked at it, and I think this arises in many different contexts. One can use the idea in many different places, but the idea itself is not very complicated.

That is often the case with important results in mathematics. They go back to a simple idea, but to come up with that idea, that is essential!
You realized that Mark Kac's old formula for the first eigenvalue of the Schrödinger operator can be interpreted in terms of large deviations of a certain Brownian motion. Could you tell us how you came to this realization?

It was in 1973, I just came back from India after a sabbatical, and I was in Donsker's office. We always spent a lot of time talking about various problems. He wanted to look at the largest eigenvalue which controls the asymptotic behaviour of a Kac integral: I think people knew at that time that if you take the logarithm of the expectation of a Kac type exponential function, its asymptotic growth rate is the first eigenvalue. The first eigenvalue is given by a variational formula; that is classical. We knew that if we do large deviations and calculate asymptotically the integrals, you get a variational formula, too. So, he wanted to know if the two variational formulas have anything to do with each other: Is there a large deviation interpretation for this variational formula?

I was visiting Duke University, I remember, some time later that fall, and I was waiting in the library at Duke University for my talk which was to start in half an hour or so. Then it suddenly occurred to me what the solution to this problem was: It is very simple, in the Rayleigh-Ritz variational formula; there are two objects that compete. One is the integral of the potential multiplied by the square of a function; the other one is the Dirichlet form of the function. If you replace the square of the function and call it a new function, then the Dirichlet form becomes the Dirichlet form of the square root of that function. It is as simple as that. And then the large deviation rate function is nothing but the Dirichlet form of the square root of the density. Once you interpret it that way, it is clear what the formula is; and once you know what the formula is, it is not that difficult to prove it.

This brings me naturally to the next question: If you occasionally had a sudden flash of insight, where you in an instant saw the solution to a problem that you had struggled with, as the one you described right now: Do these flashes depend on hard and sustained preparatory thinking about the problem in question?

Yes, they do: What happens is, once you have a problem you want to solve, you have some idea of how to approach it. You try to work it out, and if you can solve it the way you thought you could, it is done, and it is not interesting.

You have done it, but it does not give you a thrill at all. On the other hand, if it is a problem, in which everything falls in to place, except for one thing you cannot do; if only you could do that one thing, then you would have the whole building, but this foundation is missing. So you struggle and struggle with it, sometimes for months, sometimes for years and sometimes for a life-time! And eventually, suddenly one day you see how to fix that small piece. And then the whole structure is complete. That was the missing piece. Then that is a real revelation, and you enjoy a satisfaction which you cannot describe.

How long does the euphoria last when you have this experience?

It lasts until you write it up and submit it for publication; and then you go on to the next problem!

Your cooperation with Daniel Stroock on the theory of diffusions led to several landmark papers. The semigroup approach by Kolmogorov and Feller had serious restrictions, I understand, and Paul Levy suggested that a diffusion process should be represented as a stochastic differential equation. Îto also had some very important contribution. Could you explain how you and Stroock managed to turn this into a martingale problem?

I have to step back a little bit: Mark Kac used to be at Rockefeller University. Between New York University and Rockefeller University, we used to have a joint seminar; we would meet one week here and one week there and we would drive back and forth. I remember once going to Rockefeller University for a seminar and then coming back in a taxi to NYU. Somebody mentioned a result of Ciesielski, a Polish probabilist who was visiting Marc Kac at that time: You can look at the fundamental solution of a heat equation, for the whole space, and look at the fundamental solution with Dirichlet boundary data in a region. The fundamental solution for the Dirichlet boundary data is smaller, by the maximum principle, than the other one. If you look at the ratio of the two fundamental solutions, then it is always less than or equal to one. The question is: As t, the time variable in the fundamental solution, goes to zero, when does this ratio go to 1 for all points x and y in the region? The answer turns out to be: if and only if the region is convex!

Of course, there are some technical aspects, about sets of capacity zero and so on. Intuitively, the reason it is happening is that the Brownian path, if it goes from x to y, in time t, as time t goes to zero, it would have to go in a straight line. Because its mean value remains the same as that of the Brownian bridge, which is always linear, and thus a line connecting the two points. The variance goes to zero, if you do not give it much time. That means it follows a straight line.

That suggests that, if your space were not flat but curved, then it should probably go along the geodesics. One would expect therefore that the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients should look like e to the minus the square of the geodesic distance divided by 2t; just like the heat equation does with the Euclidean distance.

This occurred to me on the taxi ride back. That became the paper on the behaviour of the fundamental solution for small time. In fact, I think that was the paper that the PDE people at Courant liked, and that gave me a job. At that time, I was still a post. doc.

Anyway, at that point, the actual proof of it used only certain martingale properties of this process. It did not really use so much PDE, it just used certain martingales. Stroock was a graduate student at Rockefeller University at that time; we used to talk a lot. I remember, that spring, before he finished, we would discuss it. We thought: If it is true that we could prove this by just the martingale properties, then those martingale properties perhaps are enough to define it. Then we looked at it and asked ourselves: Can you define all diffusion processes by just martingale properties?

It looked like it unified different points of view: Kolmogorov and Feller through the PDE have one point of view, stochastic differential people have another point of view, semigroup theory has still another point of view. But the martingale point of view unifies them. It is clear that it is much more useful; and it turned out, after investigation, that the martingale formulation is sort of the weakest formulation one can have; that is why everything implies it. Being the weakest formulation, it became clear that the hardest thing would be to prove uniqueness.

Then we were able to show that whenever any of the other methods work, you could prove uniqueness for this. We wanted to extend it and prove uniqueness for a class which had not been done before, and that eluded us for nearly one and a half year until one day the idea came, and we saw how to do it and everything fell into place.

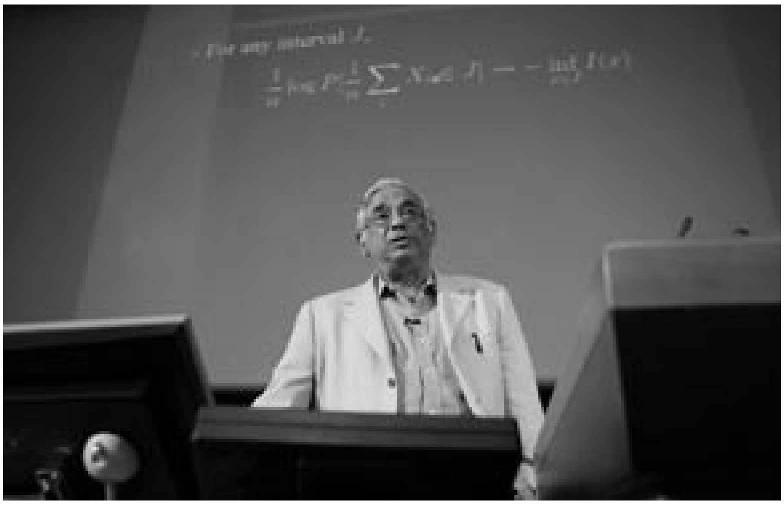
That was another flash of inspiration?

That was another flash; that meant that we could do a lot of things for the next four to five years that kept us busy.

Before we leave your mathematical research, I would like to ask you about your contribution to the theory of hydrodynamic limits that is describing the macroscopic behaviour of very large systems of interacting particles. Your work in this area has been described as viewing the environment from the travelling particle. Could you describe what this means?

I will try to explain it. The subject of hydrodynamic scaling as it is called, or hydrodynamic limits is a subject that did not really start in probability. It started from classical mechanics, Hamiltonian equations, and it is the problem of deriving Euler equations of fluid flow directly as a consequence of Hamiltonian motion. After all, we can think of a fluid as a lot of individual particles and the particles interact, ignoring quantum effects, according to Newtonian rules. We should be able to describe how every particle should move. But this requires solving a 10 to the 68 -dimensional ODE, and only then you are in good shape. Instead we replace this huge system of ODEs by PDEs, a small system of nonlinear PDEs, and these nonlinear PDEs describe the motion of conserved quantities.

If there are no conserved quantities, then things reach equilibrium very fast, and nothing really moves. But if there are conserved quantities, then they change very slowly locally, and so you have to speed up time to a different scale. Then you can observe change of these



things. Mass is conserved, that means, density is one of the variables; momenta are conserved, so fluid velocity is one of the variables; the energy is conserved, so temperature becomes one of the variables. For these conserved quantities, you obtain PDEs. When you solve your partial differential equations, you get a solution that is supposed to describe the macroscopic properties of particles in that location. And given these parameters, there is a unique equilibrium for these fixed values of the parameters which are the average values.

In a Hamiltonian scheme, that would be a fixed surface with prescribed energy and momentum etc. On that surface the motion is supposed to be ergodic, so that there is a single invariant measure. This invariant measure describes how locally the particles are behaving over time. That is only described in statistical terms; you cannot really pin down which particle is where; and even if you could, you do not really care.

This program, although it seems reasonable in a physical sense, it has not been carried out in a mathematical sense. The closest thing that one has come to is the result by Oscar Lanford who has shown, that for a very small time scale, you can start from the Hamiltonian system and derive the Boltzmann equations. Then to go from Boltzmann to Euler requires certain scales to be large, it is not clear if the earlier results work in this regime. The mathematical level of these things is not where it should be.

On the other hand, if you put a little noise in your system, so that you look at not a deterministic Hamiltonian set of equations, but stochastic differential equations, with particles that move and jump randomly, then life becomes much easier. The problem is the ergodic theory. The ergodic theory of dynamical systems is very hard. But the ergodic theory of Markov processes is a lot easier. With a little bit of noise, it is much easier to keep these things in equilibrium. And then you can go through this program and actually prove mathematical results.

Now coming to the history: We were at a conference in Marseille at Luminy, which is the Oberwolfach of the French Mathematical Society. My colleague George Papanicolaou, who I think should be here in Oslo later today, and I, we were taking a walk down to the calanques. And on the way back, he was describing this problem. He was interested in interacting particles, Brownian motion interacting under some potential. He wanted to prove the hydrodynamic scaling limit. I thought the solution should be easy; it seemed natural somehow. When I came back and looked at it, I got stuck regardless how much I tried. There were two critical steps, I figured out, needed to be done; one step I could do, the second step I could not do. For the time being, I just left it at that.

Then, a year later, we had a visitor at the Courant Institute, Josef Fritz from Hungary. He gave a talk on hydrodynamic limits; he had a slightly different model. By using different techniques, he could prove the theorem for that model. Then I realized that the second step on which I got stuck in the original model, I could do it easily in this model. So we wrote a paper with George Papanicolaou and one of his students Guo; that was my first paper on hydrodynamic limits. This work was more for a field than for an actual particle system which was what got me interested in the subject.

When you look at particles, you can ask two different questions. You can ask what is happening to the whole system of particles, you do not identify them; you just think of it as a cloud of particles. Then you can develop how the density of particles changes over time. But it does not tell you which particle moves where. Imagine particles have two different colours. Now you have two different densities, one for each colour. You have the equation of motion for the sum of the two densities, but you do not have an equation of motion for each one separately. Because to do each one separately, you would have to tag the particles and to keep track of them! It becomes important to keep track of the motion of a single particle in the sea of particles.

A way to analyse it that I found useful was to make the particle that you want to tag the centre of the Universe. You change your coordinate scheme along with that particle. Then this particle does not move at all; it stays where it is, and the entire Universe revolves around it. So you have a Markov process in the space of universes. This is of course an infinite dimensional Markov process, but if you can analyse it and prove ergodic theorems for it, then you can translate back and see how the tagged particle would move; because in some sense how much the Universe moves around it or it moves around the Universe is sort of the same thing. I found this method to be very useful, and this is the system looked from the point of view of the moving particle.

Work Style

Very interesting! A different question: Can you describe your work style? Do you think in geometric pictures or rather in formulas? Or is there an analytic way of thinking?

I like to think physically in some sense. I like to build my intuition as a physicist would do: What is really happening, understanding the mechanism which produces it, and then I try to translate it into analysis. I do not like to think formally, starting with an equation and manipulating and then see what happens. That is the way I like to work: I let my intuition guide me to the type of analysis that needs to be done.

Your work in mathematics has been described by a fellow mathematician of yours as "Like a Bach fugue, precise yet beautiful". Can you describe the feeling of beauty and aesthetics that you experience when you do mathematics?

I think the quotation you are referring to can be traced back to the review of my book with Stroock by David Williams. I think mathematics is a beautiful subject because it explains complicated behaviour by simple means. I think of mathematics as simplifying, giving a simple explanation for much complex behaviour. It helps you to understand why things behave in a certain manner. The underlying reasons why things happen are usually quite simple. Finding this simple explanation of complex behaviour, that appeals most to me in mathematics. I find beauty in the simplicity through mathematics.

Public awareness

May we now touch upon the public awareness of mathematics: There appears to be a paradox: Mathematics is everywhere in our life, as you have already witnessed from your perspective: in technical gadgets, in descriptions and calculations of what happens on the financial markets, and so on. But this is not very visible for the public. It seems to be quite difficult for the mathematical community to convince the man on the street and the politicians of its importance.

Another aspect is that it is not easy nowadays to enrol new bright students in mathematics. As to graduate students, in the United States more than half of the PhD students come from overseas. Do you have any suggestions what the mathematical community could do to enhance its image in the public, and how we might succeed to enrol more students into this interesting and beautiful subject?

Tough questions! People are still trying to find the answer. I do not think it can be done by one group alone. For a lot of reasons, probably because of the nature of their work, most mathematicians are very introverted by nature. In order to convince the public, you need a kind of personality that goes out and preaches. Most research mathematicians take it as an intrusion on their time to do research. It is very difficult to be successful, although there are a few examples.

The question then becomes: How do you educate politicians and other powerful circles that can do something about it about the importance of education? I think that happened once before when the Russians sent the Sputnik in 1957, I do not know how long it will take to convince people today. But I think it is possible to make an effort and to convince people that mathematics is important to society. And I think that signs are there, because one of the powerful forces of the society today are the financial interests, and the financial interests are beginning to realize that mathematics is important for them. There will perhaps be pressure from their side to improve mathematics education and the general level of mathematics in the country; and that might in the long run prove beneficial; at least we hope so.

In connection with the Abel Prize, there are also other competitions and prizes, like the Niels Henrik Abel competition and the Kapp Abel for pupils, the Holmboe prize to a mathematics teacher, and furthermore the Ramanujan prize for an outstanding 3rd world mathematician. How do you judge these activities?

I think these are very useful. They raise the awareness of the public. Hopefully, all of this together will have very beneficial effect in the not too distant future. I think it is wonderful what Norway is doing.

Private Interests

In my very last question, I would like to leave mathematics behind and ask you about your interests and other aspects of life that you are particularly fond of. What would that be?

I like to travel. I like the pleasure and experience of visiting new places, seeing new things and having new experiences. In our profession, you get the opportunity to travel, and I always take advantage of it.

I like music, both classical Indian and a little bit of classical Western music. I like to go to concerts if I have time; I like the theatre, and New York is a wonderful place for theatre. I like to go to movies.

I like reading Tamil literature, which I enjoy. Not many people in the world are familiar with Tamil as a language. It is a language which is 2000 years old, almost as old as Sanskrit. It is perhaps the only language which today is not very different from the way it was 2000 years ago. So, I can take a book of poetry written 2000 years ago, and I will still be able to read it. To the extent I can, I do that.

At the end, I would like to thank you very much for this interesting interview. These thanks come also on behalf of the Norwegian, the Danish and the European mathematical society. Thank you very much.

Thank you very much. I have enjoyed this interview, too.

Sudoku puzzles and how to solve them

Andries E. Brouwer (Eindhoven, the Netherlands)

3		9			6			
2						8		
						7		
	7		4			5		
				2			3	
	1							
			8	5				
6							9	
			7					

		2		9		1		7
	3	8	6					
4								
					5			
		9		1		3		
			4					
								4
					7	9	2	
8		6		3		7		

Two puzzles – the second one is difficult

Sudoku

A Sudoku puzzle (of 'classical type') consists of a 9-by-9 matrix partitioned into nine 3-by-3 submatrices ('boxes'). Some of the entries are given, and the puzzle is to find the remaining entries, under the condition that the nine rows, the nine columns, and the nine boxes all contain a permutation of the symbols of some given alphabet of size 9, usually the digits 1-9, or the letters A-I.

Some mathematicians will claim that since this is a finite problem, it is trivial. The time needed to solve a Sudoku puzzle is $O(1)$ – indeed, one can always try the 9^{81} possible ways of filling the grid. But one can still ask for efficient ways of finding a solution. Or, if one knows the solution already, one can ask for a sequence of logical arguments one can use to convince someone else of the fact that this really is the unique solution.

Backtrack and elegance

It is very easy to write an efficient computer solver. Straightforward backtrack search suffices, and Knuth's 'dancing links' formulation of the backtrack search for an exact covering problem takes a few microseconds per puzzle on common hardware today.

For a human solver, backtrack is the last resort. If all attempts at further progress fail, one can always select an open square, preferably with only a few possibilities, and try these possibilities one by one – maybe using pencil and eraser, or maybe copying the partially filled diagram to several auxiliary sheets of paper and trying each possibility on a separate sheet of paper.

For very difficult Sudoku puzzles, this is the fastest way to solve them, also for humans.

However, one solves puzzles not because the answer is needed, but for fun, in order to exercise one's capabilities in logical reasoning. And solving by backtrack is dull, boring, mindless, no thinking required, better left to a computer, no fun at all.

So, Backtrack, or Trial & Error, is taboo. And if it cannot be avoided one prefers some limited form. Maybe whatever can be done entirely in one's head.

Grading

Most Sudoku puzzles one meets are computer-produced, and it is necessary to have a reasonable estimate of the difficulty of these puzzles. To this end one needs computer solvers that mimic human solvers. Thus, one would also implement the solving steps described below in a Sudoku solving program, not in order to find the solution as quickly as possible, but in order to judge the difficulty of the puzzle, or in order to be able to give hints to a human player. Such AI-type Sudoku solving programs tend to be a thousand to a million times slower than straightforward backtrack.

Generating

Given the backtrack solver, generating Sudoku puzzles is easy: start with an empty grid, and each time the backtrack solver says that the solution is not unique throw in one more digit. (If now there is no solution anymore, try a different digit in the same place.) To generate a puzzle in this way requires maybe thirty calls to the backtrack solver, less than a millisecond. One can polish the puzzle a little by checking that none of the givens is superfluous.

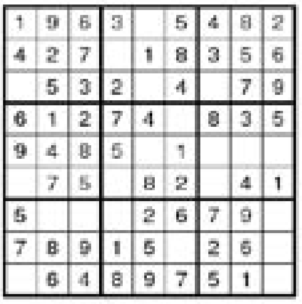
Afterwards one feeds the puzzles that were generated to a grader. Maybe half will turn out to be very easy, and most will be rather easy ('humanly solvable'). It is very difficult to generate very difficult puzzles, puzzles that are too difficult even for very experienced humans.

Solving

Below we sketch a possible approach for a human solver. The goal is to be efficient. In particular, the boring and time-consuming action of writing all possibilities in every empty square is postponed as much as possible. On the other hand, some form of markup helps.

Baby steps

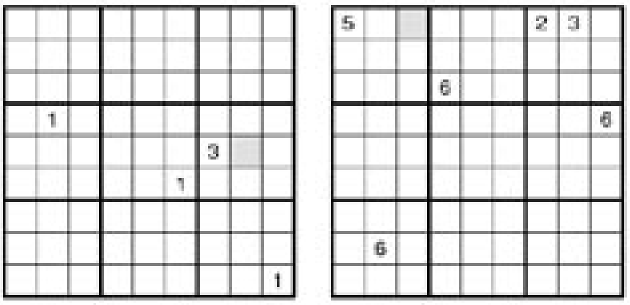
When eight digits in some row or column or box are known, one can find the last missing digit.



Exercise: (i) Solve this puzzle using baby steps only. (ii) Show that if a puzzle can be solved using baby steps only, it has at most 21 open squares.

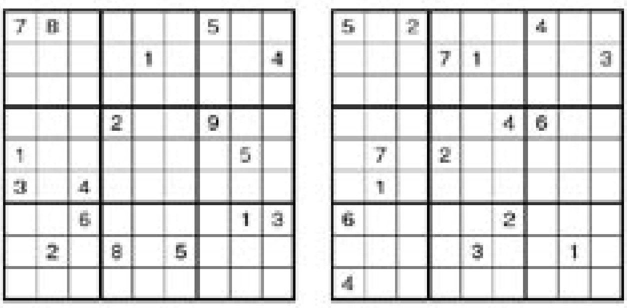
Singles

When there is only one place for a given digit in a given row or column or box, write it there. If there is only one digit that can go in a given square, write it there.



Left: The 1 in the middle right box must be in the colored square. Right: The 6 in the top row must be in the colored square.

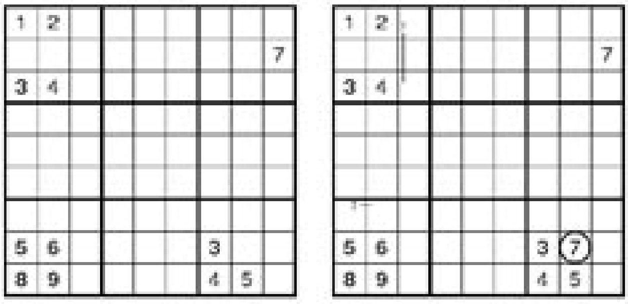
Baby steps are particularly easy cases of singles. Checking for singles requires 324 steps. Knuth's 'dancing links' backtracker will take 324 steps if and only if the puzzle can be solved by singles only. It is unknown how many open squares a puzzle can have and be solvable by singles only. There are examples with 17 givens. It is unknown whether any Sudoku puzzles exist with 16 givens and a unique solution.



Left: Solve using singles only Right: 16 clues and 2 solutions

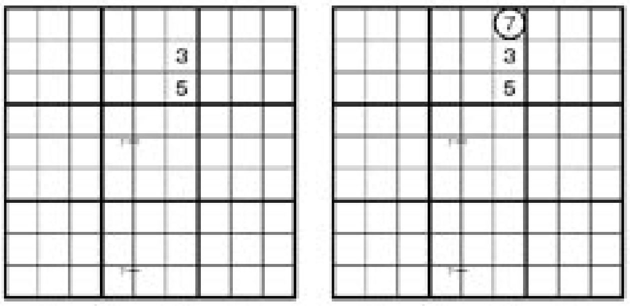
Pair markup

If one checks where a given digit can go in some row or column or box and finds that there are precisely two possibilities, then it helps to note this down. That is efficient, one does not do the same argument over and over again, and helps in further reasoning.

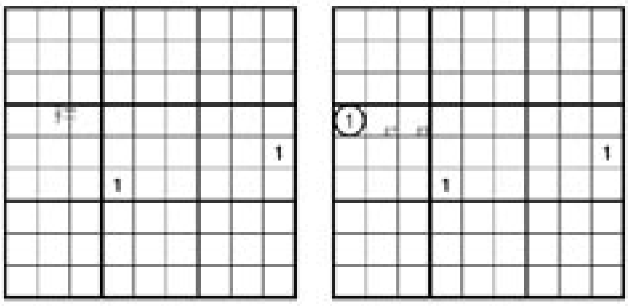


Thus, a small stroke labeled with a digit and joining two squares indicates that one of the two squares must have that digit.

Given two pairs for the same digit straddling the same two rows or columns, the digit involved cannot occur elsewhere in those rows or columns.



Given two pairs between the same two squares, one concludes that these two squares only contain the two digits involved and no other digit.

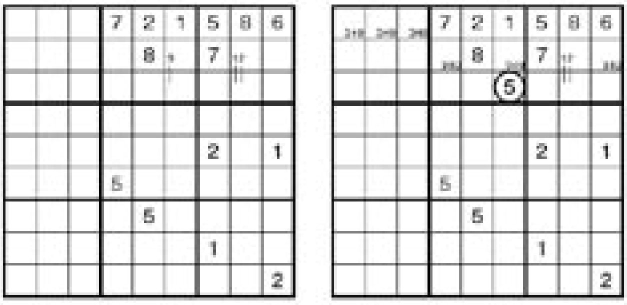


Matchings

A sudoku defines 36 matchings (1-1 correspondences) of size 9: between positions and digits given a single row or column or box, and between rows and columns given a single digit. For each of these 1-1 correspondences between sets X and Y of size 9, if we have identified subsets $A \subset X$ and $B \subset Y$ of the same size n, $1 \leq n \leq 9$, such that we know that the partners of every element of B must be in A, then A and B are matched, and nothing else has a partner in A. More explicitly:

(A) If for some set of n positions in a single row, column, or box there are n digits that can be only at these positions, then these positions do contain these digits (and no other digits).

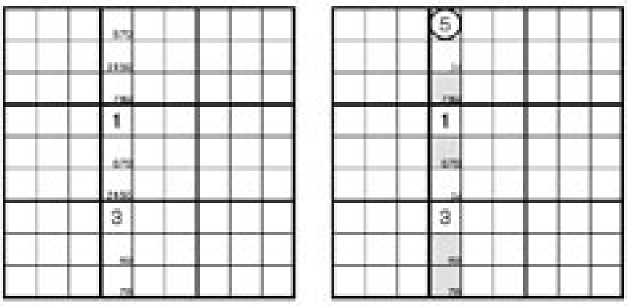
For example,



The three digits 3, 4, 9 in the second row must be in columns 4, 6, 9, so the digit 5 cannot be there.

(B) If for some set of n digits there are n positions in a single row, column, or box, that cannot contain any digits other than these, then these digits must be at those positions (and not elsewhere in the same row, column, or box).

For example,

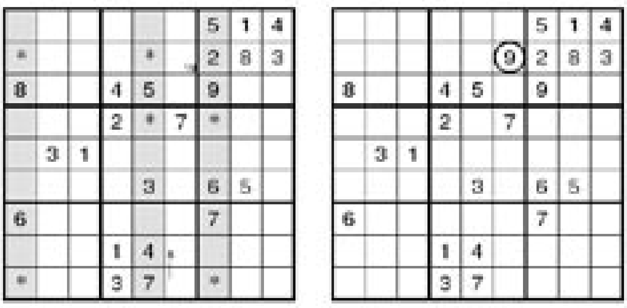


Here all possibilities for the fields in column 4 are given. Note the four colored fields: together, they only have the four possibilities 6, 7, 8, 9. So, these colored fields contain 6, 7, 8, 9 in some order, and we can remove 6, 7, 8, 9 from the possibilities of the other fields in that column.

(C) Pick a digit d. If for some set of n rows R there is a set of n columns C such that all occurrences of d in these rows must be in one of the columns in C, then the digit d does not occur in a column in C in a row not in R (and the same with rows and columns interchanged).

(This argument is called *X-wing* for $n = 2$, *Swordfish* for $n = 3$, *Jellyfish* for $n = 4$.)

For example,



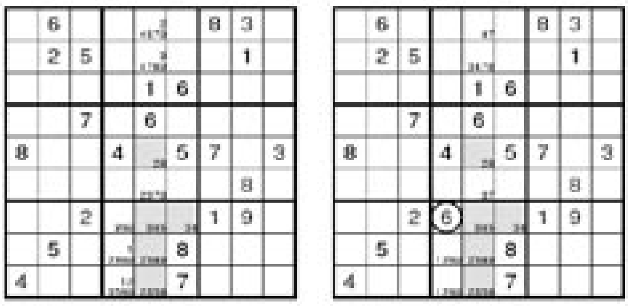
Consider the three (colored) columns 1, 5, 7. The only possibilities (indicated by an asterisk) for a digit 1 in these columns occur in rows 2, 4, 9. Therefore, digit 1 cannot occur outside these columns in these rows.

Exercise Complete this Sudoku. The 'Sue de Coq' argument will be useful.

The subset principle

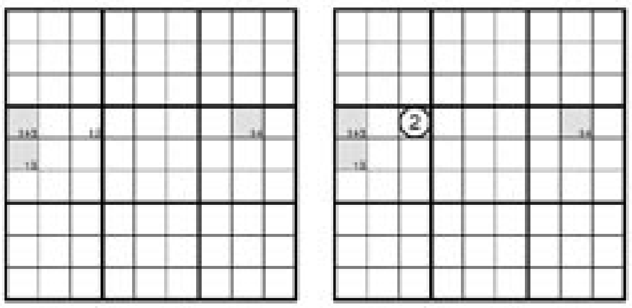
Let S be a subset of the set of cells of a partially filled Sudoku diagram, and let for each digit d the number of occurrences of d in S be at most n_d. If $\sum n_d = |S|$, then the situation is tight: each digit d must occur precisely n_d times in S. In this case we can eliminate a digit d from the candidates of any cell C such that the presence of a d in C would force the number of d's in S to be less than n_d.

For example,



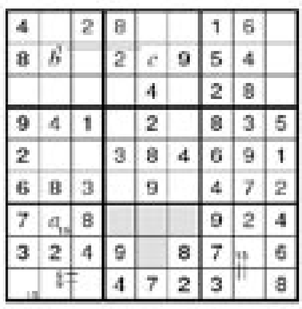
In the five colored squares, the five digits 2,3,4,5,9 each occur at most once (since all occurrences of 3,4,5 are in a single box and all occurrences of 2,5,9 in a single column). Since the situation is tight, digits 3,4,5 do not occur elsewhere in this box, and digits 2,5,9 do not occur elsewhere in this column.

More generally, one may remove a candidate for a cell outside S if its presence would force $\sum n_d < |S|$.



Hinge

The previous subsection used that each cell contains at least one digit. Conversely, each digit is in at least one cell in any given row, column or box. For example,



Consider the above diagram. If cell a has a 1, then cell b does not have a 1, and then the 1 in row 2 must be in cell c. But then the colored area cannot contain a 1, impossible. (So, cell a has a 5.)

Forcing Chains

Consider propositions $(i,j)d$ ‘cell (i,j) has value d’ and $(i,j)!d$ ‘cell (i,j) has a value different from d’. By observing the grid one finds implications among such propositions.

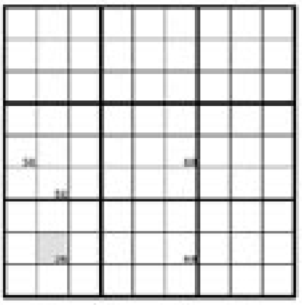
There are at least three obvious types of such implications. Let us say that two cells are ‘adjacent’ (or, ‘see each other’) when they lie in the same row, column or box, so that they must contain different digits. This gives the first type: If (i,j) is adjacent to (k,l) then $(i,j)d > (k,l)!d$ where $>$ denotes implication.

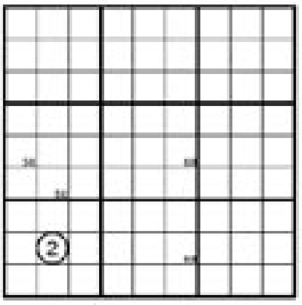
In case (i,j) is adjacent to (k,l) and (k,l) only has the two possibilities d and e, then $(i,j)d > (k,l)e$. This is the second type of implication.

Finally, if some row, column or box has only two possible positions (i,j) and (k,l) for some digit d, then $(i,j)!d > (k,l)d$. This is the third type.

Consider chains of implications. If $(i,j)d > \ldots > (i,j)!d$ then $(i,j)!d$.

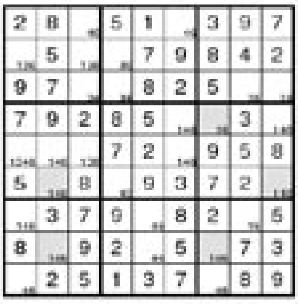
For example

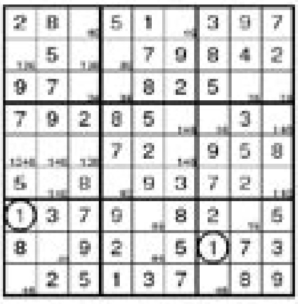




Here $(8,2)6 > (8,6)8 > (5,6)6 > (5,1)5 > (6,2)6 > (8,2)2$ was used to conclude $(8,2)2$.

For example





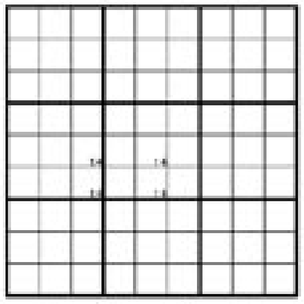
Here $(8,2)1 > (6,2)!1 > (6,9)1 > (4,7)!1 > (8,7)1 > (8,2)!1$ was used to conclude $(8,2)!1$. For such chains that involve a single digit only, and where the implication types alternate between I and III, one often uses a simplified notation like $1:\ (8,2)-(6,2)=(6,9)-(4,7)=(8,7)-(8,2)$ where $-$ denotes that at most one is true and $=$ that at least one is true.

Finding useful chains may be nontrivial, and there are various techniques such as ‘colouring’ that help.

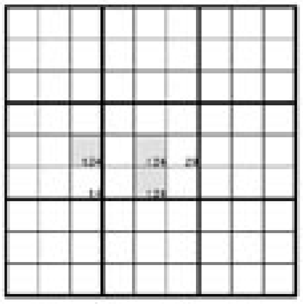
Uniqueness

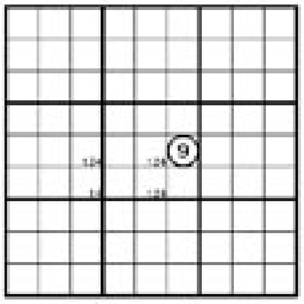
A properly formulated Sudoku puzzle has a unique solution. One can assume that a given puzzle actually is properly formulated, and use that in the reasoning, to exclude branches that would not lead to a unique solution.

For example, a grid



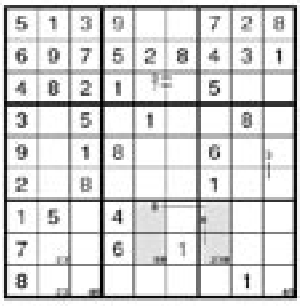
can be completed in at least two ways, violating the uniqueness assumption. That means that this must be avoided, so that

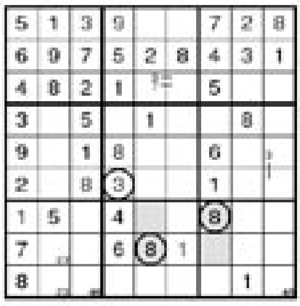




At least one of the corners of the rectangle is 2.

For example,





Look at the colored rectangle. If $(7,7)3$, then $(7,5)8$ and $(8,7)8$ so that $(8,5)3$ and we have a forbidden rectangle with pattern 83–38. So, $(7,7)!3$, which means that we have an X-wing: digit 3 in columns 2,7 can only be in rows 8,9 and does not occur elsewhere in these rows. In particular $(9,4)!3$ so that $(6,4)3$, and $(8,5)!3$ so that $(8,5)8$.

More generally:

Theorem. *Suppose one writes some (more than 0) candidate numbers in some of the initially open cells of a given Sudoku diagram, 0 or 2 in each cell, such that each value occurs 0 or 2 times in any row, column, or box. Then this Sudoku diagram has an even number of completions that agree with at least one of the candidates in each cell where candidates were* *given. In particular, if the Sudoku diagram has a unique solution, then that unique solution differs from both candidates in at least one cell.*

Digit patterns and jigsaw puzzles

A more global approach was described by `Myth Jellies`. Solve a puzzle until no further progress is made. Then, for each of the nine digits, write down all possible solution patterns for that digit. One hopes to find not more than a few dozen patterns in all. Now the actual solution has one pattern for each digit, where these 9 patterns partition the grid. Regard each digit pattern ('jigsaw piece') as a boolean formula ('this pattern occurs in the solution'). Write down the formulas that express that for each of the nine digits exactly one pattern occurs, and that overlapping pieces cannot both be true. Solve the resulting system of propositional formulas.

This approach allows one to solve some otherwise unapproachable puzzles.

Bibliography

[1] There is an enormous amount of literature on Sudoku on the web. This note is a condensed version of http://homepages.cwi.nl/~aeb/games/sudoku/.

This article has previously appeared in Nieuw Archief voor Wiskunde (5) **7**, no. 4, pp. 258–263, December 2006. We thank the editor for the permission to reproduce it in the Newsletter.

Andries E. Brouwer [aeb@cwi.nl/aeb@win.tue.nl] is a professor of mathematics at Technical University of Eindhoven, the Netherlands. He likes to play games.

		1						
		2		3				4
			5			6		7
5			1	4				
	7						2	
				7	8			9
8		7			9			
4				6		3		
						5		

3								5
			9		4			
	9		1		3		8	
				7				
	3		5		9		4	
			3		2			
5								2

Math limerick

Can you figure out how to read this equation as a limerick?

$$\int_1^{\sqrt[3]{3}} t^2\,dt \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) = \ln \sqrt[3]{e}$$

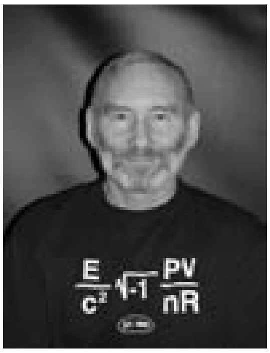
Answer (in white, select to read):

Integral t-squared dt
From 1 to the cube root of 3
Times the cosine
Of 3 pi over 9
Equals log of the cube root of e

(It's true too)

Mindeord om lektor Edmund Christiansen

af Jørgen Bang-Jensen, Claus Michelsen og Hans Jørgen Munkholm på vegne af personalet ved
Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet



Med Edmund Christiansens død ved en tragisk drukneulykke på Sicilien har vi ved Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet mistet en vellidt og respekteret kollega.

I foråret 1976 forsvarede Edmund sin ph.d.-grad ved MIT i USA. Titlen var "Limit Analysis in Plasticity: Theory and Approximation by Finite Elements", og vejlederen Gilbert Strang. Overrækkelsen af beviset for graden fandt sted på Edmunds 29 års fødselsdag d. 28. maj 1976, og godt 2 måneder senere startede han som lektor ved det institut, hvor han kom til at tilbringe resten af sit arbejdsliv, bortset fra korterevarende gæsteansættelser, dels i Milano, dels i Iowa, USA.

Det var en ung lektor, der ankom til Odense dengang, men instituttet var meget yngre. Kun godt 4 år gammelt var det, og langt det meste af det instituttet i dag står for, hvad angår uddannelse og forskning, men også socialt, var noget man drømte om. Men også noget man arbejdede for, og Edmund arbejdede energisk og dygtigt med i enhver henseende.

Hans indsats har således i høj grad medvirket til, at instituttets lille afdeling for datalogi har udviklet sig, så den i dag har både forsknings- og undervisningsmæssig kapacitet til at uddanne dataloger til det højeste videnskabelige niveau. Under dette arbejde med at udvikle datalogien på stedet glemte Edmund dog aldrig sin baggrund i den numeriske analyse og dennes rige muligheder for anvendelser. I 1993 erhvervede han således den danske Dr. Scient. grad på et arbejde, som blev offentliggjort som del af "Handbook of Numerical Analysis". Og de emner, som hans speciale- og projektstuderende har beskæftiget sig med, viser klart hans usædvanligt brede interesse- og ekspertiseområde. Som blot 3 eksempler (ud af ca. 40) kan nævnes "Computer Monitoring and Control of a Chemical Process to Detoxify Waste Water", "Models for Exotic Options" og "Detection of Chaos and Nonlinear Forecasting in Chaotic Systems". I de senere år havde Edmund et meget frugtbart samarbejde med læger og fysiologier om energibalance og fedme. De matematiske modeller, Edmund udviklede, kaster i høj grad nyt lys over eksisterende eksperimentelle data og sammenhænge.

Edmunds betydning for det sociale miljø på instituttet kan ikke overvurderes. For os som kollegaer var han altid en kilde til et godt grin i kaffestuen, hvor han var en sikker gæst hver dag og med sin ironiske humor, venskabelige drillerier og indsigt i alskens ting (spændende fra Viagra, over sport til sprog, opera, datalogi og matematik) bidrog til, at man forlod kaffepausen i godt humør.

Edmund var også overordentligt populær blandt instituttets studerende og har en stor del af æren for at instituttet er kendt for et fantastisk godt studiemiljø med tæt kontakt mellem studerende og undervisere. Edmund var glad for at undervise. Hans undervisning var levende og medrivende, og ingen var i tvivl om Edmunds engagement i både undervisning og studerende. Udover at være en meget afholdt underviser, deltog Edmund jævnligt i de såkaldte matalogifester, som er halvårlige fester for de studerende typisk med deltagelse af lærere fra instituttet. Her blev han i 1991 af de studerende tildelt den såkaldte "årets Edmund" som er en vandrepokal, der gives til en person som i særlig grad har gjort sig bemærket overfor de studerende i det forgangne halvår. Pokalen, der altså er opkaldt efter Edmund og indstiftet af de studerende sidst i 80'erne, uddeles stadig hvert halve år ved matalogifesterne.

Edmund var en meget ivrig sportsudøver og var i adskillige år med til at styrke den sociale kontakt med de studerende blandt andet ved ugentlige fodboldkampe, volleyball, etc. Han var også en ivrig badmintonspiller og var, i kraft af sin gode fysik, til det sidste en jævnbyrdig modstander selv for langt yngre personer. I en lang årrække spillede han også badminton med 3 kollegaer fra instituttet og kunne således prale af at være en af de få der spillede en doublekamp, hvor alle deltagere havde en ph.d. i matematik. Da vi på instituttet for et år siden begyndte at spille fodbold efter arbejdstid, var Edmund den første, der tog støvlerne på.

Ved de årlige julefrokoster var Edmund en fast og specielt populær deltager, dels fordi han ikke var bange for at stille sig op og synge en sang, dels på grund af at han altid medbragte sin kone Anne Grethes frikadeller og nøddekage, der hurtigt blev obligatoriske retter.

Det var ikke kun instituttets studerende, der fik mulighed for at opleve Edmunds glæde ved at formidle. I forbindelse med Dansk Naturvidenskabsfestival var Edmund flere gange ude for at undervise på folkeskoler og gymnasier, bl.a. om straffesparkets matematik. Edmund var ofte underviser på efteruddannelseskurser for lærere. Og han var ikke den, der sagde nej, når man bad ham om en mørk januar aften at køre fra Odense til Aabenraa for at holde oplæg om matematiske beskrivelser af sammenhæng mellem energibalance og fedme, for matematiklærere på kursus.

De mange forskellige muligheder for anvendelser af matematikken har netop fået en mere fremtrædende plads i instituttets udbud af uddannelser. Edmund glædede sig til at bidrage til denne øgede synliggørelse af sit specialfelt. Nu må vi konstatere, at vore muligheder for at realisere de nye uddannelsestilbud er blevet væsentlig forringet. Det ville dog ikke være i Edmunds ånd at give op, så vi arbejder videre ud fra Edmunds grundopfattelse, som han selv har formuleret således:

"Anvendt matematik er ikke en særlig slags matematik men en måde at arbejde med matematik på. Det er umuligt at sige om et matematisk emne er anvendt eller ej. Det meste af den matematik, som opfattes som »ren« matematik, er udviklet for at løse praktiske problemer."

Sommerskolen for gymnasieelever 2007

Af: Annegrethe Bak, Søren Møller og Jens Siegstad

Denne sommer afholdte Ungdommens Naturvidenskabelige forening (UNF) for første gang en sommerskole i matematik for gymnasieelever. Den blev afholdt på Syddansk Universitet i Odense i dagene 29.juli- 4.august.

UNF er en forening, hvis formål er at fremme interessen for naturvidenskab og teknologi, fortrinsvis blandt unge. Det gøres ved over 100 foredrag og omkring 25 studiebesøg hvert år. Siden 2001 har UNF også inviteret unge med på sommerskoler indenfor forskellige naturvidenskabelige områder, siden i år også i matematik.

Foreningen startede i 1944 i København og har i dag ca. 3.200 medlemmer på landsplan og lokalafdelinger i København, Odense, Århus og Ålborg.

I sommers brugte 35 engagerede gymnasielever og godt 10 aktive i UNF en uge på at beskæftige sig med mange matematiske emner. Både deltagerne og de aktive kom fra hele landet, endda Bornholm, og deltagerne var fordelt jævnt på de tre gymnasieårgange, primært fra det almene gymnasium, men også en del fra HTX. Til mediernes store overraskelse var der også en tredjedel piger blandt deltagerne, hvilket dog også passer meget godt med kvindeandelen på matematikstudiet på de fleste universiteter.

I ugens løb beskæftigede vi os med et bredt udpluk af matematiske emner såsom algebra og talteori, komplekse tal og funktioner, grafteori og aksiomatisk mængdelære.

Sommerskolen lagde ud med aksiomatisk mængdelære for at give deltagerne et indblik i matematikkens grundlag, heri indgik der også en introduktion til grundlæggende logik og bevisteknik, herunder induktionsbeviset. Dette emne gav eleverne de nødvendige forkundskaber til at følge de andre emner, men var også i sig selv et godt indblik i mere teoretisk matematik.

I det næste emne blev eleverne introduceret for de forskellige talmængder N, Z, Q og R og deres egenskaber, dette førte så frem til basal algebra med introduktion af ringe og legemer. Med denne viden kunne deltagerne senere på ugen tage fat på et projekt om kardinalitet af uendelige mængder og hermed forsøge at få en forståelse af uendelighedsbegrebet. Projektarbejdet var en stor succes og deltagerne var glade for arbejdsformen, som bestod af en kort introduktion fulgt af gruppearbejde med støtte fra undervisernes side. Dette emne viste tydeligt hvor engagerede eleverne var i emnerne og mange gange fortsatte de med at diskutere stoffet også når undervisningen var slut.

Komplekse tal er et populært område både som UNF foredrag og som valgfrit emne/større skriftlig opgave i gymnasiet. Under foredraget introducerede vi de komplekse tal som et legeme og viste hvorledes man regner med dem. Vi diskuterede også hvorledes de komplekse tal kan bruges til at løse reelle problemstillinger f.eks kan de trigonometriske additionsformler relativt let vises ved brug af komplekse tal. Herudover fik eleverne også et indblik i komplekse funktioner og specielt differentiablitetsbegrebet som adskiller sig væsentlig fra det reelle tilfælde. Vi fik vist Cauchy-Riemanns ligninger og snakkede om analytiske funktioner. Emnet var velegnet idet der var mulighed for at stille opgaver af varierende sværhedsgrad.

For at deltagerne også skulle møde noget anvendt matematematik var vores sidste hovedemne grafteori med fokus på ruteplanlægning og den handelsrejsendes problem. Her blev eleverne gjort bekendt med nogle simple algoritmer og fik disse anvendt på fynske byer, blandt andet ved at finde en rute gennem alle Fyns kommunesæder (før kommunalreformen!). Dette gav igen mulighed for mere selvstændigt arbejde og var desuden interessant for de deltagere der var datalogisk interesserede, nogen prøvede endda at løse problemet ved programmering i Java, dette var dog ikke nødvendigt for at forstå emnet.

Disse fire hovedemner blev varetaget af universitetsstuderende fra SDU og KU. Herudover var vi meget glade for at kunne præsentere hele tre gæsteforelæsere fra Institut for Matematik og Datalogi på Syddansk Universitet (IMADA). Claus Michelsen, institutleder på IMADA, indledte ugen med at fortælle generelt om hvad matematik er, samt om universitetets opbygning og funktion. Dernæst holdt nyligt afdøde Edmund Christiansen et foredrag om differentialligningers brug i fedmeforskning. Deltagerne var glade for at høre mere konkret om anvendelser af matematik, især fordi Edmund som sædvanlig mødte op i godt humør og med stort engagement. Sidst men ikke mindst holdt Uffe Haagerup et foredrag om Riemannhypotesen. Dette gav deltagerne et indblik i et matematikkens store uløste problemer og gav samtidig et godt indblik i matematisk forskning. Deltagerne på sommerskolen var utroligt begejstrede for gæsteforelæserne og syntes det var spændende at høre universitetsundervisere fortælle om mere forskningsrelaterede emner.

Ud over al denne spændende matematik deltagerne lærte, var der dog også plads til sociale aktiviteter. Ugen bød både på en spilaften, hvor spillet hex blev introduceret, et lagkageløb, en rundboldtunering og en grillaften. Desuden fik deltagerne mulighed for at deltage i en tur til Odense for at h re livemusik og sommerskolen blev afsluttet med en fest den sidste aften, hvor deltagerne blev budt på en fireretters menu.

Sommerskolen var kun muligt på grund af økonomisk støtte fra Syddansk Universitet, som også gav os mulighed for at bruge deres gode faciliteter, og Dansk Matematisk Forening, som vi ønsker at give en særlig stor tak til, da foreningen troede på og støttede projektet selvom det var første gang det kørte.

I sommeren 2008 vil vi forsøge at gentage succesen fra i år, denne gang på København Universitet. Vi vil denne gang have en lidt større fokus på anvendelser af matematikken, både indenfor økonomi og ingeniørvidenskab. Vi vil også komme ind på mere teoretiske emner, såsom metriske rum og talteori, og igen håber vi på at kunne præsentere gæsteforelæsere. Næste års sommerskole vil trække på dette års erfaringer og vi håber derfor at den bliver endnu bedre end i år, særligt er vi glade for at flere af deltagerne fra i år har tilkendegivet at de ønsker at være aktive på næste års sommerskole.

Niels Richard Hansen er pr. 1. august 2007 blevet ansat som lektor ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Niels er cand.scient (2000) i matematik og statistik fra Københavns Universitet (KU) og ph.d. (2004) i statistik ligeledes fra KU. I perioden 2004-2007 var Niels ansat først som adjunkt ved bioinformatikcentret, KU, og siden som adjunkt ved Institut for Matematiske Fag, KU.

Niels forsker i grænseområdet mellem statistik og sandsynlighedsteori på den ene side og disses anvendelser indenfor især molekylær biologi. Her har han specielt arbejdet med fordelingsteorien for visse algoritmer, der anvendes ved biologisk sekvensanalyse, samt statistiske modeller for placeringen af motiver på genom-sekvenser.

Det meste af fritiden bruger Niels med sin kone og to små børn. Der er dog også tid til at spille tennis, se en god film eller drikke en øl med vennerne.

Jesper Grodal er blevet ansat i et fast professorat ved Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet.

Jesper er uddannet cand. scient. i Matematik og Fysik fra Københavns Universitet (1997) og Ph.D. i Matematik fra Massachussetts Institute of Technology (2000), med afhandlingen »Higher Limits via Subgroup Complexes«. Efter et år i Princeton og Paris tog Jesper til University of Chicago. Her var han ansat først som Instructor og derefter Assistant Professor, indtil han i 2006 blev ansat som professor ved Københavns Universitet, eksternt finansieret af et Rømer Stipendium fra FNU og en European Young Investigator (EURYI) pris fra ESF. Han er netop blevet tildelt 20 million kroner fra Københavns Universitets stjerneprogram.

Jespers forskning er indenfor algebraisk topologi, specielt sammenspillet mellem homotopiteori og gruppe- og repræsentationsteori. Mange af hans vigtigste resultater omhandler homotopiteoretiske generaliseringer af begreberne gruppe og gruppevirkning.

I sin fritid holder Jesper bl.a. af løbe, rejse, samt forskellige former for sne- og windsurfing. Han prøver pt, sammen med sin partner Nathalie Wahl, at komme ind paa det københavnske boligmarked...

Susanne Ditlevsen er pr. 1. september ansat som lektor ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Susanne er cand. scient. i Matematik fra Universidad Nacional de Educación a Distancia i Spanien og i Statistik fra Københavns Universitet (2000). Hun tog sin ph.d. (2005) på Biostatistisk Afdeling, Københavns Universitet, hvor hun derefter var post doc og i 2007 blev lektor. Hendes forskning omhandler statistisk inferens for stokastiske processer med anvendelser indenfor fysiologi og medicin, og mere generelt matematisk modellering af fysiologiske systemer. Hun har arbejdet med parameterestimation i stokastiske differentialligningsmodeller, hvor data er diskrete observationer af dele af processen anvendt blandt andet på hydro- og hæmodynamikken i nyrerne, eller hvor data er første-passage tider af en underliggende diffusionsmodel anvendt på stokastiske neuronmodeller.

Susanne har levet 10 år i Spanien, hvor hun arbejdede som professionel skuespiller.

Jørn Børling Olsson er den 1. juli udnævnt til professor i Algebra ved Institut for Matematiske fag, Københavns Universitet.

Jørn er cand. scient. fra Århus Universitet 1969 og PhD fra University of Chicago 1974. Efter 14 år i udlandet (især Tyskland) blev han lektor i København i 1986. Hans forskningsinteresse er især repræsentationstori af endelige grupper, gerne med anvendelse af kombinatorik og talteori.

Fritiden bruges helst på ikke-sportlige aktiviteter som musik, film og litteratur.

Mikael Rørdam er d. 1. januar 2008 ansat som professor i operatoralgebra ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Mikael blev kandidat i 1984 fra Københavns Universitet og rejste herefter til Philadelphia hvor han studerende C*-algebraer hos Dick Kadison og blev Ph.D herfra i 1987. Han var adjunkt og senere lektor ved Odense Universitet frem til 1997. Derefter blev han ansat som lektor ved Københavns Universitet indtil han i 2002 rejste tilbage til et professorat ved Syddansk Universitet.

Mikael arbejder med C*-algebrateori og deres K-teori, herunder klassifikation og struktur for simple og ikke-simple C*-algebraer. Han har siddet i forskningsrådet (først SNF og nu FNU) siden 2002 (som næstformand siden foråret 2007), og han glæder sig så småt til, at der bliver mere tid til matematikken, når han træder af fra denne post sommeren 2008. Mikael er redaktør for Math Scand.

Fritiden bruges såvel til sportslige og ikke-sportslige aktiviteter, bla tennis og rejser.

Anders Rahbek er pr. 1. maj 2007 ansat som professor i Økonometri ved Institut for Matematiske Fag (IMF), Københavns Universitet (KU).

Siden 1996, hvor Anders blev phD i Matematisk Statistik ved Københavns Universitet, har han arbejdet som adjunkt og sidenhen lektor ved IMF. I perioden siden 1996 har han haft en del rejseaktivitet samt opholdt sig ved Oxford Universitet 2000-2001. Udover en baggrund i matematisk statistik, har Anders en M.Sc. fra London School of Economics i Økonometri, en M.A. fra University of Pennsylvania i Matematik, samt en kandidatgrad i Matematik-Økonomi fra KU.

Anders Rahbeks forskning er primært rettet mod den økonometriske tidsrække analyse dvs. rettet mod statistisk analyse af modeller der beskriver finansielle (volatilitet, GARCH) eller makroøkonomiske (kointegration) sammenhænge og fænomener over tid. I perioden 2005-2007 er han leder af projekt finansieret af forskningsrådene. Projektet arbejder med modeludvilking af modeller der udover modellering af volatilitet og kointegration, arbejder med såkaldt »regime-switching«. Dvs. modeller der tillader forskellige og varierende sammenhænge over tid i de nævnte modeller.

Anders spiller tennis og løber derudover gerne.

Begivenheder

ved Poul Hjorth

Mini-workshop »Global analysis and mathematical physics«

Roskilde University, Research Group IMFUFA, NSM
Monday, December 3, 2007
Organized by Bernhelm Booss-Bavnbek.

Se: http://www.ruc.dk/upload/application/pdf/f51d6748/bernhelm.pdf

1st Odense Winter School on Geometry and Theoretical Physics

University of Southern Denmark
Sunday 6th to Sunday 13th January, 2008
Organized by Francesco Sannino, Martin Svensson, Andrew Swann, Roshan Foadi.

Se: http://www.imada.sdu.dk/~swann/Winter-2008/

European Mathematical Society- »Joint Mathematical Weekend«

University of Copenhagen , February 29-March 2nd 2008
Organized by : The Danish Mathematical Society & The University of Copenhagen.

Se: http://www.math.ku.dk/english/research/conferences/emsweekend/

DMF Annual Meeting 2007

Friday, December 14th, 2007
'Technical University of Denmark Building 303-N Auditorium 41

See: http://www.dmf.mathematics.dk/
Organized by: The Danish Mathematical Society

Aftermath

ved Mogens Esrom Larsen

LØSNINGER

Opgaverne er fra International Mathematical Olympiads, 1990,3, 1987,2, 1986,1, 1986,5, 1986,6, 1988,5, 1993,2, 1988,2.

Nogle af opgaverne er løst af Ebbe Thue Poulsen.

Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke

$$\frac{2^n+1}{n^2} \tag{1}$$

er et helt tal.

Denne opgave er løst af TP.

Det er klart, at tallet $n = 3$ har egenskaben (1). Jeg påstår, at det er det eneste tal $n > 1$ med denne egenskab.

Beviset består af følgende trin:

(i) Hvis n har egenskaben (1), er n ulige.

(ii) Hvis n har egenskaben (1), har n også egenskaben

$$n | 2^n + 1 \tag{2}$$

(iii) Hvis n har egenskaben (2), og p er den største primtalsdivisor i n, gælder

$$n | 2^{n/p} + 1.$$

(iv) Hvis n har egenskaben (2), og p er den største primtalsdivisor i n, har tallet n/p egenskaben (2).

(v) Hvis n har egenskaben (2), er n delelig med 3, og hvis $n > 3$, er n deleligt med 3^2. item(vi) Hvis n er delelig med 3^2, har n ikke egenskaben (1).

Påstanden følger let af (i)–(vi).

Bevis for (i):. Da $2^n + 1$ er ulige, må n være ulige.

Bevis for (ii):. Klart.

Bevis for (iii):. Betragt den multiplikative gruppe G bestående af de restklasser modulo n, som er primiske med n. Hvis n har primfaktoropløsningen

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k},$$

hvor $2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, er G's orden

$$\phi(n) = (p_1-1)p_1^{e_1-1}(p_2-1)p_2^{e_2-1} \cdots (p_k-1)p_k^{e_k-1},$$

og altså har vi

$$2^{\phi(n)} = 1 \text{ i } G.$$

Ifølge (2) er $2^n = -1$ i G, og altså $2^{2n} = 1$ i G.

Lad o betegne ordenen af 2's restklasse i gruppen G. Så er o divisor i såvel $\phi(n)$ som $2n$. Da p_k kun forekommer i potensen $e_k - 1$, forekommer p_k højst i potensen $e_k - 1$ i o's primfaktoropløsning, og da o er divisor i $2n$, er o divisor i $2p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}$.

Da p_k er ulige, følger heraf, at o er divisor i $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}$, og altså at

$$2^{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}(p_k-1)} = 1 \text{ i } G.$$

Da

$$\begin{aligned} n/p_k &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1} \qquad , \\ &= n - p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}(p_k-1) \end{aligned}$$

er

$$2^{n/p_k} = 2^n 2^{-p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}(p_k-1)} = -1 \text{ i } G,$$

som påstået.

Bevis for (iv):. En umiddelbar følge af (iii).

Bevis for (v):. Ved brug af (iv) kan vi successivt fjerne primfaktorer i n, indtil vi ender med en divisor d af formen $d = p(= p_1)$, og med egenskaben (2).

Ved at bruge (iii) med n erstattet af p fås

$$p|2^{p/p} + 1 = 3,$$

og altså $p = 3$.

Hvis $n > 3$, udfører vi den samme proces (at fjerne primfaktorer), men nu standser vi, når der er to primfaktorer i d, altså ved en divisor d i n af formen $3d$, og med egenskaben (2).

Nu bruger vi (iii) med n erstattet af d, og får

$$3p|2^{3p/p} + 1 = 9,$$

og altså $d = 3^2$.

Bevis for (vi):. Vi viser først, at der for ethvert positivt helt tal k gælder, at $2^{3^k} + 1$ kan skrives

$$2^{3^k} + 1 = (3m + 1)3^{k+1},$$

hvor m er et helt tal.

Beviset føres ved induktion. Påstanden er opfyldt for $k = 1$ med $m = 0$, så lad os antage, at den er opfyldt for k, og lad os se på

$$2^{3^{k+1}} + 1 = ((3m + 1)3^{k+1} - 1)^3 + 1,$$

som udregnes til

$$((3m + 1)3^{k+1})^3 - 3((3m + 1)3^{k+1})^2 \\ + 3(3m + 1)3^{k+1},$$

der har den ønskede form.

Lad nu n være et ulige tal, som er deleligt med 3^2 (tilfældet n lige er uinteressant ifølge (i)), og lad os skrive n på formen $n = 3^k u$, hvor $k \geq 2$ og u er et ulige tal, som ikke er deleligt med 3.

Så er

$$2^n + 1 = ((3m + 1)3^{k+1} - 1)^u + 1 \\ = \sum_{j=1}^{u} \binom{u}{j} (-1)^{u-j} ((3m + 1)3^{k+1})^j.$$

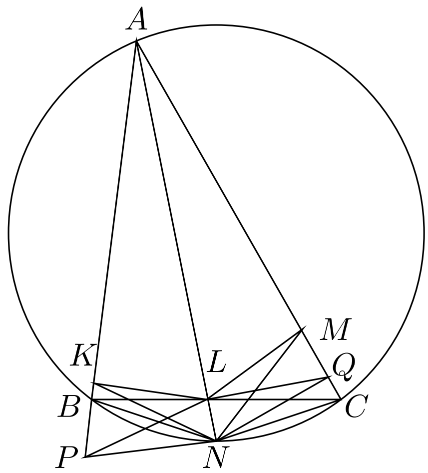
Her er alle led undtagen leddet svarende til $j = 1$ delelige med 3^{2k}, men så er $2^n + 1$ ikke deleligt med 3^{2k}, og derfor heller ikke med n^2.

Trekantet

I en spidsvinklet trekant $\triangle ABC$ skærer vinkelhalveringslinien fra A siden BC i punktet L og den omskrevne cirkel i punktet N. Fra punktet L nedfældes de vinkelrette på AB og AC, fodpunkterne kaldes hhv. K og M.

Vis, at firkanten $AKNM$ har samme areal som trekanten $\triangle ABC$.

Denne opgave er løst af TP.



Længden af et linjestykke, fx BN, betegnes $|BN|$ og arealet af en polygon, fx AKNM, betegnes $|AKNM|$.

Da $\angle BAN = \angle NAC$, er $\smile BN = \smile NC$, og altså $|BN| = |CN|$.

Fra punktet N nedfældes de vinkelrette på AB og AC; fodpunkterne kaldes hhv. P og Q. Af symmetrigrunde er $|KL| = |LM|$ og $|PN| = |NQ|$.

I de retvinklede trekanter $\triangle PBN$ og $\triangle QCN$ er $|PN| = |QN|$ og $|BN| = |CN|$, og altså har vi også $|PB| = |QC|$.

I de to trekanter $\triangle LBP$ og $\triangle LCQ$ er grundlinierne BP og CQ lige lange, og da højderne LK og LM også er lige lange, er $|LBP| = |LCQ|$.

Da linjerne KL og PN er parallelle er $|KPL| = |KNL|$, og analogt er $|LQM| = |LNM|$

(iøvrigt er trekanterne $\triangle KPL$ og $\triangle MQL$ kongruente, og det samme gælder $\triangle KNL$ og $\triangle MNL$, men det får vi ikke brug for).

Af antagelsen om, at $\triangle ABC$ er spidsvinklet, følger let, at punkterne K og M ligger i det indre af siderne AB og AC. For bestemtheds skyld antages det, at $\angle B > \angle C$ (tilfældet $\angle B = \angle C$ er let).

Da

$$\angle NBA = \angle NBC + \angle B = \frac{\angle A}{2} + \angle B > \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = \frac{\pi}{2},$$

ligger fodpunktet P på AB's forlængelse, og på den anden side ses Q at ligge på liniestykket AC mellem M og C.

Vi har så

$$\begin{aligned}|ABC| &= |AKL| + |KBL| + |ALM| + |LCM| \\ &= |AKL| + |KPL| - |BPL| \\ &\quad + |ALM| + |LQM| - |LCQ| \\ &= |AKL| + |KNL| + |ALM| + |LNM| \\ &= |AKNM|\end{aligned}$$

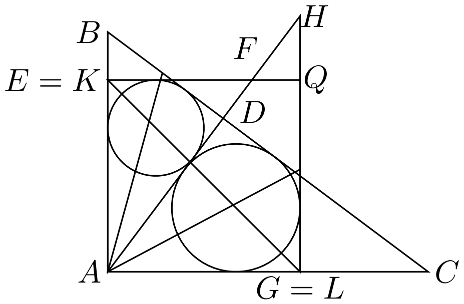
QED.

Retvinklet

$\triangle ABC$ er retvinklet med den rette vinkel i A. Lad D være fodpunktet for højden fra A. Linien gennem centrene for de indskrevne cirkler i trekanterne $\triangle ABD$ og $\triangle ACD$ skærer siderne AB og AC i hhv. K og L.

Vis at arealet af $\triangle AKL$ er højst halvt så meget som arealet af $\triangle ABC$.

Denne opgave er løst af TP.



Lad $\triangle AFE$ være billedet af $\triangle ABD$ ved spejlingen i halveringslinjen for $\angle BAD$, og lad $\triangle AHG$

Af symmetrigrunde er den indskrevne cirkel for $\triangle ABD$ også indskrevet i $\triangle AFE$, og den indskrevne cirkel for $\triangle ACD$ også indskrevet i $\triangle AHG$.

Da $|AE| = |AG|$, er AE og AG sider i et kvadrat $AEQG$, hvis fjerde vinkelspids Q er skæringspunktet mellem de to linjer, der indeholder linjestykkerne EF og GH.

Da diagonalen EG halverer vinklerne $\angle AEF$ og $\angle AGH$, ligger centrene for begge de betragtede indskrevne cirkler på EG, og altså er $E = K$ og $G = L$. Da kvadratet $AEQG$ er indeholdt i polygonen $AEFHG$, er

$$|ABC| = |AEF| + |AGH| \geq |AEQG| = 2|AEG|,$$

som påstået. Det ses, lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis $|AB| = |AC|$.

Begge dele

Lad D være et punkt inden i en spidsvinklet trekant, $\triangle ABC$, sådan at

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^o \text{ og } AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

(a) Beregn værdien af forholdet

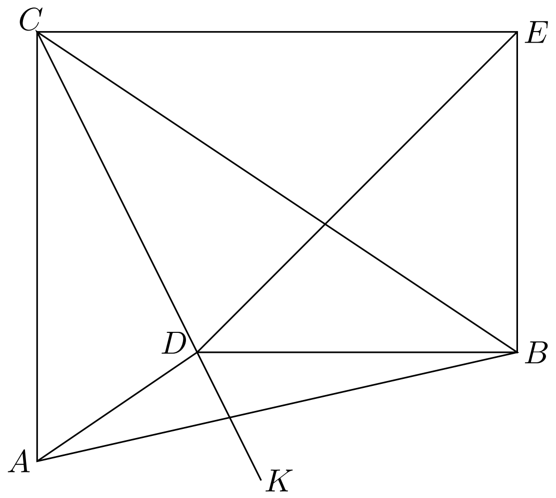
$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$$

(b) Vis, at tangenterne fra C til de omskrevne cirkler for trekanterne $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$ står vinkelret på hinanden.

Lad K være et vilkårligt punkt på linien CD udenfor C. Vinklerne ved D opfylder, at $\angle ADK = \angle CAD + \angle ACD$ og $\angle BDK = \angle CBD + \angle BCD$. Lægger vi dem sammen, får vi $\angle ADB = \angle CAD + \angle CBD + \angle ACB$. Sammen med første betingelse i opgaven giver det

$$\angle CAD + \angle CBD = 90^0. \tag{1}$$

Denne ligning er nøglen til opgavens løsning.



(a) Der tegnes en retvinklet trekant, $\triangle BCE$, med E udenfor $\triangle ABC$, så $\triangle BCE \sim \triangle CAD$. Så er

$$(2)\quad \angle CAD = \angle CBE, \qquad \angle ACD = \angle BCE$$

og

$$(3)\qquad \frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BC}, \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE}$$

Den anden ligning i (2) medfører, at $\angle ACB = \angle DCE$; dette, kombineret med den anden ligning i (3) viser, at trekanten $\triangle ABC$ er ensvinklet med $\triangle DEC$, og derfor, at

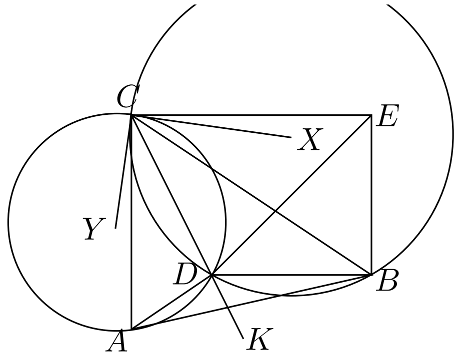
$$(4)\qquad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC},$$

Den første ligning i (2) sammen med formel (1) giver

$$\begin{aligned} \angle DBE &= \angle CBD + \angle CBE \\ &= \angle CBD + \angle CAD = 90^0. \end{aligned}$$

Endelig følger af første ligning i (3) og den anden betingelse i opgaven ($AC{\cdot}BD = AD{\cdot}BC$), at $BD = BE$. Derfor er $\triangle DBE$ en ligebenet retvinklet trekant, og altså er $DE = \sqrt{2} \cdot BD$. Indsættes dette i formel (4), får vi resultatet i (a):

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}.$$



(b) Betragt de omskrevne cirkler om trekanterne $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$. Lad CX være tangenten til den første cirkel i C og lad CY være tangenten til den anden cirkel i C (X og Y er punkter på tangenterne). Så er $\angle DCX = \angle CAD$ og $\angle DCY = \angle CBD$.

Derfor er ifølge (1) $\angle DCX + \angle DCY = 90^0$. Og da CD ligger inden for vinklen dannet af CX og CY, slutter vi, at de to tangenter står vinkelret på hinanden.

Elementært

Lad n være et positivt helt tal og lad $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ være delmængder af en mængde, B. Antag, at

(a) hver mængde A_i har netop $2n$ elementer,
(b) hver fællesmængde $A_i \cap A_j$, $i \neq j$, har præcis *ét* element,
(c) hvert element i B ligger i mindst to af mængderne A_i.

For hvilke værdier af n kan man give hvert element i B en værdi, 0 eller 1, sådan at hver mængde A_i har nøjagtig n elementer af værdi 0?

Denne opgave er løst af TP.

Vi viser først, at betingelsen (c) kan skærpes til følgende:

(d) hvert element i B ligger i netop to af mængderne A_i.

Antag, at et element, x_0 ligger i de tre mængder, A_k, A_ℓ og A_m. Fjern m fra mængden $\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$; tilbage er en mængde M af $2n$ elementer. Til hveret $j \in M$ tilegnes det element i A_m, der tillige ligger i A_j; der er kun et sådant element ifølge (b). Lad os kalde det $g(j)$; så er specielt $g(k) = x_0$ og $g(\ell) = x_0$.

Det følger nu af (c) at funktionen g afbilder M på A_m, der jo også har netop $2n$ elementer, (a). Derfor er g bijektiv, en modstrid.

Vi kan tælle det samlede antal elementer af værdi 0 ved successivt at gennemløbe de $2n+1$ mængder, A_i, og i hver af dem registrere de elementer af værdi 0, som vi støder på. Det giver ialt $(2n+1)n$ elementer af værdi 0, men da hvert af dem ligger i 2 af mængderne A_i, bliver hvert af dem talt med 2 gange, og altså må antallet $(2n+1)n$ være lige, dvs n må være lige.

Jeg vil omvendt vise, at hvis n er lige, så er det muligt at give elementerne i B værdierne 0 og 1 sådan, at hver mængde A_i indeholder n elementer af værdi 0.

Dertil definerer vi en afstand d på mængden $\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$ ved

$$d(i,j) = min\{|i-j|, 2n+1-|i-j|\}$$

(det er let at se, men i realiteten uvigtigt, at d faktisk er en metrik).

Lad nu $b \in B$ være givet, og lad i og $j \neq i$ være bestemt således, at $b \in A_i \cap A_j$. Så tilskriver vi b værdien 0, hvis og kun hvis $d(i,j) \leq n/2$.

Denne fordeling opfylder, at hver mængde, A_i har netop n elementer af værdi 0. Det er lettest at overskue, hvis problemstillingen anskueliggøres ved hjælp af en regulær $(2n+1)$–kant M med vinkelspidser $P_i, i = 1, 2, \cdots, 2n+1$, og B identificeres med mængden af sider og diagonaler i M, medens A_i betegner mængden af sider og diagonaler med P_i som det ene endepunkt. Den foreslåede tilskrivning af værdierne 0 og 1 svarer til, at elementer i A_i, der får værdien 0, er de n korteste linjer, der udgår fra P_i.

NYE OPGAVER

1. $ABCD$ er et rektangel, hvori siden $AB = a$ og siden $BC = 2a$. P er et punkt på siden AB. Linien gennem P parallel med diagonalen BD skærer siden AD i punktet Q. Cirklen med A som centrum og AP som radius skærer cirklen over AB som diameter i punkterne H og K. S er skæringspunktet mellem linien HK og linien gennem Q parallel med AB.

Bestem det geometriske sted for S, når P gennemløber siden AB.

Angiv art og beliggenhed af det fundne geometriske sted.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \sin 2x + 2\cos x \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og x–aksen.

Beregn desuden rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den omtalte figur drejes 360^0 om x–aksen.

3.I terningen $ABCD{-}A_1B_1C_1D_1$, hvor kanterne AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1 er parallelle, er kantlængden 2. Midtpunkterne af kanterne C_1D_1, BB_1, og CD kaldes henholdsvis M, N og P.

Beregn siderne i trekant $\triangle AMN$ samt trekantens areal.

Beregn toplansvinklen mellem planerne AMN og $ABCD$.

Beregn rumfanget af pyramiden $A{-}BNMP$.

4.I et trapez $ABCD$ er vinkelen $\angle A = \angle D = 60^0$, og dets omkreds er 56.

Bestem siderne i trapezet, således at det areal bliver så stort som muligt.

bestem dernæst siderne i trapezet, således at rumfanget af det legeme, der fremkommer ved en drejning af trapezet 360^0 om siden AD, bliver så stort som muligt.

5. p, q og R er givne liniestykker og v en given spidst vinkel.

Konstruer en firkant $ABCD$, hvori diagonalen BD halverer vinkelen $\angle B$, vinkelen $\angle BAC = v$, $AB : BC = p : q$, og således at firkanten kan indskrives i en cirkel med radius R.

Diskussion kræves.

Beregn firkantens vinkler og sider, når $p = 4$, $q = 5$, $R = 3$ og $v = 70^0, 78$.

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

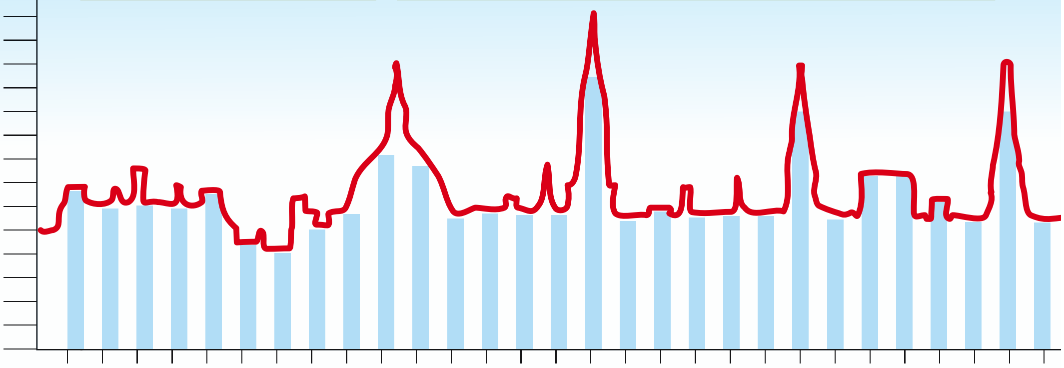
Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C

POST B
PP DANMARK

EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY JOINT MATHEMATICAL WEEKEND

University of Copenhagen
February 29-March 2nd 2008

PLENARY SPEAKERS	TOPICS
Xavier Buff (Toulouse)	**Algebraic topology** [Chairs: Jesper Grodal and Ib Madsen]
Nigel Higson (Pennsylvania State)	**Coding theory** [Chairs: Olav Geil and Tom Høholdt]
Frank Merle (Cergy-Pontoise)	**Non-commutative geometry/operator algebra** [Chairs: Ryszard Nest and Mikael Rørdam]
Stefan Schwede (Bonn)	**Dynamical systems** [Chairs: Carsten Lunde Petersen and Jörg Schmeling]
	Algebra and representation theory [Chairs: Jørn Børling Olsson and Henning Haahr Andersen]
	Partial differential equations [Chairs: Gerd Grubb and Helge Holden]



www.math.ku.dk/ems/

European Mathematical Society · Danish Mathematical Society · The Danish Natural Science Research Council · The University of Copenhagen · The City of Copenhagen

ORGANIZED BY: **The Danish Mathematical Society & The University of Copenhagen**

EXECUTIVE ORGANIZING COMMITTEE: **Søren Eilers · Jesper Grodal · Helge Holden · Carsten Lunde Petersen · Ryszard Nest**