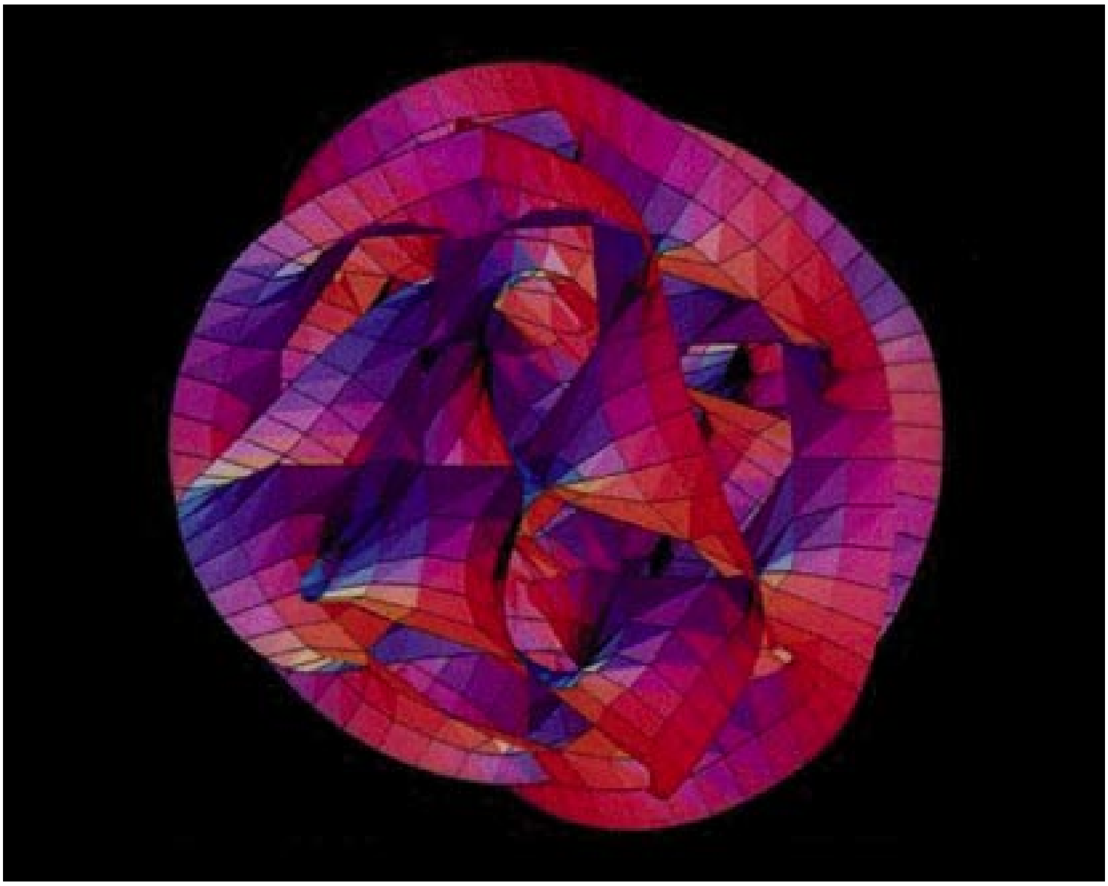
mat

MATILDE

Tema:
Matematikken udefra



NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR 32 AUGUST 2007

Leder

Af: Bent Ørsted

Lad R være en ring med enhed og $a, b, c \in R$ med $a + b + c = 0$ og b invertibel med (multiplikativ) invers b^{-1}; så gælder

ab-1c = cb-1a.

Bevis: Under antagelserne har vi ved at gange ligningen igennem med cb^{-1} fra venstre at

$$cb^{-1}a = -c - cb^{-1}c$$

og ved at gange igennem med $b^{-1}c$ fra højre ligeledes at

$$ab^{-1}c = -c - cb^{-1}c.$$

Men så har vi vist det ønskede. QED.

Ja, sådan kender vi matematikken, ingen formildende omstændigheder, ingen anvendelser, motiverende bemærkninger eller eksempler; her en lille måske overraskende sætning med sit bevis. Som Serge Lang, *prolific mathematician* (det lyder rigtig godt på engelsk her), yndede at sige: *I can let anything I want.* Og det er jo rigtigt: Matematikken udsiger alene, at hvis det og det antages, *så følger* konsekvenserne. Selv slutningsreglerne (logikken) må antages, ofte store dele af mængdelæren, og der må holdes styr på defi- nitioner, aksiomer og andre forudsætninger. Det lærte vi af Euklid. At P medfører Q er næsten som et studie af årsag og virkning i den fysiske og virkelige verden, tilbage til vores rødder hos Aristoteles, der søgte efter Åsager som måtte være der. Han arbejdede med fire årsager: Den materielle årsag, den formelle årsag, den bevirkende rsag, samt formålet eller hensigten, dvs. den teleologiske årsag. Af disse ville man i dag mest tænke på den bevirkende årsag, det egentlig igangsættende og frembringende. Vi ser her, hvor hurtigt vi er kommet ind på tunge filosofiske emner, såsom beskrivelsen af den virkelige verden, sandhed, viden osv. - og ikke mindst spørgsmålet om hvad der eksisterer, måske ingenting (jævnfør Per Højholts sammenskrivning af *en ting en ting en ting en ting til entingentingentingenting)*; og straks er vi videre hos Heidegger og Kierkegaard.

I dette nummer af Matilde har vi b. a. interviews med hhv. A. Connes og J. Morgan om deres syn på matematik, bragt med tilladelse fra Newsletter of the European Mathematical Society, og vi har et længere debatindlæg af G. Buschman - gerne set som en opfordring til evt. andre læsere til at indsende reaktioner på dette eller andre emner i Matilde. Som tidligere anført håber vi, at læserne vil bidrage til at gøre Matilde til et mere levende medie, og såvel konkrete indlæg som evt. ideer til stof og fremtidige emner er meget velkomne. Formålet er som altid at fremme interessen for matematik i Danmark og at støtte Dansk Matematisk Forening i dennes arbejde på dette felt.

Men tilbage til *I can let anything I want.* Det er jo ikke hele sandheden - selv om Isaac Asimov gør et storslået forsøg i sin science fiction novelle *The last question*, hvor entropien i universet har nået sin yderste grænse, milliarder afår er gået og bevidstheden/computeren Galactic AC, der har opbrugt al energi, *.... carefully organized the program. The consciousness of AC encompassed all of what had once been a Universe and brooded over what was now Chaos. Step by step, it must be done. And AC said, "LET THERE BE LIGHT!". And there was light ——*

Matematikeren Henri Poincaré mente om matematikken, at den er det stik modsatte af digtning (hvor man jo ellers kunne hævde at begge forsøger at give korte og klare og krystallinske beskrivelser), idet digte giver mange forskellige ord for at beskrive det samme, mens matematikken giver samme ord og begreber for at beskrive mange forskellige ting. Altså er matematikken lidt som sproget, forsøger at tydeliggøre, indkredse og repræsentere "virkeligheden" ved relevante ord og begreber, at udvide vores ordforråd. Men samtidig interesserer matematikken sig også for sig selv, undersøger sine egne indre sammenhænge og relationer, altså når $a + b + c = 0$ osv.

Matematikkens mestre kan godt minde os lidt om sprogets mestre, som nu f. eks. Søren Kierkegaard, der i "Skyldig? - Ikke-Skyldig?" lader Frater Taciturnus udbryde, *Jeg føler mig lykkelig ved at være bundet til mit Modersmaal ..... der ikke stønner forfanget i den vanskelige Tanke, og derfor er det maaskee Nogen troer, at det ikke kan udtrykke den, fordi det gjør Vanskeligheden let ved at udtale den ..... et Sprog, der ikke finder langt borte, hvad der ligger nær, eller søger dybt nede, hvad der er lige ved Haanden, fordi det i lykkeligt Forhold til Gjenstanden gaaer ud og ind som en Alf, og bringer den for Dagen som et Barn den lykkelige bemærkning ..... et Sprog, der ikke uden Udtryk for det Store, det Afgjørende, det Fremtrædende, har en yndig, en tækkelig, en livsalig Forkjærlighed for Mellemtanken og Bibegreber og Tillægsordet, og Stemningens Smaasnakken, og Overgangens Nynnen, og Bøjningens Inderlighed og den dulgte Velværens forborgne Frodighed; et Sprog, der forstår Spøg nok så godt som Alvor: et Modersmaal, der fængsler sine Børn med en Lænke som 'er let at bære - ja! men tung at bryde'.*

Enjoy.

mat

MATILDE – NYHEDSBREV FOR
DANSK MATEMATISK FORENING
medlem af
EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY

Nummer 32 – August 2007

Redaktion:

Bent Ørsted, Aau
(ansvarshavende og
TEMAREDAKTØR)

Carsten Lunde Petersen, Ruc
Jørn Børling Olsson, Ku
Poul Hjorth, Dtu
Mikael Rørdam, Sdu
Carl Winsløw, Ku

ADRESSE:

MATILDE
INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG
KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 KØBENHAVN Ø

FAX: 3532 0704
e-post: *matilde@mathematics.dk*
URL:
www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Matilde udkommer
4 gange om året

Indlæg til næste nummer skal
være redaktionen i hænde
senest 31. oktober 2007

Tema:
Matematik og økonomi

Indhold:

Søren Eilers
eilers@math.ku.dk

Kære medlemmer

Her sidst på sommeren er det måske på sin plads at give et overblik over de emner der for tiden er oppe i foreningens bestyrelse.

Jeg tager de dårlige nyheder først: På trods af et stort og højkvalificeret forberedende arbejde, navnlig af Lisbeth Fajstrup og Thomas ØstergaardSørensen, lykkedes det ikke at finde mere end 7 interesserede studerende tilat deltage i foreningens sommerskole i år, og vi var således nødt til ataflyse arrangementet, der skulle have fundet sted i Aalborg.

Jeg må blankt indrømme at jeg ikke kan forstå hvorfor så få vil tage mod vores flotte tilbud om faglige og fagsociale aktiviteter, navnlig i lyset af at alle de store matematikinstitutter velvilligt havde givet tilsagn om at dække en signifikant del af deltagernes egenomkostninger. Vi starter efter sommerferien en diskussion om hvordan vi kan sikre os at denne ærgerlige situation ikke indtræffer igen. En ide fra organisationskomiteen i Aalborg,som jeg har fæstet stor opmærksomhed ved, er at få nogle af vore studentermedlemmer til at deltage i planlægningen. Dette harmonerer med andre tanker der har været fremme om at lave en slags studentersektion hvor vores studentermedlemmer rundt omkring i landet kan kommunikere direktesammen.

Som et lille plaster på såret kan jeg nævne at vi har haft lejlighed til at bidrage økonomisk til den "Matematik-camp" som arrangeres af Ungdommens Naturvidenskabelige Forening på SDU for interesserede studerende på gymnasieniveau.

I foråret holdt vi et meget tankevækkende møde med deltagelse af Pia Jarvad(PJ), seniorforsker ved Dansk Sprognævn. Hun fremhævede forskellige sprogpolitiske og indlæringstekniske grunde til at beskytte dansk som et komplet sprog der fx kan bruges til matematikfaglige diskussioner og pegede på 2 hovedvirkemidler:

1) At beslutte hvilke kurser der skal udbydes på dansk under hensyn tildette i stedet for direkte dikteret af internationaliseringsbestræbelser
2) At styrke og udvikle det danske fagsprog

Det første punkt diskuteredes meget, men PJ medgav at det ikke var noget sprognævnet kunne hjælpe os så meget med at træffe beslutninger om. Så vi vendte os mod det andet punkt, og her tilkendegav PJ at det er noget sprognævnet gerne deltager i (og har gjort det fx med planteavl og kemi).

Men der fremkom en del begrundet skepsis om effektiviteten af blot at lave og publicere ordlister. Det mest slagkraftige virkemiddel vi har må være at sikre de studerende gode og tilpassede lærebøger på dansk - men det er selvfølgelig en meget stor mundfuld for en størrelse som DMF. Jeg synes vi skal diskutere yderligere om foreningen kan bidrage konstruktivt til punkt2), men erkende at vi ikke har mandat til at blande os i hvordan de forskellige uddannelsesinstitutioner træffer beslutningerne under punkt 1).

I bestyrelsen arbejder vi med to fremtidige arrangementer; dels årsmødet der finder sted på DTU til efteråret, og et større møde under rammen "EuropeanMathematical Society Joint Weekend" der planlægges på KU i weekenden den 1.-2. marts 2008. Ved denne lejlighed får vi også fornøjelsen af at være værter for et møde i EMS' eksekutivkomite.

Til sidst: Flere af bestyrelsens medlemmer - mig selv inklusive - er på valg til næste år og nogle af vore mest erfarne bestyrelsesmedlemmer falder forforeningens regler om at man kun kan være i bestyrelsen i 8 år i træk. Jeg håber at de øvrige vil være villige til at fortsætte, men under alle omstændigheder bliver der brug for nye ansigter i vores bestyrelse. Jeg beder alle medlemmer om at give mig et praj hvis det er noget for dem, eller hvis de kender nogen det ville være noget for. Det er mange spændende og vigtige ting at engagere sig i i DMFs bestyrelse!

Matematikkens påvirkning af fysikken

Af: Michael Cramer Andersen,
astrofysiker og redaktør af Kvant

Når matematikken anvendes i f.eks. fysikken er det en kæmpe fordel at de matematiske resultater er blevet bevist, så man kan være sikker på at de er gyldige. I den forbindelse gør det ikke noget, at beviserne er flere hundrede år gamle. Her vises nogle eksempler fra videnskabens historie, hvor matematikken har spillet både positivt og negativt ind på beskrivelsen af verden. Pythagoræerne mente at alt var tal, hvilket godt kunne føre til vildfarelser. I renæssancen blev dynamiske naturlove udviklet og førte til differentialregningen. En af de største intellektuelle kraftpræstationer i det 20. århundrede var Einsteins almene relativitetsteori, hvor ny matematik igen kom til at præge den måde verden beskrives på. I dag krydser fysikken og matematikken for alvor klinger i strengteorien.

Matematisk skønhed

De grundlæggende love i fysikken benytter mange forskellige dele af matematikken, f.eks.: *vektorfelter* (elektromagnetisme), *sandsynligheder* og *komplekse tal* (kvantemekanik), *gruppeteori* (partikelfysik) og *differentialgeometri* (Einsteins almene relativitetsteori). En af drivkræfterne i udviklingen af disse områder af fysikken har været ønsket om at de fundamentale naturlove skulle opfylde forskellige symmetrier, der ofte opfattes som ”smukke”. Men hvad vil det sige at en generel teori, der beskriver mange fysiske fænomener, er ”smuk” eller ”elegant”? Hvordan kan skønheden i naturen oversættes til matematik og omvendt? Én af de ting der kendetegner de fundamentale fysiske love er, at de har en meget stor forklaringskraft og kun gør brug af få frie parametre. En teori med få parametre, der kan forklare mange fænomener har en højere status i kraft af dens større effektivitet. En anden vigtig egenskab ved en smuk teori er, at den bygger på fundamentale teoretiske principper, hvilket minder om matematikkens aksiomer.

Matematik i antikkens naturvidenskab

Pythagoræerne arbejdede ud fra en tese om, at ”hele Universet er behersket af matematiske lovmæssigheder, der kan udtrykkes som relationer mellem simple hele tal”. Herfra stammer citatet, ”Alt er tal”, som skulle stamme fra Pythagoras.

Pythagoras fandt inspirationen til at beskrive alting ved hjælp af tal ud fra undersøgelser af instrumenter der kunne frembringe lyde. F.eks. ses det i strengeinstrumenter, at når tonerne er i indbyrdes harmoni, er der pæne talforhold mellem strengenes længder. Idéen om, at musik kan ordnes ved de hele tal og derved afspejler universets harmoni, blev videreudviklet i Platons ”Timaeus”. Matematik og musik har været tæt forbundet i mange hundrede år. Da Johann Sebastian Bach i 1722 komponerede ét stykke til hver af de 24 mulige tonarter på det moderne »veltempererede klaver«, fulgte han en systematik der var en matematiker værdig. Men idéen om at alt er tal førte også til mange vildfarelser hos pythagoræerne, som er refereret og kritiseret af Aristoteles.

For pythagoræerne havde tallene en mystisk betydning, nærmest en uafhængig realitet. Fænomenerne var noget sekundært og deres relevans bestod i hvordan de afspejlede tal. Det var tallene som var ansvarlige for harmonien, som var det guddommelige princip der bestemte strukturen af hele verden. På et sådant grundlag kan man kun frygte hvilke konklusioner der blev draget. Vi er allerede ude i talmystikken. Men det bliver værre. Tallene blev også tillagt *moralsk* betydning! F.eks. svarede ”retfærdighed” til tallet 4 og ”ægteskab” til tallet 5.

Der var på denne tid 9 kendte ”planetsfærer”: Jorden, Månen, Solen, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn og Fiksstjernesfæren. Men for at få antallet til at passe med 10, som var et *helligt tal*, idet 10=1+2+3+4 som danner en 2 dimensional pyramide, opfandt Pythagoræerne en *ikke-eksisterende planet* – en ”modjord”, for at få deres system til at stemme. Den blev aldrig observeret.

Pythagoræerne havde også en idé om, at harmonien i musikken kunne bruges til at beskrive Universet eller planetsfærerne. Denne idé om ”sfærernes harmoni” blev taget op i et musikteoretisk og temmelig mystisk værk af den unge Johannes Kepler. Han tillagde hver af planeterne en tone, som bestemte deres bevægelse. Mennesket kan imidlertid ikke høre disse toner, fordi vi har vænnet os til tonerne fra vi er født, og derfor kan vi ikke længere opfatte dem. Kepler brugte de platoniske legemer eller regulære polyedre, indskrevet i hinanden, til at forklare solsystemets opbygning. Det er bemærkelsesværdigt, at den samme person som i sin ungdom tilsluttede sig hele den pythagoræiske talmystik (som i dag vil blive betegnet som pseudovidenskab) senere er mester for at udvikle de dynamiske naturlove, som astronomer og fysikere stadig bruger i dag.

Bevægelseslovene for legemer på jorden og i himlen blev fundet af Galilei og Kepler og sammenfattet af Newton, som også udviklede differentialregningen til formålet. Den bygger på *kontinuitet*, hvorfor de simple talforhold, som pythagoræerne talte om, er helt utilstrækkelige.

Da de græske elementarfilosoffer Demokritos og Leukippos beskrev den første filosofiske atomlære, havde Pythagoras allerede beskrevet geometriske punkter som de mindste dele. Demokritos tilføjede i virkeligheden blot ”masse” til punkterne og havde så de mindste *stofdele*. Men på denne filosofiske idé nåede atomisterne væsentlig længere i retning af en materialistisk videnskab end pythagoræerne og dem der beskæftigede sig med de fire elementer.

I dag beskriver fysikken næsten alt ved atomer, der er opbygget af mindre kvantepartikler. Disse har fundamentale egenskaber (f.eks. ladning og spin), der er beskrevet ved *kvantetal.* Så den gamle Pythagoras havde næsten ret, hvis vi siger at »Alt er kvantetal«. Fysikere i dag anser kvantemekanikken for at være en af de fundamentale teorier for naturen. Selv rummet og tiden er sandsynligvis kvantiseret, så de skal beskrives ved diskret matematik på det mest fundamentale plan.

Almen relativitetsteori

Et af de bedste eksempler på en fysisk teori der forklarer meget og samtidig er elegant er Einsteins almene relativitetsteori, som er den hidtil bedste teori for tyngdekraften. Denne teori bygger på to antagelser:

1. Formen på naturlovene må ikke afhænge af valget af koordinatsystem
2. En person kan ikke mærke forskel på om han befinder sig i et tyngdefelt eller er i bevægelse med konstant acceleration i et rum uden et tyngdefelt (ækvivalensprincippet).

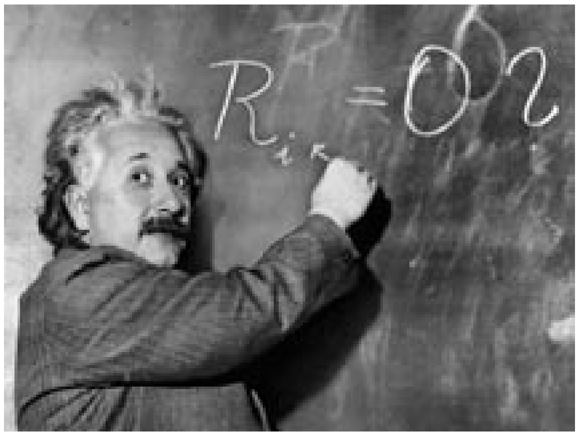
Den første antagelse er indbygget i Einsteins specielle relativitetsteori fra 1905. Denne teori beskriver hvordan et legeme opfattes af en observatør med en bestemt hastighed relativt til legemet. Hvis legemet bevæger sig tæt på lysets hastighed, som er den maksimale hastighed i naturen, fortæller teorien hvordan tiden og rummet opfører sig og påvirker hinanden. Teorien var et radikalt brud med opfattelsen af tiden som en absolut størrelse der var helt uafhængig af rummet. Einstein påstod at rum og tid var flettet sammen.

Einstein indså i 1907, at der var en forbindelse mellem tyngdekraften og accelererede bevægelser: Hvis en person er i frit fald vil han ikke føle sin egen vægt. Den specielle relativitetsteori beskriver kun bevægelser med konstant hastighed og han forsøgte nu at udvikle en mere almen relativitetsteori der også kunne beskrive accelererede bevægelser. Denne teori ville samtidig kunne beskrive tyngdekraften.

Den specielle relativitetsteori mødte meget modstand og da matematikeren Hermann Minkowski i 1908 formulerede den specielle relativitetsteori *geometrisk* ved hjælp af en firedimensional rumtid, følte Einstein at han selv ikke længere kunne forstå den. Lidt firkantet kan man sige, at Minkowski tilføjede *tiden som den fjerde dimension* ved at gange lysets hastighed på. Afstanden mellem to begivenheder i tid //*og rum*// kan med et værktøj indenfor differentialgeometrien opskrives i en //*metrik*//, ds^2. Kvadraterne på de tre rumkoordinater summeres og herfra skal tidsleddet, c^2dt^2, *trækkes fra*, da tiden opfører sig anderledes end rummet:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

Hvad enten man forstår relativitetsteorien eller ej, må man indrømme at denne ligning er smuk i al sin enkelhed. Der er symmetri mellem de tre rumkoordinater, der summeres som det kendes fra Euklidisk geometri. Pythagoras' sætning siger, at kvadratet på længden af hypotenusen i en retvinklet trekant er lig summen af kvadraterne på de enkelte sider. Dette kan udvides til 3 dimensioner og afstandene kan være vilkårligt små. Men tiden falder udenfor: Tiden kan opfattes som en *imaginær* rumdimension idet: $i^2c^2dt^2 = -c^2dt^2$.



Da Einstein havde lært differentialgeometrien erkendte han, at den nye geometriske beskrivelse af rumtiden var et vigtigt skridt i retning mod at formulere en teori for tyngdekraften – den almene relativitetsteori. Der er ingen tvivl om, at teorien blev mere klar ved at blive omformuleret af en matematiker, selv om Einstein i starten havde svært ved at forstå den, bl.a. fordi tiden ikke summerede som i Euklidisk geometri.

Ækvivalensprincippet hævder, at en observatør ikke kan afgøre ved noget eksperiment om han er udsat for et tyngdefelt eller en konstant acceleration. Alle massive legemer har en "modvilje" mod at blive accelereret fordi de har en "inertiel masse" og denne masse har præcis samme størrelse som den gravitationelle masse, der kan måles på en vægt. Det var allerede kendt af Newton at den inertielle masse og den gravitationelle masse var lige store. Men da Einstein indså at accelerationen af et legeme i frit fald *netop udlignede* legemets vægt, var han på sporet af en ny teori for tyngdekraften.

Han erkendte nu, at man kunne beskrive accelererede bevægelser som en *krumning af rumtiden*. F.eks. vil lys altid bevæge sig langs en ret linje, men i et krumt rum kan dette godt være en kurve der buer ligesom længdegraderne på Jordens overflade. De kaldes også nulgeodæter.

Einstein kunne altså ikke nøjes med Euklidisk geometri, men skulle bruge en geometri med krumning og med flere dimensioner. Den var heldigvis udviklet af bl.a. Gauss og Riemann i starten af 1800-tallet. Disse matematikere var begge interesserede i det fysiske rums natur (se Matilde nr. 20, 2004). Efter at have undersøgt de matematisk mulige geometrier forsøgte Gauss at måle geometrien af det rum vi lever i, men han fandt ingen afvigelser fra den Euklidiske geometri.

Når man tænker på hvor mange grå hår i hovedet det gav Einstein bare at sætte sig ind i hvordan den ikke-Euklidiske geometri skulle anvendes i fysikken, kan man godt tvivle på hvor langt den almene relativitetsteori overhovedet var nået, hvis også matematikken skulle udvikles.

Dette eksempel viser hvor vigtigt det kan være for fysikkens udvikling at matematikerne generaliserer resultater og beviser dem systematisk så når de engang skal anvendes, er der en hel værktøjskasse af begreber og metoder som fysikerne kan anvende. Det kan også være til stor hjælp at matematikere hjælper med at udpege hvilken matematik der er mest optimal til et bestemt problem.

Einstein drømte om at formulere en forenet feltteori, der beskrev alle naturkræfterne. Denne drøm har bl.a. ført til at en meget stor del af vore dages teoretiske fysikere arbejder med *strengteori*, der er endnu et eksempel på hvordan fysik og matematik griber ind i hinanden.

Strengteori – teorien om alt eller intet

Allerede i 1920'erne fandt fysikerne Theodor Kaluza og Oscar Klein ud af, at man kunne beskrive elektromagnetismen indenfor rammerne af Einsteins almene relativitetsteori ved at *tilføje en femte dimension*. Denne ekstra dimension må være sammenrullet, eller kompaktificeret. Hvis elektriske og magnetiske felter kan bevæge sig i en ekstra 5. dimension må denne være mikroskopisk sammenlignet med de store dimensioner vi kender. Hvis dimensionen er rullet sammen i en lille cirkel med stor krumning, ligner det bare et punkt set på store afstande. Teorien havde imidlertid nogle fundamentale problemer og blev forladt.

I 1960'erne udviklede fysikere en model for partikler (mesoner) der er bundet sammen af den stærke kernekraft, hvor de fundamentale partikler blev erstattet af *strenge*. Men teorien havde nogle problemer – den kunne ikke forklare fermioner og den forudsagde tachyoner, dvs. partikler der bevæger sig hurtigere end lyset, hvilket ikke er observeret. Teorien blev snart udkonkurreret af den mere succesrige model med kvarker og gluoner.

I 1980 kombinerede Schwarz og Green de to idéer: strenge og ekstra dimensioner. Derudover tilføjede de en ny symmetri – supersymmetri – mellem stofpartikler (fermioner) og kraftpartikler (bosoner). Med de supersymmetriske mangedimensionale strenge kunne de forklare tyngdekraften som en kvanteteori. Dette havde hidtil været umuligt og ført til uendeligheder i udregningerne, men problemet blev tilsyneladende løst med disse "superstrenge".

Strengteorien kan – på papiret – løse flere af den teoretiske fysiks store problemer. De uendeligheder der opstår i traditionel kvantefeltteori i udregningerne af vekselvirkninger mellem punktpartikler på korte afstande undgås. Men prisen er, at strengene kræver mange ekstra dimensioner som ikke er blevet påvist eksperimentelt.

Den fundamentale længdeskala for strengene er 10^{-35} meter, som kaldes Planck-længden, og det er reelt først på denne skala at den fulde strengteori bliver relevant. Eksperimenter i dag kan kun undersøge stoffet ned til ca. 10^{-18} meter, så der er lang vej endnu, idet hver størrelsesorden kræver en større partikelaccelerator.

Den nye "supersymmetri" mellem partiklerne og kræfterne i naturen forudsiger et væld af nye partikler som man heller ikke har fundet eksperimentelt. Supersymmetrien forudsiger en ny partikel for hver af de kendte partikler, og en forklaring på hvorfor man ikke ser nogen af disse supersymmetriske partnere kunne være, at de først dannes ved højere energier. Ved de lave energier som er almindelige i vore dages univers, må supersymmetrien være brudt. Man håber på at detektere supersymmetriske partikler i fremtidige eksperimenter. Set fra et eksperimentelt synspunkt virker det ikke særlig smart at indføre en symmetri man ikke har set i noget eksperiment og oven i købet hævde, at symmetrien er brudt så man ikke kan se den med nutidens eksperimenter. Når man begynder at »lappe« på teorierne på denne måde kommer man til at tænke på epicykelteorien for planeternes bevægelser, hvor der blev tilføjet flere og flere cirkler ovenpå de første cirkler, for at teorien passede med observationerne.

Nogle strengfysikere mener, at supersymmetrien er så smuk, at den må være rigtig - bl.a. fordi det er en af de mest naturlige udvidelser af Einsteins almene relativitetsteori. Men det er ikke bevis nok. Supersymmetriens - og dermed strengteoriens - succes afhænger bl.a. af om de forudsagte supersymmetriske partikler virkelig bliver observeret. Dette kan måske ske allerede indenfor de nærmeste år i den europæisk partikelaccelerator »Large Hadron Collider«, der har været omkring 15 å undervejs.

Supersymmetriske partikler er også foreslået som kandidat til det mørke stof som er blevet observeret indirekte i Universet. Så der er også en mulighed for at bekræfte forudsigelser fra strengteorien gennem kosmologiske observationer.

Strengteorien forsøger at beskrive tyngdekraften som en kvanteteori med en statisk baggrund, hvor Einsteins teori er en feltteori med en dynamisk rumtid. Tyngdekraften antages at blive formidlet kvantemekanisk gennem gravitoner som er analoge til elektromagnetismens fotoner, men ingen har observeret disse gravitoner. De versioner af strengteorien som har en statisk baggrund er altså i konflikt med klassisk rumtid.

De fleste fysikere betragtede derfor teorien med skepsis, idet der hverken kunne observeres ekstra dimensioner eller supersymmetri og der var ingen forudsigelser der kunne sammenlignes med eksperimenter. Siden kom der flere versioner af strengteorien til og billedet blev mere mudret. Det viste sig også, at proceduren for hvordan de ekstra dimensioner skal foldes sammen ikke er entydig.

Hvis ikke der er en entydig formulering af strengteorien svækkes dens troværdighed, og hvis en udgave af strengteorien er korrekt – hvilken én af de mange udgaver er det så?

I 1995 kom en ny revolution af strengteorien, da det viste sig at forskellige versioner af strengteorien havde dybe forbindelser som antydede, at de måske alle var aspekter af den samme mere fundamentale teori, som blev kaldt "M-teori". De forskellige versioner var forbundet med dualiteter, som gjorde det muligt at bygge broer mellem forskellige versioner af strengteorien.

Siden denne 2. strengrevolution har strengteorien af mange teoretiske fysikere nærmest fået status af "fysikkens hellige gral" og det kan i dag være vanskeligt at få penge til at forske i alternative teorier. Strengteorien er nærmest blevet det dominerende paradigme længe inden teorien har fået bekræftet en eneste forudsigelse eksperimentelt! Det anses af flere fysikere for at være et alvorligt problem for den teoretiske fysik i dag, hvilket bl.a. påpeges af Lee Smolin i bogen "The trouble with physics - The rise of string theory, the fall of a science and what comes next", der udkom i 2006.

De senere års udvikling af "M-teorien" har ført til endnu flere objekter, der lever i flere dimensioner og som ikke er observeret – de såkaldte "braner". Set udefra ligner det hele et luftkastel der meget let kan falde sammen. Masser af matematik, men meget lidt fysik. Hvis strengteorien har mistet forbindelsen til virkeligheden og blot genererer flere og flere objekter, som konsekvens af ekstra dimensioner og symmetrier der ikke findes, så gør strengteorien måske mere skade end gavn. I mange lande går størstedelen af forskningsmidlerne i teoretisk fysik i dag til strengteori og det er svært at få penge til at forske i alternative teorier.

Selv om der kan være fornuft i at beskrive visse fysiske egenskaber ved elementarpartikler som bevægelser i en kompakt ekstra dimension, kan det endnu ikke afgøres om det afspejler virkeligheden, om det bare er en smart regneteknik, eller noget helt tredje. I fysik er det i sidste ende eksperimentet der afgør om en teori kan bekræftes eller skal forlades. Det er derfor alvorligt når strengteorien selv efter 20 år endnu ikke kan forklare de partikler der eksisterer, men tværtimod bliver ved med at forudsige objekter som ikke kan observeres.

Der mangler måske en ny Einstein som kan rydde op i de mange teorier og finde frem til den væsentlige nye fysik. Einstein erstattede de gamle definitioner af tid, rum, kraft, masse og energi med nye der var afledt af sammensatte begreber som "masse-energi" og "rum-tid". Han arbejdede de sidste 25 år af sit liv på at forklare disse sammensatte størrelser ud fra feltbegrebet. Hvad ville han sige til situationen i dag?

Hvis strengteorien viser sig at være korrekt er det en *teori for alting*: Både de fundamentale partikler og kræfterne der virker imellem dem kan beskrives ved strenge. Selv baggrunden af rum og tid kan måske beskrives som et kondensat af strenge i deres grundtilstand. Partikler, der bevæger sig gennem rumtiden, kan beskrives som excitationer. På dette område ville Einstein nok blive tiltrukket af teorien, da alt kan afledes af ét begreb.

Men satsningen er måske for stor, for hvis det grundlag strengteorien hviler på ikke passer med virkeligheden, falder hele teorien sammen.

Strengfysikere har hidtil levet lidt beskyttet ved at strengteoriens forudsigelser ikke kunne testes i eksisterende partikelacceleratorer. De har bl.a. kaldt strengteorien for "et stykke fysik fra det 21. århundrede som ved et tilfælde er landet i det 20. århundrede", for at understrege at det er en teori der først bliver relevant i fremtiden. Men det kan ligeså godt være science fiction.

Dette aspekt ville heller ikke genere Einstein, der havde en stærk tro på sin teori, selv om mange af dens forudsigelser først blev bekræftet årtier senere. Men Einstein ville ikke bryde sig om at tyngdekraften i strengteori beskrives som en kvanteteori i en stationær baggrund, i modsætning til hans dynamiske rumtid. Han havde en fundamental skepsis overfor kvanteteorien.

Tyngdekraften og gravitonen

Den almene relativitetsteori kan ikke forklare hvordan Universet opstod i "The Big Bang", men beskriver udviklingen derefter ret detaljeret og i overensstemmelse med de fleste observationer. Den tidligste fase af Universets udvikling beskrives af inflationsteorien, hvor en næsten tom region af rum og tid vokser eksponentielt, for derefter at munde ud i den kosmiske ildkugle af partikler og stråling som vi normalt forbinder med Big Bang. Hvis strengteorien skal have succes skal den give en forklaring på hvordan inflationen startede. Det har den ikke gjort endnu. Men der er kommet et scenario fra strengteorien, hvor to braner som lever i 5 dimensioner kolliderer og resulterer i noget der minder om Big Bang begivenheden.

Det er håbet, at strengteorien vil kunne forklare mørkt stof og mørk energi, eller hvis de ikke eksisterer, afgøre hvordan og hvorfor tyngdekraften er modificeret på store skalaer. I kosmologiens standardmodel udgør den mørke energi ca. 70 % og det mørke stof ca. 26 % af Universets samlede energi. Resten er atomer, der vekselvirker med lys. Hvis ikke stregteorien kan forklare hvad de 96 % af Universet er som ikke kan ses, må der søges en anden teori.

I 1996 blev det foreslået af Edward Witten, at nogle af de ekstra dimensioner kan være meget større – måske helt op til 1 mm – og at det kun er tyngdekraften (gravitonen) der kan bevæge sig i de ekstra dimensioner. Dette kunne forklare hvorfor tyngdekraften er så meget svagere end de øvrige kræfter, ca. 10^{40} gange svagere end elektromagnetismen. Eksperimenter, der har undersøgt om tyngdekraften afviger fra Newtons $1/r^2$-afhængighed har endnu ikke fundet afvigelser der tyder på at der forsvinder noget af kraften ind i ekstra dimensioner. Men her er måske en forudsigelse som kan testes indenfor de kommende år.

Rumtiden i almen relativitetsteori er dynamisk, mens den simpleste baggrund i strengteorien er statisk. Der findes teorier hvor strenge bevæger sig på en mere kompliceret baggrund, dvs. en baggrund hvor den kosmologiske konstant ikke er nul, eller en hvor baggrundsgeometrien varierer i tiden eller hvor baggrunden indeholder braner og andre felter. Der er bl.a. gjort forsøg på at beskrive visse egenskaber ved elementarpartikler ved hjælp af et Anti-deSitter rum, der svarer til en *negativ* kosmologisk konstant. Nyere kosmologiske målinger tyder imidlertid på, at Universet som helhed har en *positiv* kosmologisk konstant. Kan rummet være så forskelligt på store og små skalaer?

I fremtiden må strengteoretikerne udvikle strenge der vekselvirker med den baggrund (rumtid) de bevæger sig i, for i højere grad at bevare kvaliteten ved Einsteins almene relativitetsteori. Her kan gravitonen måske vise sig at bane vejen, idet man kan beskrive et tyngdefelt som et enormt antal gravitoner der tilsammen kan vibrere på en måde som kan minde om rumtidens krumning.

En alternativ strategi til strengteori er, at erstatte den almindelige geometri med en //*ikke-kommutativ geometri*//, hvorved de traditionelle begreber om rum og afstande mellem punkter går i opløsning og erstattes af helt nye begreber. Matematikkens indtog i den teoretiske fysik er tilsyneladende kun lige begyndt!

En anden strategi er at erstatte den almindelige geometri med en ikke-kommutativ geometri, hvorved de traditionelle begreber om rum og afstande mellem punkter går i opløsning og erstattes af helt nye begreber. Matematikkens indtog i den teoretiske fysik er tilsyneladende kun lige begyndt!

Der er en vis fare for at strengfysikerne er blevet forblændet af den matematiske skønhed der følger af teoriens mange symmetrier og har glemt at den gerne skulle have noget med virkeligheden at gøre for at være en fysisk teori. Det er ikke alle idéer som man kan forestille sig, der eksisterer i virkeligheden, men så længe der er fænomener i naturen som ikke er forklaret er der i princippet plads til ny matematik.

Giv mig beviset for Dinis sætning

Af: Flemming Chr. Nielsen
email: flemming.chr.nielsen@webspeed.dk

Cand. scient. i matematik 1969; adjunkt/lektor på Århus Akademi 1969-1985 og derefter journalist (Jyllands-Posten 1985-1999), forfatter til en række romaner og bøger om bl. a. Søren Kierkegaard; desuden oversættelser af Noam Chomsky, Bertrand Russell og Herman Melville.

Forleden var jeg på det lokale rådhus for at få fornyet mit pas. Jeg medbragte et ansøgningsskema, mit gamle pas og et fotografi. Således mente jeg, at præmisserne var i orden.

Men da ekspedienten havde kastet et blik på mit billede, erklærede hun, at det ikke duede som pasfoto. Jeg spurgte selvfølgelig, hvad der var galt med det rimeligt vellignende portræt, og hun svarede, at ifølge reglerne måtte man ikke kunne se mine tænder på billedet.

"Hvorfor ikke det?" spurgte jeg.

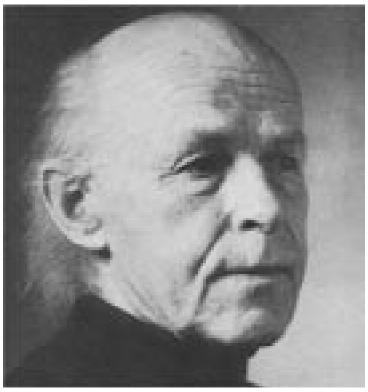
"Sådan er reglerne," lød svaret.

Mens jeg hidsede mig op over bureaukratiet, fornemmede jeg, at min matematiske baggrund reagerede et fjernt sted i rygmarven. Ikke fordi der findes en regel, som forlanger, at folk skal holde munden lukket på et pasbillede, men fordi ekspedienten ikke kunne give en rationel argumentation for reglen. Hvis hun nu havde sagt – hvad jeg senere fandt ud af – at forbudet mod synlige tænder er et krav fra de amerikanske myndigheder, som skal muliggøre en scanning af folks ansigter, uden at deres træk er forvrængede, ja så havde jeg surmulet, men jeg havde ikke ageret, som hvis der var tale om, at præsident Bush pr. dekret havde erklæret, at $\sqrt{-1}$ skal være 7.

Således trøster jeg mig med, at mit koleriske temperament skyldes min gamle uddannelse som matematiker. I en ganske triviel middags-konversation kan jeg føle, at jeg igen står ved tavlen med en umulig elev. Det kræver blot, at jeg for eksempel udtrykker min undren over skråsikre meningsmålinger, og at min borddame indvender, at siden man bruger dem, må de jo være pålidelige. Eller hun siger, at Gud må eksistere, når så mange tror på ham. Eller hun er sikker på, at før eller siden vil hun få den store gevinst i Lotto, for det har da altid været logik, at udholdenhed lønner sig.

Hele årets pensum

Mens jeg for mange år siden læste matematik på Århus Universitet, fik én af mine medstuderende frataget sin uddannelsesstøtte (der vist dengang hed Ungdommens Uddannelsesfond). Han følte sig dybt uretfærdigt behandlet og opsøgte omgående professor Svend Bundgaard for at forklare sig. Jo, hans far havde brækket benet og havde haft stærkt brug for hans hjælp på gården. Selv havde han døjet med en hårdnakket halsbetændelse, der havde bredt sig til ørerne, men professoren skulle ikke tro, at han af den grund havde ligget på den lade side. Faktisk var det nu lykkedes ham på en måned at sætte sig ind i hele årets pensum, hvorfor han fandt det rimeligt, at han fik sin uddannelsesstøtte igen.



Professor Bundgaard nikkede og smilede venligt. Så rakte han den ulykkesramte studerende et stykke kridt og bad ham gå hen til kontorets tavle og give et bevis for Dinis sætning.

Heller ikke Bundgaard stolede på en historie, der ikke var begrundet i en solid argumentation.

Og for resten ved jeg ikke, om Dinis sætning blev lykkeligt udfoldet på tavlen. Det er også i sammenhængen underordnet.

Satans Vikarbureau

En dag kom der et mail fra Dansk Matematisk Forening. Først troede jeg, der var tale om spam, for ingen interesserer sig jo ganske frivilligt for matematik, men afsenderen var én af MATILDES redaktører.

Den forening og dens aktører må være Satans Vikarbureau på jorden, for blandt de første medlemmer var sikkert Aben i Hans Scherfigs roman *Det forsømte Foraar*. Når jeg tænker på Aben og hans kolleger, fornemmer jeg alligevel en glemt ømhed for et fag, der altså engang var mit. Og et lille strejf af rædsel, for når jeg holder i en kø på en motorvej, kan jeg pludselig begynde at spekulere på, hvordan det nu er, man beviser denne eller hin rimeligt elementære sætning.

Og med elementære sætninger mener jeg dem, jeg i 1963 blev eksamineret i på Århus Universitets matematiske institut efter det indledende forhindringsløb, der hed Matematik 1. Kan jeg stadig rekonstruere hovedtrækkene? Kun så nogenlunde, men hvis bilkøen en dag er langsom nok, vil det lykkes, og i sin himmel vil professor Bundgaard løsrive sig fra en snak med Kurt Gödel og sende mig et anerkendende nik.

Mange år og sætninger derefter blev jeg adjunkt og siden lektor i matematik på studenterkurset Århus Akademi. Min verden lugtede af kridt. Jeg stod dagligt med et stykke kridt i højre hånd. Jeg vidste, at når årernes forkalkning satte ind, ville jeg kunne skrive med fingeren på tavlen. Det var en kendsgerning, at ældre kolleger mestrede kunsten, og som pensionister kunne de have slået verden med forundring: se det blodløse menneske. En fingerstump, der skriver.

Foreløbig brugte jeg kridtet til at fylde tavlen med matematiske symboler og uendelige beviser for en matematisk sætning, eksempelvis den simple kendsgerning, at integralet af en sum er summen af de enkelte integraler, men at integralet af et produkt ikke derfor er ...

Nogle af mine elever lyttede efter, når jeg underviste. Enten gjorde de det af interesse eller for at fedte for læreren. Andre læste tegneserier eller terpede fransk grammatik. Jeg rettede deres opgaver med en rød kuglepen. Dagligt var mit verdensbillede mærket af dyb forbløffelse over, at min pædagogiske indsats havde så spinkel effekt.

Miraklet i Brørup

Men jeg sendte også en medfølende tanke til min egen matematiklærer i gymnasiet. Da jeg havde gået der i et halvt år, klarede jeg en terminsprøve ualmindelig dårligt. Den dag i dag kan jeg ord for ord huske, hvad Heide-Petersen skrev i min karakterbog i december 1959: *"En prøves uventet dårlige udfald er forhåbentig et isoleret fænomen."*

Hvordan kunne sådan en tumpe finde på at læse matematik? Bortset fra, at Heide-Petersen fejlagtigt gik ud fra, at jeg som alle andre indledte min karriere i 1. g med en præliminæreksamen og ikke kun en mellemskoleeksamen, er der en mirakuløs forklaring:

En dag i foråret 1960 sad jeg og hang på min cykel på jernbanestationen i Brørup. Toget fra Esbjerg kørte ind på perronen, og en høj og mager herre i sort jakkesæt steg ud og løb ind i kiosken efter tobak. Fra et fotografi i en filosofi-historie kunne jeg kende hans næse og hans blafrende hår over den høje pande. Et halvt århundrede før havde han sammen med Whitehead skrevet det revolutionerende trebindsværk *Principia Mathematica* om matematikkens grundlag.

Stum og med lige så synlige tænder som på mit senere pasbillede stirrede jeg på den berømte matematiker, da han kom ud og igen stod på toget. Af en eller anden grund ventede lokoføreren tålmodigt. Måske genkendte også han Bertrand Russell, for ham var det, hvad kun MATILDES læsere allerede har indset. Jeg læste siden, at Russell var kommet til Esbjerg med færgen fra England og med toget var fortsat til København, hvor han skulle forelæse på universitetet.

Aldrig havde jeg været så tæt på en virkelig matematiker. Aldrig har jeg oplevet en så sælsom inspiration. Aldrig siden frygtede jeg terminsprøver i det fag.

De imaginære tal

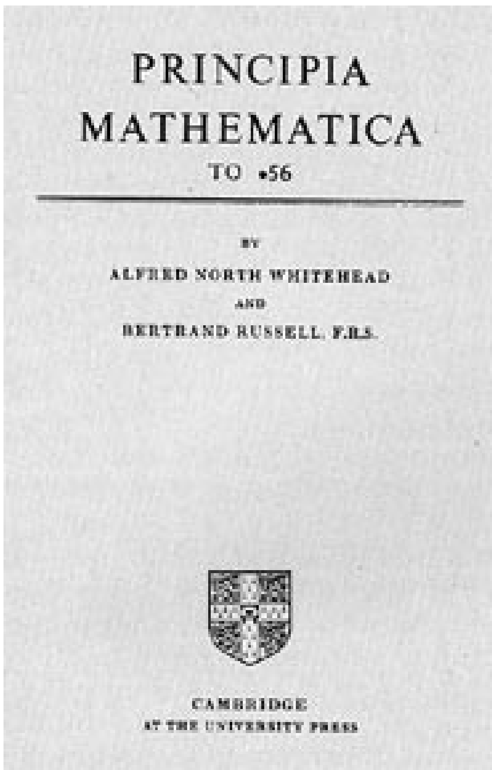
Uden for den matematiske verden talte og taler politikere stadig om, at undervisningens formål er at skabe hele mennesker. De uddyber aldrig, hvad et *helt* menneske er for en størrelse, og de kender ikke min gamle studiekammerat Hans Kaas Benners kommentar til konstruktionen af *hele* mennesker:

"Med det formål har de afskaffet brøkregningen i folkeskolen."

Men når jeg og mine kolleger var nået igennem det obligatoriske pensum, der gik ud på at skære det alt for indviklede væk og på den manér skabe hele mennesker, startede det altsammen forfra med nye elever. Jeg var bjergtaget af den gåde, at noget så rodfæstet i min rygrad som sinus og cosinus kunne være et *terra incognita* for generationer af gymnasielever. Jeg var Sisyfos, der trillede stenen op på bjerget. Hvert år kom der andre sten. Kun læreren var den samme. En ubestikkelig og statsautoriseret repræsentant for matematisk dannelse.

Undertiden kiggede jeg ud gennem skolens vinduer og fik den tanke, at jeg burde stikke af fra det hele og tage eleverne med. Verden derude var mere tillokkende end den forbitrede Abes koleriske kunststykke med at rive kontakten ud af væggen og hvæse i en sky af mørtelstøv.

Uventet kunne tanken om at flygte dukke op midt i sætningen om, hvordan man differentierer et produkt af to funktioner, eller den kom, når jeg gennemgik teorien for de imaginære tal (i dag er de vist ekspederet ud af pensum, og ingen kender andre Wessel'er end måske ham med *Smeden og Bageren*, men ingen gymnasieelev er af den grund blevet et mere helt menneske). Der var årgange af elever, som ikke begreb de imaginære tals skønhed, og der findes ingen større ensomhed end at få sit honorar for at forklare sammenhænge, tilhørerne ikke interesserer sig for.



Og heller ikke kunne jeg gentage miraklet i Brørup og invitere Bertrand Russell som matematikkens superstar og alternativ til Bob Dylan og The Beatles.

Landet hinsides muren

Hvordan skal de matematik-allergiske da værdsætte genierne Newton og Leibniz, der jo i 1600-tallet grundlagde infinitesimalregningen? Hvis Newton og Leibniz ikke havde levet og forsket, ville det forsømte forårs søvnløse nætter have været færre. Ingen ville få mareridt om Aben med stikkontakten i den hårede hånd og den røde tunge spillende i det opspærrede gab. Omvendt ville vi stadig leve i en tidsalder, hvor universiteterne kun uddannede teologer, som forbød kættersk forskning, og hvor Fermat aldrig ville være kommet på sin store sætning, men havde holdt sig til sit erhverv som byretsdommer i Toulouse og dømt afvigere til døden på bålet.

Processen på mit studenterkursus var en forberedelse til studentereksamen. Knald eller fald. Livet i vold. 03 og 05 til de dovne. 10 og 11 til de flittige, der endte som tandlæger, advokater og andet kedsommeligt – eller oh ve! som matematiklærere.

Når jeg ikke kunne gå min vej, måtte jeg bevare mit alvorlige ansigt, henvise al munterhed til sjælens dybe hemmeligheder og undrende iagttage de kolleger, der efter fyrre år stadig gik dansende til time.

Men matematik er et enestående fænomen i den menneskelige virkelighed. Den er rejst på tankens kraft. Der eksisterer ingen større intellektuel udfordring end matematik.

Personligt kan en matematiker være dybt reaktionær i sin tankegang, eller han kan være en doktrinær islamist. Men lur ham, om han ikke er i stand til at argumentere for sin holdning, og når han er fordybet i sit fag, når pennen kradser et bevis ned på et stykke papir, eller han holder en forelæsning, lægger han alt det andet bag sig.

I matematik er der er ingen mulighed for manipulation. Hvis argumentet er svagt, nytter det ikke at hæve stemmen. Man føres ikke ind i de riemannske funktioner ved et statskup. Det bliver ikke nemmere at argumentere for Poisson-fordelingens logik, fordi man er forsknings- eller undervisningsminister. Ingen retorisk begavelse kan slippe godt fra et falskneri i teorien for funktioner af komplekse variable.

Matematikken er det sublime univers, hvor kun argumenter har betydning. Personlig charme spiller ingen rolle. Rigdom og indflydelse er uden nytte. Vist kan albuer også føre jævne matematikere et stykke op i hierarkiet, men ydre magt- og statussymboler er værdiløse i den matematiske analyse.

Det er grunden til, at jeg trods min ensomme kamp mod en mur af træghed elsker det matematiske landskab, som ligger hinsides muren.

Goldbachs formodning

Jeg fik på et tidspunkt en elev, som var en stor matematisk begavelse. Hans logik var en ragekniv. Han gennemskuede alt på tavlen og i lærebogen.

Hans opgaver var fejlfri. De var gennemtrængt af æstetik og indsigt. Hans ansigt var hærget af tidlige rynker.

Jeg besluttede at drille ham og stillede ham en opgave, han ikke kunne løse: – Bevis, at ethvert lige tal kan skrives som summen af to primtal.

Han kom to dage efter og var i chok. Han kunne ikke klare opgaven. Han kunne heller ikke vente på løsningen i mange dage. Jeg skulle omgående præsentere ham for et bevis og fratage ham den byrde, det er at køre fast i et matematisk landskab.

Jeg fortalte ham, at den tilsyneladende enkle sætning siden 1742 har været kendt som Goldbachs formodning, og at det aldrig er vist, om sætningen er sand eller falsk. Den er én af matematikkens uløste gåder. Der venter en million dollars på den matematiker, som forvandler Goldbachs formodning til Goldbachs sætning.

Han gik i gang med at finde løsningen på Goldbachs formodning. Han pjækkede imens fra timerne, og jeg lod være med at registrere ham som fraværende og gjorde kolleger fra andre fag til medsammensvorne i forbrydelsen. Det var et farligt oprør, for i Undervisningsministeriet sad der bureaukrater, som aldrig ville tolerere, at selv en begavet elev gik til eksamen, hvis han skulkede fra de timer, der havde som formål at gøre ham til et helt menneske.

Da hans fravær ikke var synligt i nogen papirer, fik han alligevel sin studentereksamen. Han fik selvsagt 13 i mundtlig matematik, men efter skriftlig eksamen kom han og fortalte, at han havde begået en utilgivelig tanketorsk i en opgave. Alligevel fik han også dér 13. Bortset fra fejlen var resten udført med en sådan elegance og præcision, at ingen censor ville dømme ham på hans fadæse.

Siden blev han matematiker og dernæst mediciner. Sidst jeg så ham, havde han en forskerstilling i et område mellem de to fag. Jeg møder ham aldrig i ugebladene. Han optræder ikke i talkshows på tv. Som matematiker lever han i et univers, der ikke kan oversættes til nogen anden verden. En matematiker kan ikke forklare offentligheden, hvad han beskæftiger sig med. Alligevel undgår matematikken alle andre kunstarters sviende paradoks: at folk håner deres uforståelighed. En matematiker risikerer ingen hoverende latter, kun ordløs respekt.

Det afgørende gennembrud

Selv har jeg for længe siden vendt ryggen til undervisning i matematik. Jeg lever en tilværelse, hvor matematikken ikke spiller nogen indlysende rolle, men jeg læser med samme fryd i Euklids elementer, som jeg genser en videofilm om Andrew Wiles' bevis. Matematikken toner i baggrunden som spinkle lyde fra en fjern koncert, som billeder fra en gammel film, som den jublende fryd over et uigendriveligt argument eller som kærligheden til en for længst læst roman.

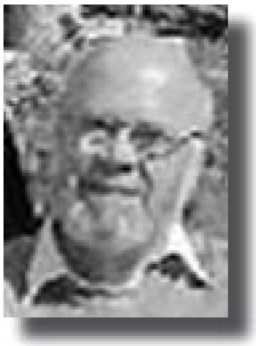
Jeg bilder mig derfor ind, at matematikken var skyld i min vrede på rådhuset den dag, jeg ikke kunne få mit pas fornyet, fordi mine tænder var synlige på billedet. "Sådan er det nu engang" er for en matematiker det værst tænkelige udsagn, for det signalerer, at det ikke er noget, man skal tænke nærmere over. Det er ikke noget, der skal bevises eller dokumenteres. Det er en åbenbaret sandhed. Enten åbenbaret af myndighederne eller af Gud.

Men det er det egentlig storslåede ved matematikken: at den hverken vil finde sig i en uholdbar argumentation eller i fraværet af nogen argumentation. At den ikke kryber for magt og militær, ikke accepterer retorisk pragt, hverken gråd eller trusler, hverken legender eller myter.

Og derfor er billedet af professor Bundgaard på sit kontor og ansigt til ansigt med den ulyksalige studerende for mig blevet et ikon på faget matematik: "Jeg lytter omhyggeligt til dig; jeg hører på alt, hvad du siger, men giv mig det afgørende gennembrud. Giv mig beviset for Dinis sætning."

Mathematics and teaching

– some comments on joys and dangers



by
Bengt Gustafsson,
Department of Astronomy and Space Physics,
Uppsala University

Talk at an international mathematisc meeting, Malmö oct. 2003

Dear colleagues and friends,

In a letter, dated January 7, 1943, to a junior highschool student Barbara Wilson, Albert Einstein wrote: "*Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater.*" This statement is encouraging. True enough, it admits that mathematics is difficult, but it also states that these difficulties are shared between many of us. It is indeed an honour and a pleasure to address you at this occasion, in spite of the fact that I am incompetent in your field, even more so than Einstein was, and can offer you nothing but some personal views on a subject which I have met many years as a student, but not as a teacher, nor a researcher. But in spite of some embarrassment related to this lack of experience, it is indeed a pleasure, yes, a joy to talk about mathematics and the teaching of mathematics. Because mathematics is indeed a joyful subject. I will comment on that further, in particular stress the empowerment that mathematics brings to everyone, to certain individuals as well as to society as a whole. These joys, however, also lead to problems and frustrations for many. In the second part of my talk I shall address them, and in particular the problem that the power that mathematics generates is not well distributed. Finally, I shall comment on what I think this implies as regards pedagogical challenges in the field.

Mathematics for joy

My relation to mathematics started in the most joyful way, as it does for many children, with counting fingers and toes, with nursery rhymes of considerable poetic quality and tactile intimateness, with smiling faces and soft singing. Many years later, at an age of 9 or so, I and my older brother set out to count to 100,000. That was a major project, planned beforehand with a storage of cheese and patee sandwiches, and two bottles of milk. We ran 1000 each at a turn, while the other was relaxing, eating or sleeping. I think we only reached 30,000 or so at that occasion, and never tried to break that record, but the very joy in trying this project is a good illustration of the very positive attitude we, as many children, still had to mathematics, or at least to numbers. There was also an ingredience of exploration in this attempt: was there really no end in this series of numbers? How could one know if one did not try to get there?

At this time we also had math at school. First it meant writing numbers; at least five pages each of the simple 1, the intricate 2, the funny 3 etc. This was not uninteresting. Then, the simple additions, and subtractions, and the beating of the multiplication table into our heads. Our teacher told us that 7 times 8 was the most difficult one. I remember my immense satisfaction and pride when I discovered that 7 x 8 equals 5 and 6, 56 -- 5, 6, 7, 8 in a row! Then division, where the greatest mystery was that the scheme used in my sister's class deviated fundamentally from the scheme we used, with quite different placement of the numbers, and still she got identical results. This was not understood, and my teacher could not explain the phenomenon.

In the secondary school that I next went to we studied Euclid, with axioms, theorems, proofs and lemmas. I cannot say we understood why, in those days, although later on I did appreciate this insight into the building of an axiomatic system. We also praticed the accounting calculations, setting prizes with consideration of costs for bying, selling, additions etc; everything made into routines. In general, the training in mathematics was very much the training of routines to solve problems of the sort expected at exams. These routines included everything, from the very transformation of the problem to a standard version – often the most difficult part – to the writing of the answer with 2 lines under ANSWER, and a colon. If these details were missing, the total score was diminished.

At high school the excercise continued. All sorts of mistakes, even very small ones, were added in red ink and subtracted in the end from your evaluation. Problems were formalized and trained rutinely. Even the best, the admirable Sixten Thörnqvist whom we had as an inspiring teacher the last two year at High School, exercised standard problems known to appear in the student exam. E.g., we applied the so-called "box method", for solving the problem of calculating the shadow cast by a stick in a wall, when the sun was at a certain elevation and azimuth, and the stick formed a certain angle relative to the wall. This box method meant of course that you let the stick be one of the sides in the box, and the shadow the diagonal in the base of the box. Sixten Thörnqvist, however, also tried teaching us ordinary differential equations, which was an experiment; and he did this so well that I sometimes returned to my notes from his lectures in much later years.

What did we learn from all this? I would say mainly two things: working discipline with the value of systematic work in focus, and our place in the intelligence hierarchy. I will comment on the latter in the second part of my talk. A basic factor in the working discipline training was the idea to do a number of things, and do them well, things that we actually did not understand. They carried their own logics, and in a restricted sense we could appreciate that and see the sense of it in a confined way, but it would indeed be wrong to say that we understood it in a broader sense – grasped its meaning, its importance, its relation to reality. We played a game, much more detached from reality than most fantasy computer games are for present-day school children. I do not mean that this was not useful – I think that some of the detachment from reality was considered a virtue, a way of fostering generation after generation to serve, and do it carefully, as accountants, civil servants, workers, military, without understanding why and for what purpose. A training in obeying abstract rules without asking, and still be accurate and get the right result.

In spite of this well deserved critique, I admit that the training of problem-solving routines also contained pleasure, yes joy. There was a great experience to learn that you, in spite of your limited understanding, could produce the right results. Yes, there was this fundamentally satisfactory property of mathematics that right and wrong no doubt existed; there were the correct answers, the facit, in the back of the book! I was fortunate to get more of these pleasures. During my high school years I spend some summers working at a department for photogrammetry at the Royal Technical Institute in Stockholm. This meant endless calulations using a manual Facit calculator, to carry out least square reductions of air-mapping data – an activity where the verfication of your correct calculations appeared as the equality between two square sums in the bottom of the right column of your form, about 6 weeks after the start of the calculation. This was far from pure mathematics, but indeed satisfactory – it, more than most other influences, made me a model-calculating astrophysicist later in my life. It is interesting to see to which extent this kind of work sets your idendity – the handicraft you manage is one of your most cherished treasures. Erik Holmberg, one of my predecessors as astronomy professor at Uppsala, was also a calculating person and kept his old worn addition machine on a blue velvet cushion on his elm-tree desk, always ready to be used, and honoured.

When looking back at my mathematical training at a high school of considerable reputation I see, however, rather little of the virtue of mathematics given to it by Wilhelm von Humboldt in his writings about Bildung, as it should be developed in schools and universitities. von Humboldt saw the central role of mathematics as a field for developing and training logical and systematic reasoning; and this historical idea from the early 19th century is probably a basic reason for the priority still given to mathematics in the Western school systems. I fear that the lack of fostering reasoning and understanding, and instead promote solving of standard test problems by training routines, is as pronounced today and even spreading to universities. Maybe you can reassure me that this is not so.

My university studies started onboard the Destroyer HMS Öland, where I studied de laVallé Poussin's Cours d'Analyse Infinitesimale during boring patrooling along the Russian border in the Baltic. And then I went to Stockholm and Uppsala universities, studying mathematics and physics in times when these were considered the finest subjects, not only by ourselves, and finally ended up as an astronomer after a love affair for three years with mathematics that was not as mutual as love affairs should be.

This was a background to my relation to mathematics. As you see, it is indeed a rather happy one. Still, there is a sense of unsuccess, a slight bitterness, although it is not strong enough to be called a feeling of inferiority. My point is now – I am not alone, I even share this experience with Einstein, yes with many, and many have really been made disappointed or even depressed as a result of their relation to math. This must be a major pedagogical problem for mathematics teachers.

I do not know what to do concerning this problem – I am afraid it is not smaller today than it was when I was young. At least I find very good graduate students in astronomy and astrophysics who have highly complicated relations to mathematics. Some use it as a tool, maybe a library of algorithms or computer programs, or as a tool box of derivations picked from text books and adjusted just a little for application to a particular problem. Many students keep away from mathematics. Just very few have some working relation to it still, but there are some, even astronomy students, who like to try their skills on new sorts of differential equations, or new applications of complex group theory. But, I feel rather sure that for most people, also at the universities and certainly outside them, mathematics is a dormant or even dead subject. It may be interesting to compare to other areas of basic knowledge and skills – reading, writing, drawing, music, athletics, even cooking.These areas are vibrant with life for many people, not the least the youth. But math? The closest many young people come to that today is the occurance of some mathematical calculations in some computer games; however, this is not common.

What a pity that mathematics is so far away for most people! Because it does contain a number of very important virtues! In addition to what I have already mentioned – the fostering to accurate and systematic work, which could be a very significant contribution of mathematics and calculation to any education – there are so many others. Mathematics is a beautiful art and should be tought such. I have found that even quite young people appreciate the beauty of, e.g. Euclide's demonstration of the non-existence of a greatest prime number. There are many such magic moments, also in the contents in elementary courses. I could imagine that mathematics teachers could benefit from studying how teachers of musics and arts, as well as of cooking, deal with young people today.

Mathematics also contains this great satisfaction that things actually can be calculated, yes, proven! This rigour of the mathematical procedure, with its high price in terms of difficulty and limited applicability, also contains the great treasure: one may get certain about certain things, not only persuaded. The experience of this satisfaction of having reached a reliable result was great when I was young, and I could imagine it is even greater for young people today, when even much more of the world seems uncertain, questionable, unreliable. Psycologically, this may be a problem for some students, fleeing into mathematics and exact sciences because they may have difficulties with the real world. But for most students, and for the society as a whole, I think it is very important to realize that mathematics offers something very significant here: a demonstration of the virtues and possibilities of rational intellectual analysis. Back to old von Humboldt! I bet the world would be better if more of this possibilitiy of mathematics training were appreciated.

For a natural scientist like me, it is important to also mention that this success of mathematics is so fundamental, and so astonishing, in the natural sciences. Eugene Wigner wrote 40 year ago about "the unreasonable effectivness of mathematics in the description of the natural world". It is indeed remarkable that we can use mathematics with such a success, not only to describe the nearby village where mathematics was invented, but also the depths of microcosmos with its very unfamiliar phenomena, and the vast abysses in macrocosmos, yes, the beginning and the history of the full universe. And mathematics does not only describe these things, it also makes predictions that can be tested by observations and experiments, sometimes of qualitatively new and absurd phenomena, like antiparticles and black holes. Often these observations agree with what mathematical theory said, even to 10 digits or more in many cases. How comes? We do not know. It may reflect that the universe is made in one piece, is much more universal when it comes to its mathematical structure, than we had any good reason to believe. Whatever the explanation may be for this, mathematics provides our sciences with magic rods that do not only lead to wonderful scientific and technological miracles. Clearly, this success also puts serious ethical questions to humanity. Anyhow, mathematics has probably contributed more of empowerment to humanity than anything else. It must be a central pedagocial and democratic challenge to see to that this empowerment due to mathematics may be experienced and shared by all students in our classrooms. Note, that there is this fascinating double-sideness in mathematics: while being a basic training ground for systematic and accurate work on premises not understood – to make us reliable robotic clarks – it also offers the most far-reaching instruments for understanding and changning our world.

Problems for mathematics

Let me now turn to the challenges, and first reiterate that I am much less experienced than most of you as regards the difficulties and problems that mathematics, and the teaching of mathematics, meet in the society today. Still I shall say something.

One very obvious result of mathematics training in the school I went to was that we got diretcly aware of very great differences in intelligence, or at least mathematical understanding, between us. This was demonstrated at more or less humiliating excercises at the black board, stated explicitly ex cathedra, clearly seen in red ink after the tests, and in black on the final grade sheet of the exam. Mathematics was, more than any other field, setting up a hiearchy in the class; its measurement of ability was more reliable, more inescapable than any other grading. This effect got strengthened by the fact that we pupils were generally almost by definition inferior to the teachers, in almost all other fields. But, in mathematics, as it gradually became clear to us, some of the best students were more clever than the teachers. The teachers could admit this fact, and simulataneously show their contempt of some students that could not even understand the Pythagorean theorem. I do not claim that the students with highest grades in mathematics had the highest status among us – no, they were sooner often put in a noerd cathegory by the others – but everyone in the class knew that these guys were in the end the brightest ones. I am afraid this is still so. At least in the schools that my children went to, many students were locked out from any positive experiences of mathematics – just as students that had proven not to be able to sing at the humiliating singing tests.

This situation is not easy to stand for a modern ambitious and democratic teacher. How important is it not to see everyone along, not only to save the few chosen ones, but give every student access to the joys and possibilities of matematics! In this situation there is absolutely a risk that even a modern teacher degrades his teaching to recipes, routines, excercising problem-solving to manage the tests. Everyone could at least do that! And then understanding – the real thing – is saved for the good students. So, the crowd gets the training of systematic routines, the few the magic rod. The two-sidedness of mathematical teaching may delinenate an elitistic class society.

No doubt, all of you are aware of this risk. The problem, however, is what to do to prevent it. As I see it, a major possibility is offered by the character of mathematics itself. Mathematics is namely not only an art in itself, with its own value, its own principles. Mathematics is also, I propose, the human art that is, and has always been, in the most intense interaction with almost all society and culture. We see mathematics in astronomy, physics and chemistry, and to an increasing amount in biology and geo-sciences. We see mathematics in engineering, in informatics, in statistics, in medicin and sociology, in economy and planning of societies. And we see it in other arts, in architecture, in painting, and, of course, in music. We see it in languages, in history of culture, in ... yes, where not? A course in mathematics could –with the right schooling of teachers – be a very fascinating tour through the human way of thinking and structuring a picture of the world in rational, quantitative terms. With all fundamental questions concerning perspectives chosen, concerning approximations made, concerning limitations of models and reason. No doubt, many of these aspects must also be covered in other fields of learning. But mathematics offers a unique bridge between us and reality, whatever that latter word means.

I thus suggest mathematics as a common ground in the study of all aspects of the world around us. Mathematic teachers should be equipped with knowledge and motivation to guide the students on this ground, in collaboration with teachers in other fields. They should themselves be educated at schools where these wide perspectives are demonstrated, this spacious idendity of mathematics ackowledged and appreiciated. The teachers should not mainly exercise routine methodology in problem solving, but also strive continously to develop every student's understanding of concepts and principles; in this sense the interests are common with those of pure mathematicians. But note that this understanding may be a most noble fruit from the growing garden of well cultivated and examined examples and applications, not only from the unique crystal tree of abstract reasoning.

It is more than 30 years since Paulo Freires Pedagogia do Oprimido was written. Could we learn anything new from that, now? He writes:

Education, as the praxis of freedom – contrary to education as the praxis of dominance – denies that humans are abstract, isolated, independent of each other, unrelated to the world – it also denies that the world would exist independent of humans. True reflection does not consider an abstract man or world without humans, but humans in their relation to the world.

Could we teach a mathematics which fundamentally relates us to the world, and empowers all of us with means to change it to the better? That is the great challenge. And my question to you is: is there any other field of human endeavour that would greater possibilities for this important task than your field, mathematics?

Kan matematikere tåle ny (ren) matematik?

Af: Gert Buschmann
email: gertbuschmann@c.dk

Denne artikel blev indsendt til Matilde i 2005. Den sene publicering skyldes blandt andet artiklens længde

Verdsliggørelsen var oprindeligt (dvs. i middelalderens slutning) dette at der opstod et skel imellem kirke og stat (dvs. *sækulariseringen*), senere kom ordet til at betyde dette at religionen mistede tag i mennesket, og i vor tid er det nærliggende at bruge ordet om »den almindelige kulturopløsning« - og at definere verdsliggørelse som havende med kulturopløsning i bred forstand at gøre. Og har man taget dette skridt, er det nærliggende at bruge ordet *religion* i en betydning som svarer hertil, nemlig om kulturelementer som må beskyttes imod verdsliggørelse, og anskue religion og verdsliggørelse som universelle kulturkræfter der trækker i hver sin retning og som evigt fordrer menneskenes opmærksomhed og indgriben. I så fald er religion gjort til en størrelse som ikke nødvendigvis hviler på tro og gudsforestillinger, men som har at gøre med hierakisk verdensbillede og åndelig livsdimension (eventuelt »blot« i verdslig forstand). Religion er således betragtet som en *egenskab* ved en *kultur* (eller rettere: en særlig *kraft* i kulturen), og begrebet kan også have mening indenfor visse kultur*områder.*

F.eks. kan man sige om matematikken at den havde et religiøst præg i antikken (kulminerende på Platons tid), og at den hellenske verdens forfald førte til en verdsliggørelse indenfor matematikken, idet den herefter blev løsrevet fra den officielle åndsverden, den blev uden betydning, dens dyrkere blev spredt og reglerne blev glemt. Tusind år senere ændrede den europæiske ånd sig i en retning som var til gunst for matematikken, aktiviteten og niveauet eksploderede, og grundlagsdiskussionerne i begyndelsen af det 20. århundrede førtes med en alvor som ikke stod tilbage for middelalderens teologiske diskussioner. Nu er udviklingen igen vendt, idet denne form for syssel er uløseligt knyttet til størrelser som verden har forladt: ro og koncentration samt papir og blyant. Den rene matematik findes kun fordi man engang gjorde den til et lønarbejde (for at sikre dens trivsel og høje niveau), men endnu ikke har fået afviklet dette levn af fortidens smag for luksus. Det siges ganske vist igen og igen (ikke mindst i dette blad) at den rene matematik trives strålende. Men dette er kun sandt i den forstand at der (især) indenfor computerverdenen foregår en udvikling (f.eks. computeralgebra) hvor der anvendes en mere abstrakt og anderledes tænkning end den vi har været vant til indenfor den anvendte matematik. Men ret beset er denne tænkning (begrebsmæssigt) uhyre elementær sammenlignet med den højeste matematik der er skabt. Den rene matematiks højdepunkt må placeres omkring 1970, og jeg vil påstå, at færre mennesker idag ville kunne tilegne sig den viden og udfolde den koncentration som man kunne finde dengang: vi har ikke mere den tid der skal til og vi er ikke mere motiverede.

Det samme kan jo siges om vor tids kunstmalere i forhold til fortidens. Ja det er ikke bare malerkunstens ånd og kunnen der er forsvundet, det er selve malerkunsten, idet dens redskaber idag må kaldes latterlige. Fremtidens redskab til skabelse af billeder og matematik vil være computeren, men computerens udvikling vil hele tiden gå ud på at skåne mennesket for irriterende besvær. Den menneskelige medvirken vil alene ligge i ideen, og denne kan være tilfældig, således at billederne eller matematikken blot er uforpligtende leg, eller den kan skyldes et ønske om at efterlade spor i verden. Men om denne trang hos mennesket som vi skylder al den ædlere skabervirksomhed, er det i øjeblikket umuligt at udtale sig: man skulle tro at det er en stræben efter udødelighed der får mennesker til at yde det utroligste, men nu hvor såvel den himmelske som den jordiske udødelighed er udelukket, er der mere energiudfoldelse end nogensinde. Dog kan man sige, at hvis der i fremtiden vil blive skabt sand kunst, så vil dennes religiøse karakter træde tydeligere frem end tidligere. Thi enhver sand kunst forudsætter geni, langvarig uddannelse og besværligt arbejde, og selv om den tid nok er forbi hvor geni tilskrives forbindelse med en højere instans, så vil størrelser som langvarig uddannelse og besværligt arbejde kun forekomme i kraft af at de er gjort til en dyd, og dyd er jo et ærkereligiøst begreb.

Jeg arbejder på en bog om disse »religiøse« kulturbevægelser. Det som i mere officiel terminologi kommer nærmest ved det jeg forstår ved det religiøse kontra det verdslige, er de socialpsykologiske begreber *det indrestyrede* kontra *det andenstyrede* menneske, idet udviklingen beskrives som gående fra det traditionsstyrede (før renæssancen) over det indrestyrede til vor tids andenstyrede menneske. I denne udlægning udviklingen (den ligger til grund for Henrik Jensens »Ofrets århundrede«) fremhæves fortiden på bekostning af nutiden (jvf. den nedladende betegnelse »andenstyret«), men dels angår den en konkret kultur (den europæiske) og dels er vægten lagt på det »ydre« beskrivende (jvf. ordet »styret«) snarere end det »indre« forklarende (*begrundelsen* for den vertikale kulturordens naturlighed eller ønskelighed er for svag). Jeg vil give en *abstrakt* definition af begrebet religion, *vurdere* den europæiske åndsverden ud fra denne definition samt *skildre* et nutidigt miljø som søger at være religiøst i denne forstand - ikke mindst skildre konflikterne med den omgivende verden (den bedste titel jeg har kunnet komme på er »Indenfor murene«).

Der er ikke talt nok om denne sag, mener jeg. Dels behøver nogle af os længere tid end andre til at bearbejde tab, og dels er der tale om en udvikling som ikke er forløbet som forudset og som fortsat overrasker. Tidligere i denne udvikling havde fremtiden set dyster ud. Fordi det var uhyggeligt for mennesket at måtte erkende (som det for alvor skete i begyndelsen af det 20. årh.) at den instans som har reguleret dets færden, må kaldes en historisk tilfældighed. Hvilket måtte betyde (mente man) at sandheden om menneskets liv er at det er meningsløst, og at der i fremtiden kan ske de mest uhyrlige ting. Det var dog kun en håndfuld forfattere som så så sort på tingene. Alligevel fremstår deres tolkning som værende *menneskets* oplevelse af dets situation. Og således havde det altid været: nogle få ser ting som de fleste ikke ser, og historien udnævner deres tale til at være på menneskets vegne - fordi vi elsker originale tanker og fordi vi gør vores art mere fintregistrerende end den er. Og sådan ville det fortsat være, men fra nu af ville dette - altså *litteraturen* - være den eneste tryghed vi har tilbage. For litteraturen i det mindste *vil* altid være der, den *må* være en kulturmæssig naturlov: uanset hvordan verden vil udvikle sig, uanset hvormeget ånden end vil formørkes, så vil der *altid* findes mennesker som lytter til og bidrager til den evige stemme som de store åndsværker danner, og som er til for at lyse op og give håb. Ikke sandt: hvis man i den omtalte »absurditetens tidsalder« havde forelagt dens forfattere disse to forestillinger om det 21. århundrede, så ville de muligvis have gættet på, og i hvert fald foretrukket den første, men sandelig ikke den anden:

1. Absurditetsfølelsen er forsvundet, fordi menneskene har sat alle kræfter ind på at genindføre og styrke de kulturværdier (ikke mindst kunsten), hvis misforvaltning var skyld i dens opståen, men der har været, og er fortsat, og synes i al evighed at skulle være stor »religiøs« uenighed, og denne fører krig med sig, men også en rig litteratur, idet »mennesket« instinktivt føler at denne er kampens rette valplads.
2. Absurditetsfølelsen er forsvundet af sig selv, fordi der er frembrudt en teknologisk revolution som optager alle og forsyner alle med goder, og der hersker derfor en almindelig tilfredshed, og der er således ikke nogen større anledning til ondskab, ejheller misbruger menneskene de nye ting (i hvert fald ikke hvad de selv véd af), og som følge af alt dette, er der ikke mere behov for litteraturen - den er der, men den føles uden praktisk betydning.

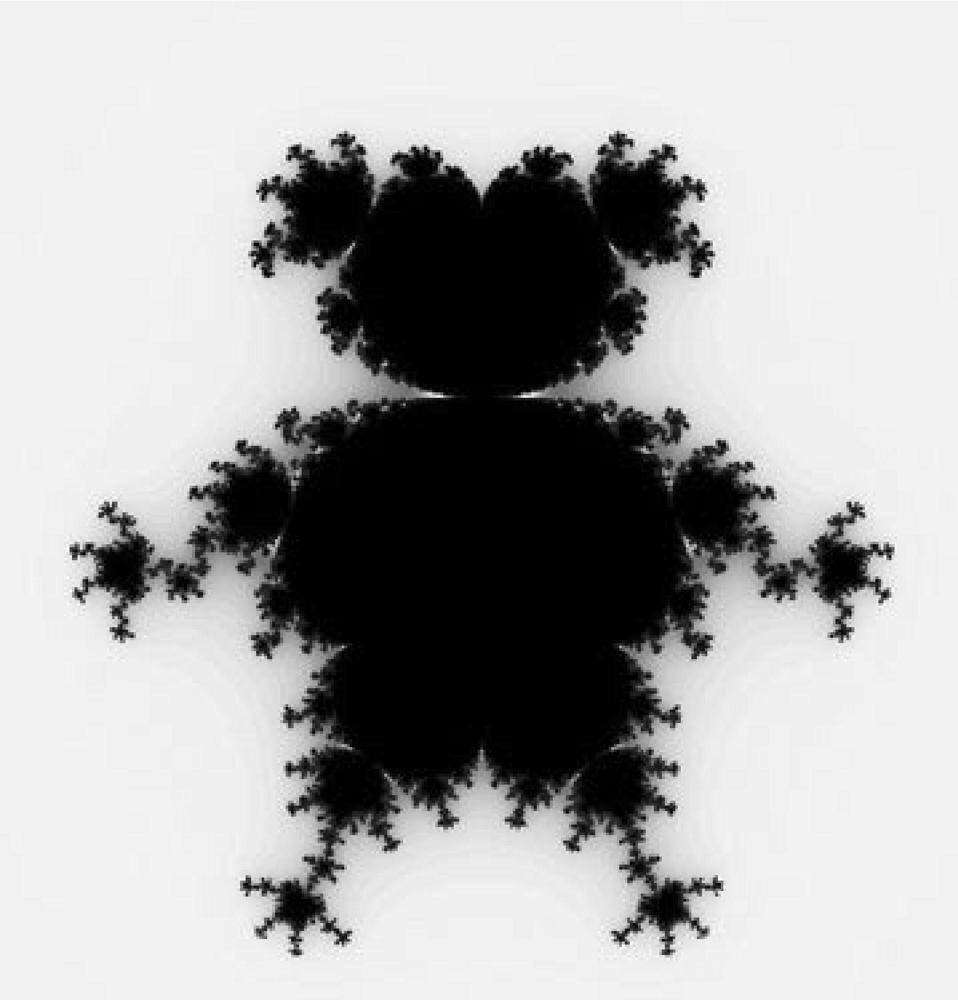
Naturligvis har denne *tro* på litteraturen - en sådan tolkning af det skrevne og gætten på det uskrevne - ikke meget med virkeligheden at gøre. Gjort til en sådan overmenneskelig instans er den - på ganske samme måde som Gud - *en konstruktion.* Men disse konstruktioner ligger dybt i menneskets natur, og de skal ikke modarbejdes men kultiveres. Jeg går ind for dem, jeg har denne trang til dialog med *menneskeheden.* Og jeg har, i lighed med de fleste andre af disse mennesker som mere ønsker at tale med fortiden og fremtiden end med samtiden, valgt at tage fiktionen til hjælp. Min bog er (ligesom hos mit forbillede Milan Kundera) udformet som en roman med indlagte essays, og med klart identificerbare helte og skurke. Heltene har jeg ikke problemer med, dem kan jeg modellere efter virkeligheden (som det vil fremgå af det følgende) og de er ganske meddelsomme. Problemet har været at få modellerne for mine skurke i tale, så jeg ikke udelukkende lader mine formodninger råde. Derfor stiller jeg spørgsmål til disse - dog naturligvis kun til sådanne som har udtrykt sig i den offentlige debat eller som burde gøre dette. Jeg må dog tilstå, at resultatet af disse forsøg på at fiske meninger ud af folk har været magert. De fleste breve besvares ikke, og når der endelig kommer et svar, kan det dårligt bruges til noget i min bog. Det synes at være således, at de der udtaler sig om en sag, ikke har mere at sige end det de allerede har sagt, og de der ikke udtaler sig, har ikke noget at sige.

Som et eksempel på den første type vil jeg nævne en kulturjournalist som netop havde udgivet en biografi om en personlighed der levede for 200 år siden og som han nærer en stor kærlighed til. Jeg fortalte ham at *jeg* under et sådant arbejde ville være plaget af spørgsmålet om hvad denne person fra fortiden mon ville føle ved mig og min skriven - om kærligheden mon kunne være gensidig - og jeg argumenterede for at jeg dog i det mindste befinder mig nærmere ved den biograferede end ham. Af hans svar fremgår at han er mere hellig end jeg troede: han har ikke bare viden om, men også *fornemmelse for* fortiden, og denne har haft indflydelse på hans udvikling:

»Ja, jeg hører til de mennesker, der - desværre - er født i et hjem uden klaver, og som derfor i sin skoletid ikke lærte at spille meget andet end fodbold og rock- og popplader. Det har dog ikke forhindret mig i, med årene, at blive mere forfinet kulturelt interesseret. Ja, jeg er såmænd endt med at skrive et par bøger, blive nærmest teatertosset, går også gerne i operaen og til koncerter, uden dog på nogen måde at være blevet et omvandrende leksikon på denne udsøgte del af kunst- og kulturområdet«.

Han bruger ord som ikke hører hans generation til, og i det interview som havde foranlediget mit brev, talte han da heller ikke om denne side af sit liv. Vi havde forskellige meninger om hvad det var der betingede storheden hos den person han har været så optaget af. Han foreslog at jeg læste hans bog (som han har fået en fornem litteraturpris for), og at vi »tog diskussionen ud fra den«, idet han »på mange punkter er enig med mig«. Jeg læste bogen og fortsatte diskussionen, bogen er glimrende, men han har tilsyneladende ikke mere at sige end det der står i bogen og i hans brev, for han har endnu ikke taget stilling til *min* fortsættelse af diskusionen (og påvisning af fejl i bogen). Og han har ikke rokket ved mit synspunkt, at de mest værdifulde åndsfrembringelser ikke (som han påstår) er af universel natur, de er tværtimod frugt af kulturmæssige omstændigheder (tradition, folkekarakter, åndsklima) som må kaldes lokale og som vil være forbigående: jo større og mere ægte værdi en ting har, jo mere uforståelig vil den være for menneske*heden.*

Dette gælder kulturlysglimt såsom den antikke digtekunst, kristendommen, den klassiske europæiske musik og den rene matematik. Sådanne tings værdi for eftertiden beror på om de to kulturer - skaberkulturen og modtagerkulturen - er i samklang. F.eks. var skønhedsidealerne på klassicismens tid så tæt ved antikkens, at man alvorligt diskuterede hvilken af de to verdeners kunst man burde anse for størst (i begge verdener satte man formen over indholdet). Kun et fordærvet folk kan tilfredsstilles ved tyvekoster (f.eks. amerikanerne der foragtede negrene men forlystede sig ved deres musiceren). Er vi ikke tin-



Forfatterens opfattelse af Matilde

genes retmæssige arvtagere, må vi løsne dem fra deres oprindelse og give dem andre navne. Dette har vor tids matematikudøvere jo stort set gjort, de opfatter sig blot som regnekunstnere og gør således ikke noget forkert. Men kun yderst få mennesker i vor tid har ret til at kalde sig *kristen* eller *klassisk komponist*. Flere har dog ret til at gå i kirke og til klassisk koncert. Folkekirken har i konsekvens heraf gjort kirken til en »levende museumsgenstand«, og den samme udvikling har det traditionelle klassiske musikliv fulgt.

Da matematikken i min bog fremhæves som et kulturområde hvor det religiøse kontra det verdslige træder særligt tydeligt frem, måtte jeg vide noget om hvordan vor tids rene matematikudøver ser på denne sag. Men hvor går man hen? - man kan jo ikke stille sådanne spørgsmål til sine personlige forbindelser. Og ville der mon komme noget ud af det? Den litteraturprisbelønnede journalist har kun almindeligheder at skyde igen med, så hvad med matematikerne? Engang *medførte* deres særlige evne nærmest sprog- og holdningsløshed, og nu hvor denne rolle er udspillet er de nærmest blevet værre på dette punkt. Den kendsgerning at »matematik for matematikkens egen skyld« er gået af mode, lægges der vel ikke mere i end at moden skifter. Men en forening som bærer navnet Dansk Matematisk Forening skulle jo egentlig være bekymret.

Og jeg havde faktisk et redskab i hænde til at få denne forening til at oplyse om egen indsats og vurdere forlagenes indsats. Sagen er, at jeg (foruden religionsbogen) har (haft) en bog i tankerne som skulle være mit bud på »en almen præsentation af den rene matematik«. Den skulle (i modsætning til de bøger man hidtil har set af denne type) være omfattende og meget koncentreret i fremstillingen og på et relativt højt niveau (forudsætte en matematisk studentereksamen), og dens mening skulle være at *vise* den rene matematik i alle dens forskellige forekomster, idet der (ganske som i en bog om kunst) skulle *tales* om tingene - deres forskelligartede virkning på mennesket: skønhed, udfordring, forundring (over f.eks. det at en helt jordnær kendsgerning behøver en påfaldende abstrakt forklaring eller kan være uforklarlig). Og frem for alt skulle matematikkens natur og udvikling diskuteres - også matematikkens mennesker, institutioner og skrifter igennem tiderne.

Altså en sådan bog som enhver sand matematiker burde drømme om at efterlade sig, og som Dansk Matematisk Forening burde begejstres for og hvis støtte (omend måske ikke økonomisk) man kunne regne med. Og dog følte jeg at der var noget kriminelt ved den skrivelse jeg sendte. Fordi jeg ikke kunne forestille mig hvordan en besvarelse ville se ud. Der kom da heller ikke nogen. Mit brev og en udtalelse fra et bestyrelsesmedlem kan ses på denne adresse: www.juliasets.dk/DMF, og de vedlagte kapitler fra bogen (om matematikkens grundlag og primtallenes fordeling) kan ses på denne adresse: www.juliasets.dk/GB.

***

Engang havde matematikken en særstilling blandt videnskaberne, ja den har haft indflydelse på grækernes og dermed den europæiske verdens opfattelse af det guddommelige - en opfattelse som var andre kulturer aldeles fremmed. En tilsvarende stilling blandt kunstarterne havde musikken, også her forestillede man sig en guddommelig verden som mennesket ved åndelig øvelse kunne få glimt ind i (jvf. forestillingen om sfærernes musik som eksisterede i over to tusind år). Musikken er den mest matematiske af kunstarterne: komponiststudiet er også noget med at sidde bøjet over papiret og løse opgaver (harmoni og kontrapunkt). Og helt frem til vor tid har man udforsket forbindelsen imellem tal vellyd og tal (-*troet på* en dyb og universel forbindelse, jvf. Per Nørgårds uendelighedsrække).

Indenfor musikken og matematikken har verdsliggørelsen især været fremmet af henh. underholdningen og teknologien. Men mens musikkens folk forlængst er ophørt med at tro på deres kunsts betydning udenfor deres egen kreds, så er den rene matematiks folk blevet så påvirkede af verdens hunger efter nyttig viden, at den begrundelse for betydningen af deres arbejde (dets »højst sandsynlig store praktiske betydning engang i fremtiden«) som engang mest tjente til at bevare privilegierne, bliver mere og mere oprigtigt ment, idet der som nævnt sker en ændring i moden indenfor den rene matematik.

Man kan få et billede af forskellen imellem komponisternes og matematikernes opfattelse af deres virke ved at sammenligne partiturmusikkens blad Dansk Musik Tidsskrift med Matilde. Der *burde* ikke være nogen markant forskel imellem disse to tidsskrifter, og forskellen *burde* mest ligge i at kunst trods alt er noget andet end videnskab. Men afstanden imellem kunsten og videnskaben er vokset. For mens der stadig er mennesker der kalder sig kunstnere, og har en helt traditionel opfattelse af dette virke, så ville ingen idag drømme om at kalde sig *videnskabsmand*. Dette religiøstklingede ord har måttet vige for det verdslige *forsker,* i erkendelse af at der ikke mere er noget overnaturligt og ophøjet i dette arbejdes målsætning, og at det meste af det hverken involverer mere ånd eller viden eller hjerneanstrengelse end det arbejde som efterhånden hovedparten af befolkningen udfører. - Hvor stor en procentdel af nutidens universitetsansatte har mon et sådant forhold til deres fag - bestemt af politik, religion eller lidenskab - at de for at opretholde dette, så arbejdet kan have mening, må holde afstand til mange fænoméner i verden, ja måske ligefrem til mange af deres fagfæller?

Matilde - som vel mest er et resultat af at det er blevet nemt at lave prætentiøse blade - anspører i højere grad end forgængeren MAT-NYT fagets folk til at tale, og gør på den måde mere skade, fordi det viser en verden og en opfattelse af matematikken som man helst var fri for at se. Man hører om folks fritid og man ser de problemer og modeord som også aviserne er fyldt af og som man bladrer fordi (stakkels de mennesker der er nødt til at læse en artikel med titlen »Hvorledes kan kvaliteten af universitetsundervisningen forbedres?«). Og desuden kommer man til at tro, at det der *ikke* tales om (f.eks. kulturkritik) ikke eksisterer. Og så skal man (som i ethvert andet erhvervsblad) se rodet layout og fjæser alle steder (ofte to identiske på samme side eller en redaktør som intet har ydet det pågældende sted). Der *er* dog ganske mange rigtige og læseværdige matematikartikler i Matilde, og der er temanumre, men Matilde er ikke som Dansk Musik Tidsskrift et *kultur*tidsskrift. Matematikken har altid givet, og giver fortsat, anledning til filosofiske overvejelser, og disse omtales (f.eks. i temanummeret om matematikkens grundlag), men matematikerne synes ude af stand til at se de negative følger af den institutionalisering og kommercialisering af ånden som jo faktisk har stået på i århundreder. Det er længe så siden at den blev fuldbragt indenfor matematikken, at man ikke har nogen anden verden at sammenligne med.

Dansk Musik Tidsskrift er formentlig Danmarks smukkeste tidsskrift. Enkel og stilren layout, færre men længere artikler, og selvom redaktøren og bidragyderne ikke har sprog og billeder som fag, så gør de en indsats på dette område fordi de trods alt er kunstnere. Og deres særlige position gør at der er masser af debat, ofte fortsat over flere numre. Mest (selvfølgelig) forårsaget af den kendsgerning, at den »anvendte« musik igennem det 20. årh. er vokset urimeligt på bekostning af den »rene« musik. Lederen i Dansk Musik Tidsskrift for maj 2004, som er foranlediget af et debatindlæg med titlen »Kan komponister tåle ny musik?«, har overskriften »Er bunden nået?«, og redaktøren skriver: »At såkaldt almindelige mennesker ikke kommer til koncerter med ny musik, har vi levet med i årevis, men når »miljøet« heller ikke kommer, er der så længere grund til at opretholde substantielle statstilskud til en kunstform, som næsten ingen har lyst til at overvære, med mindre man selv er involveret i et professionelt anliggende?«.

Miljøet, i anførselstegn, for ordet har en kedelig klang. Fortidens vertikale kulturopbygning er sunket sammen og brokkerne kaldes miljøer. Men den nutidige klassiske musik er ikke et miljø, eftersom dens mennesker og deres musik (uanset hvor nutidige disse er) mere hører fortiden end nutiden til, og eftersom denne verden er det sted i vor tid hvor man med størst sandsynlighed kan møde det man engang kaldte *det kultiverede menneske*. De kommer stort set alle fra et hjem med klaver, de er solidt skolede og de søger inspiration i litteratur og malerkunst - og så har de et indædt had imod det lydtapet som hele den øvrige befolkning ikke kan leve uden. Matematikerne - af hvilke de universitetsansatte mest blot har med undervisning at gøre - er en helt anden mennesktype. Der er hundrede gange så mange af dem, og mens komponisterne må finde levebrød udenfor det der er deres egentlige interesse, så ville en matematiklærer hverken drømme om at være matematiklærer eller udføre sin igangværende forskning hvis han ikke fik penge for det. Og mens det først er nu at bunden er nået indenfor musikken, så er det længe siden den blev nået indenfor matematikken. Det er (vistnok) en kulturmæssig naturlov at en åndsverdens forfald begynder *før* dens blomstring. Matematikkens guldalder var 60-erne og 70-erne, men allerede da var ånden igang med at fordufte. Det skete i takt med masseinvasionen, hvilket betød at der blev relativt færre *studerende* men flere *lektielæsere.* Men der gik lang tid førend matematikerne begyndte at klage, de fleste var jo nyansatte og et produkt af den nye tid, og bekymringen kom mere til at gå på standarden end på atmosfæreforandringen. Og den kom først rigtigt, da lektielæserne som til at begynde med i det mindste (ligesom de selv i sin tid) var *veltilpassede* (som *Politiken* kaldte dem i en leder), ophørte med at være dette (på grund af skolernes Rousseau-inspirerede pædagogik).

Den seriøse musik kender ikke til lektielæsere, og den skal ikke bekymre sig om hvorvidt varen er konkurrencedygtig, ja faktisk er dens verden som den altid har været.

Fordi den (som velsagtens det allersidste højere kulturområde) har bevaret sin elitære karakter. I alle »miljøerne« har man begrebet, at hver eneste af os (uanset miljø) er steget tilvejrs og blevet virtuos eller ekspert, og at det er umuligt og også ligegyldigt at måle den enes evner og kunnen i forhold til den andens. I virkeligheden er partiturmusikerne mindre musikalske end rockmusikerne, da de er taget ud af en beskeden talentmasse, og noget lignende må gælde den rene matematik overfor den store verdens matematik. Men det havde klædt matematikken, hvis den rene matematiks udøvere *i noget længere tid* havde fulgt musikkens eksempel. Altså havde tilladt sig den frækhed at hævde at de (deres tvivlsomme kvalifikationer til trods) er noget særligt. Fordi deres virke adskiller sig principielt fra viden*produktionen,* eftersom den rene matematiks betydning mere ligger i skaberakten, dvs. i *matematikeren,* end i skaberværket. Og endvidere fordi de havde udstrakt denne overensstemmelse med fortiden til at vise interesse for de øvrige gamle åndsområder. Så havde matematikken igennem de senere år været smukkere end nogensinde. Thi en højere åndsverden hører (ligesom kærlighed og alt hvad der har med det religiøse at gøre) blandt de ting som for rigtigt at leve må være truede (af barbarer og vantro), eller i det mindste erkendes at være forgængelige. Og allersmukkest blomstrer disse, når de aner at de står for fald. Fordi der reflekteres og hersker en forskønnende melankoli. Det er derfor at Dansk Musik Tidsskrift igennem de senere år har været smukkere end nogensinde. Og så fager *kunne* Matilde have været.

I så fald ville man i Matilde kunne læse udtalelser som denne, der giver udtryk for en personlig oplevelse af fagets rigdomme: »Da blev jeg slået med forbavselse. Jeg havde nok hørt om dodekafoni og tolvtoneteknik, men jeg havde ikke forestillet mig, at man kunne komponere så åndfuldt med denne serielle tonerække. Det virkede på mig, ligesom musikken legede med sig selv og var befriet for det ofte alt for menneskelige, der klæber ved den, og man blev ført ind i et land, hvor der herskede renhed og strenghed« (fra interview med en ældre komponist). Og der ville være kritiske betragtninger over egen og andres måde at praktisere faget på som svarer til denne: »Jeg hørte en udgave af Beethovens femte med en meget lille strygerbesætning. Og det var, som jeg hørte symfonien for første gang. Med så få strygere bliver alt hvad der sker til begivenheder. Hvis jeg havde været Beethoven og først havde hørt den dér fløjlsagtige Wiener Filharmonikerklang som vi er vant til, så havde jeg nok trukket den femte symfoni tilbage« (komponist i en diskussion om det at ændre opfattelse af et eget værk og eventuelt trække det tilbage). Og man ville finde vredesudbrud som dette: »Jeg er ked af at skulle konkludere, at demokrati øjensynlig er kulturens værste fjende. Se blot på, hvad et forfærdeligt instrument som computeren er blevet misbrugt til i frihedens navn: pirateri og pornografi«.

Men matematikken har, i modsætning til musikken, valgt at være i harmoni med verden. Den vil gerne være erhvervslivet en god tjener, og da denne verden er nem (men måske nok fortravlet), kan Matilde, ligesom ethvert andet erhvervsblad, fortælle sine læsere at det går ufatteligt godt: »Danmark ligger i den absolutte top, når det gælder kvantitet og kvalitet i forskning« (en påstand som ikke strider imod den årelange tale om nedskæringer). Og i en jargon som ville give redaktøren af Dansk Musik Tidsskrift myrekryb, indprentes kursen: »Profilerede kandidatoverbygningsuddannelser med et højt fagligt niveau skal være konkurrenceparametre for universiteterne«.

Den tid er forbi hvor politik gik ud på at fremme nogle mennesketyper og stræberetninger og neddysse andre. Fortidens utallige grunde til frygt og lede ved mennesker og ting er skrumpet så meget ind at vi kun behøver én målestok for vurdering af politik og religion: menneskerettigheder (- derfor fordømmes enhver *ægte* religion fordi en sådan altid vil indebære overtrædelse af menneskerettigheder). Men selvom der skal meget til for at støde vort øje, så giver fremtiden os alligevel uhygge når vi ser den for vort indre blik, men vi har en klar fornemmelse af hvilken vej vi skal gå, og dette giver os meningfuld beskæftigelse. I Matilde får vi information om fremtidens brug af matematik, og da den virker troværdig, kan vi gå videre til næste punkt: diskutere hvordan vi bedst indretter os efter den.

Æstetisk kritik (dvs. kritik af notation, publikationer, teoridannelser og deres fremlæggelse ud fra en sådan synsvinkel) findes som sagt ikke indenfor matematikken. Engang ville man have bebrejdet en matematiker at han beskæftiger sig med ligegyldige (og derfor »grimme«) ting, senerehen, hvor promotion var blevet årsagen til det meste af den rene matematik, måtte man finde sig i de ligegyldige ting. Denne uskønhed er ikke i strid med matematikernes evige tale om skønhed. For når man går dem nærmere på klingen, aner man at det skønne først og fremmest ligger i at det er skønt at løse problemer, og at det således mere har med spænding og beherskelse (dvs. naturdrifter) at gøre end med egentlig skønhed (som er kulturbestemt). Og desuden er de eksempler der nævnes på skønhed (symmetri, forenkling ved generalisasion, ...) altid relativt elementære, idet de er adresseret til lægfolk eller ikke-specialister, og de synes at være et levn fra en tid hvor der måtte skabes respekt for en beskæftigelse som forekom de fleste unyttig og usund for ånden.

Etisk kritik er der vist kun ét eksempel på i Matilde (det omtales nedenfor). Havde Matilde eksisteret for 30 år siden, ville de studerende have bemægtiget sig bladet og fyldt det med sætninger som disse (de er fra en pjece udsendt af studerende ved KU): matematikernes opfattelse »forudsætter en flugt fra virkeligheden«, »de har lært teorik, ikke matematik«, de opfylder ikke kravet om »at forholde sig ideologisk til deres arbejde for at retfærdiggøre deres eksistens«, »i skærende modsætning hertil er den videnskabsopfattelse som naturvidenskabsfolk i nationer som Sovjetunionen og Kina er i besiddelse af«. Modsætningen var som sagt ikke *så* skærende endda. Matematikken var dengang i uhyggelig grad løsrevet fra virkeligheden, ikke bare den nye uundgåelige virkelighed, men også den virkelighed der havde frembragt matematikken. Dens fortid var næsten totalt fraværende, ikke bare i undervisningen men også i lærernes bevidsthed. De forholdt sig således ikke ideologisk til deres arbejde og kunne ikke retfærdiggøre deres eksistens. Dette samt det at deres måde at dyrke faget på fører til at »den sproglige formuleringsevne degenererer«, betød at de ikke havde noget redskab i hænde til at forhindre at »den modbydelige virkelighed med dens skrål og spektakel er myldret ind i matematikkens hellige haller«. De hellige haller var opført af *troen,* og den var ikke bare blevet svækket i takt med den almindelige verdsliggørelse, den havde aldrig været særlig stærk, fordi (som vi skal se nedenfor) det var en form for tro som var svagt religiøst funderet. Grækerne havde ganske anderledes styrke i troen, derfor havde deres faglige etik en klar religiøs baggrund. At der er en højere guddommelig verden som menneskene delvis kan erkende og opnå adgang til, var en realitet, og en indtrængen i det hellige var selvfølgelig forbeholdt *visse* mennesker: man måtte være velforberedt, renvasket og ydmyg. Folk som ikke kendte tallenes dybere natur, men kun forbandt dem med handel og opmåling, måtte holdes borte. I nyere tid har der kun været tale om religiøse undertoner, f.eks. intuitionisternes kritik den hævdvundne matematiske tænkemåde - eller hvis nogen skulle have fået den idé at fordømme eksaminer med den begrundelse at de spolerer kærligheden til faget.

Af samme art er øjensynlig den bekymring som Jaffe og Quinn fremførte i 1993 (i *Bulletin of The American Mathematical Society*) for at matematikerne skulle gå hen og lade den heuristiske tænkning vinde indpas i deres afhandlinger (opmuntrede af dens succes og gangbarhed som bevisførelse indenfor den teoretiske fysik), og således fravige kravet om den anstrengende bevisførelse, og derved ødelægge en matematisk praksis som er »the result of literally thousands of years of refinement«. Denne udtalelse er imidlertid det eneste som kan siges at tangere det religiøse i denne artikel og i den lange debat som den afstedkom (og som blev gengivet i MAT-NYT, næsten 50 sider). Ordet skønhed nævnes kun ét sted: “mathematics is much more than the bare and beautiful structure as exposed by Bourbaki”. Og dette kan jo ikke benægtes: kristendommen er også meget mere end de golde livsregler og smukke fortællinger i Bibelen. Hvilket da? Ja her vil den som er modtagelig for kristendommens virkelige værdier faktisk tale om andre ting end dem han officielt skal tale om. Det er ikke troslæren der ligger ham mest på sinde, og han erkender at han har det »lidt svært« med mange spørgsmål, og at der er ting i verden som gør ham »frygtelig« vred, men som han ikke har ret til at vredes over. »Religion kan ikke forklares«, siger han, »og jeg vil næsten påstå at man skal være opvokset med det, og jeg må indrømme, at når jeg møder noget der frastøder mig, har jeg oftest svært ved at begrunde hvorfor«. Han forsikrer dog, at hans glæder er ligeså store som hans sorger, og at han derfor har større glæder end de fleste. Han taler om nogle teologiske bøger som har overrasket ham, der er steder fra Bibelen han gerne vil læse op, og jeg skal høre et par af hans yndlingssalmer (mere sentimentalitet end kunst, indrømmer han), til slut skal jeg se hans kirke (»vi går der ned et stykke tid før solnedgang, du skal høre ringningen på afstand«).

Matematikken er også meget mere end troslæren, fortæller matematikeren os, men hvilket? Er det også sådanne uhåndgribelige ting der ligger ham på sinde? Er der f.eks. matematikere som tænker bedst når de er på ensomme steder i naturen, og som kan fortælle om dettes indvirkning på såvel deres oplevelse af naturen som af matematikken? (- der findes en lille ordløs bog som hedder »Stilhedens rum«: fotografier af komponisters arbejdsrum - og også en stor ordløs bog som hedder »Tidsrum«: fotografier af komponister (oftest i naturen) - *hvorfor* er tanken om sådanne bøger indenfor matematikken latterlig?) Er matematikerens »meget mere« ikke bare de glæder og kvaler der kommer af held og uheld, og så al den adspredende forvirring der er på hans arbejdsplads? - altså ting som enhver arbejdsduelig kender til. Det er dog ikke denne kedelige udvikling i menneskets forhold til matematikken at Jaffe og Quinn er ude efter - naturligvis ikke. Næh, det er matematikerens *arbejdsmoral*, og en analog kritik forekommer vel indenfor ethvert fag. Og dét moralske aspekt som Jaffe og Quinn især har i tankerne, kendes også overalt i erhvervslivet: retfærdighed når medarbejdernes indsats skal belønnes. Når f.eks. et nyt matematiklandskab opdages, hvem skal det da navngives efter: den unge kække fyr som fik et besynderligt billede frem på sin computerskærm eller den ekspert som fik til opgave at indsætte billedet på dets rette plads i matematikken?

Det mest harmdirrende indlæg i debatten kom fra Mandelbrot, fordi han direkte angribes af Jaffe og Quinn. Han slår følgende »conviction« fast: »For its own good and that of the sciences, it is critical that mathematics should belong to no self-appointet group; no on has, or should pretend to, the authority of ruling its use”. Således ser matematikken ud fra en totalt verdslig synsvinkel. Men hvordan ser den da ud fra en religiøs synsvinkel? I en sådan verden er der disse varme- og skønhedsskabende ting som den sande kristne talte om, men hvilke af sådanne ting burde der være indenfor matematikken som er *fælleseje?* Jeg vil nævne de efter min mening to vigtigste: en »Bourbaki« og en kanon:

En Bourbaki er et pragtværk som er den »sande« vej ind i matematikken. Ingen hverken ejer eller har læst det i sin helhed, og det var måske mest en symbolsk handling man foretog, da man i sin ungdom anskaffede de første af værkets bind. Men ikke kun: de første bind (hvor grundlaget bliver etableret) var både en stor oplevelse og en stor gevinst. Man orkede dog ikke denne form i længden, og man behøvede jo ikke al den lærdom, man nøjedes med de bind der havde med éns speciale at gøre - måske mest for et syns skyld. Men værket blev bestemmende for tænkemåden hos alle de der havde erklæret sig som disciple af dets skabere, og det er dette aksiomatiske grundlag de har henvist til, når de er blevet spurgt om hvor de står. Værkets betydning ligger således mere i dets eksistens end i dets nytte i dagligdagen: man er stolt af det og det giver tryghed. Men når trangen til andagt kommer over matematikeren, tager han et bind ud af reolen og genopfrisker ting og glæder sig over denne stringens som alle dage har været hans ideal. Han er ikke ukritisk, værket er trods alt menneskeskabt, og det må følge med tiden. Der findes selvfølgelig flere af den slags værker, byggende på forskellige aksiomsystemer og fremstillingsideer, og hørende til matematikkens forskellige discipliner, og de har hver deres menighed med møder og tidsskrifter, og der er forhåbentlig også skænderier.

En kanon består af skaberværker som historien *og* menneskene har udvalgt. Fordi de *bør* tilegnes (indenfor den almenkultur eller faglige disciplin de tilhører) - af dannelsesmæssige grunde eller fordi de har ekstraordinær værdi. Det er igennem udvælgelse at et åndsområde fastlægges, og det er igennem fastlæggelse at vores skønhedssans udvikles. Mennesket er fra naturens side yderst nøjsomt på det æstetiske område. Den retning vores lyster tager (lige) når de er vakt er (altid) *det vulgære:* det som *bør* frastøde. Det modsatte af det vulgære er ikke *det skønne,* men derimod (det religiøse begreb) *det gode,* og indenfor den verdslige åndsverden kunne man også kalde dette *det* *holdbare.* Det holdbare forudsætter skoling, og selv om det for den udenforstående kan forekomme vulgært, vil det aldrig være vulgært på samme måde som det ukultiverede vulgære (sagt med andre ord: en popkomponist skal have særligt talent men behøver ikke skoling, en partiturkomponist skal have skoling men behøver ikke særligt talent). Dog kan man godt forestille sig at der skabes ting som er så holdbare at de nærmer sig det uappetitlige, f.eks. et uhyre indviklet matematisk bevis som folk vier hele deres liv til for at fatte. Og det var jo denne form for degeneration som den europæiske åndsverden blev beskyldt for at være angrebet af. Beskyldningen er absurd. Ikke mindst af den grund at de ting som de åndsfjendtlige henviste til, lå ganske indenfor rammerne af det der *kunne være* almen dannelse. Begyndelsen til enden på den europæiske åndsverden går så langt tilbage at man egentlig kan undre sig over at den nåede sit imponerende niveau, nemlig (som nævnt) med *svaghed i troen* hos åndseliten. Der var to grunde til denne tvivl på nytten af den højere ånd, dels (hvad enhver véd) dette at ånden for de mennesker som skulle formidle ånden oftest bare var et levebrød, og dels (hvad ingen tænker over) dette at kristendommen (altfor længe) havde haft monopol på livets religiøse side, hvilket betød at man aldrig rigtigt kom til at forstå de højere (verdslige) kulturværdiers religiøse natur. Og denne ulykke - altså dette at *kærligheden til den højere kultur* hverken blev erkendt som kærlighed (som er et religiøst begreb) eller formidlet som sådan - førte til at der blev vendt op og ned på »det hjemlige« og »det fremmede«: den hjemlige *højere* kultur (som vi indføres i udenfor hjemmet) fremtrådte som kedelig, mens det fremmede (det der ikke skal tales om og det der hører fremmede folkslag til) vakte nysgerrighed. Og det skal jo være lige omvendt: de fremmede verdener skal vi (i visse tilfælde) kende og interessere os for og lade os inspirere af, men de kan ikke for alvor bevæge, og efter en tids ophold i dem, længes man tilbage til sin hjemegn. Der sattes en ond cirkel igang som indtil nu har ført med sig, at alle betragter denne udviklingsretning som ønskelig, og at man - da enhver kan se at den må kontrolleres - som ordensskabende instanser benytter de nøgne benrade af (fortidige) religiøstlignende dannelser, således at alle bliver hyklere. Denne udvikling har forlængst udslettet alt det som muliggør *kærligheden*. Ordet findes fortsat, men det har fået samme betydning som *elske,* og elske er noget ganske andet: at elske er en *tilstand,* hvorimod kærligheden er en *gerning,* og denne gerning er rettet imod en *genstand* som adskiller sig fra de genstande man kan elske ved at den ikke er håndgribelig, men er fastlagt igennem kulturskabte begreber. Enhver matematiker elsker at knække nødder (nødder kan man tage og føle på), men ingen matematiker i vor tid har en sand kærlighed til sin disciplin. Beviset er at der ikke er nogen kanondebat indenfor matematikken. Thi når kærligheden er der, føles en trang til at bestemme den, og jo mere man følger denne trang, jo mere erkender man (ligesom den sande kristne) at kærligheden beror på sære kulturdannelser, og man vil forsøge at fastholde og styrke den ved at omgive sig med tilsynekomster af disse: den sande matematiker vil således i sit hjem og på sit kontor have afhandlinger som i særlig grad fastlægger hans faglige åndsverden og interessseområde liggende opslået som prydsgenstande (for undertegnede har bl.a. disse afhandlinger tjent som sådanne relikvier: Eulers *Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques* fra 1761 og Peirre Delignes *Formes modulaires et représentations* l*-adiques* fra 1969).

Kærlighedens umulighed betyder umuligheden af at nå det »religiøse stadium«. Til gengæld er det blevet nemmere at nå de to underliggende stadier: idag må ethvert menneske siges at være på det »æstetiske stadium«, idet alle er storforbrugere af kunst (matematikere lidt højere tilvejrs end de fleste fordi de kan værdsætte noget så eksklusivt som et bevis), og alle (udover de arbejsløse) må også siges at være på det »etiske stadium«, idet folk i højere grad end tidligere er sig deres tjenende rolle bevidst, og endda nyder den (matematikere lidt højere tilvejrs end de fleste fordi deres blik i lidt højere grad er rettet imod fremtiden).

Dette at den naturlige overgang fra det etiske til det religiøse er brudt, og dette at forplantningen må foregå uden kærlighed, men at denne ikke desto mindre spøger i baggrunden og derfor distraherer og må gøres latterlig, har betydet, at også *synden* - som er kærlighedens modpol i religiøs terminologi - bliver opfattet som distraherende og latterlig. Hvad ville der f.eks. ske, hvis en matematiker i dette blad meddelte, at han har opsagt sin stilling fordi hans firma er begyndt at fremstille en art computerspil som han må fordømme? Sympatitilkendegivelser? Næppe. Da vi i midlertid aldrig kan synke meget under det etiske stadium, idet vores forestillinger om anstændighed altid vil have en ikke-tom fællesmængde, og da den matematikkyndige (eller ukyndige) kan lave tryllekunster som narrer og forfører folk (hvilket altid vil være ydmygende), kan andre matematikkyndige gøre sig nyttige ved at afsløre disse. F.eks. Lomborgs taljongleren, om hvilken en artikel slutter således: »Samtidig ville det i sig selv have en opdragende effekt, hvis tal- og matematikbrugere vidste, at de risikerede at møde en kritisk og flersidet ekspertise i det offentlige rum – eksempelvis i Matilde«.

Så meget er vi blevet fremmede overfor denne sære åndsbeskæftigelse som i årtusinder har fængslet mennesker og som engang var berygtet for den magt den kunne få over særligt indrettede sjæle, at vi ikke engang kan skildre den. Kun med ironiens handsker på kan vi berøre den. Fordi kærligheden (i alle dens former) er forsvundet ud af vores liv og gør os forlegne, eftersom den (ligesom religionen) synes at høre mennesket til, hvorimod det er fortiden der viser os den. En typisk (nutidig) skildring af en (fortidig) matematiker ser således ud: »Samme aften rejste han fra Wien, fast besluttet på aldrig mere at beskæftige sig med matematik, og de der senere, bag hans ryg, lo ad hans fortvivlelse, var de der aldrig forstod, at så omfattende er kærligheden, at for den der elsker, kan livets væsen åbenbare sig i det mindste, og livets sandhed stå og falde med den mindste sandhed, selv med den i et matematisk bevis« (fra Peter Høegs novelle »Rejse ind i et mørkt hjerte«). Apostolos Doxiadis' roman »Onkel Petros og Goldbachs formodning« er i det samme toneleje. Men trods alt er disse skildringer hæderlig litteratur, og *jeg tror,* at når vor tids »matematiker« læser sådanne fortællinger (hvilket jeg tror han gør), så har han det på samme måde som når han hører moderne musik (hvilket jeg ikke tror han gør): han føler sig *lidt* forlegen.

Sange i Parentes

Af: Jørn Børling Olsson

I dag vi samlet er til fest
og xy er vor æresgæst...

Lejlighedssangene er en speciel genre, som generelt ikke nyder særlig stor agtelse og måske med god grund. Digteren Jeppe Aakjær, som skrev den udødelige "Jens Vejmand", brugte udtrykket "Litteraturens Askepot." De fleste af sangene er hurtigt skrevne, sunget en eller to gange og hurtigt glemte. Man siger, at "Sangen har vinger". Men når man præsenteres for nitten vers på melodien "Den evigglade Kobbersmed" til Tante Odas fødselsdag, og når sangen er fyldt med kluntede versefødder, som får sangfuglen til at snuble allerede i starten, så bliver det for meget.

Det ligger lidt anderledes med de lejlighedssange, som man kan kalde "studentikose". De er ofte rigtig morsomme og af og til endda lidt åndfulde.

Matematikere og matematikstuderende fester jo også fra tid til anden i lukket kreds, tænk fx. på festerne i studenterforeningen "Parentesen" på Københavns Universitet eller "Tågekammeret" på Aarhus Universitet. Efter indtagelsen af et par genstande kommer tiden til at synge sammen. Der findes så en række sange, som regel af ukendt oprindelse, skrevet med specielt henblik på matematikere og andet godtfolk. Nogle af disse sange skal det handle om her.

I forbindelse med oprydning i vores arkiv stødte jeg på en mappe blandt den navnkundige Børge Jessens (1907-1993) efterladte papirer. Børge Jessen havde tilsyneladende en vane med at arkivere alt i mapper. Denne specielle mappe indeholdt en række "sangbøger", som regel duplikerede, der blev brugt ved fester, ikke mindst i Parentesen. Jeg vil citere og kommentere udvalgte vers.

"Parentesen" blev stiftet i 1911 som forening for studerende i matematik, fysik, kemi og astronomi ved KU. Den kunne altså snart fejre 100-års jubilæum, hvis det ikke var fordi der, i modsætning til "Tågekammeret", ikke rigtig har været nogen aktivitet i foreningen i mange år, især efter overflytningen til Ørsted-instituttet. I gamle dage var der ofte møder med foredrag i løbet af semestret og

Festsalen i Borchs kollegium anno 2007. Foto: Maria Christiansen desuden afholdtes flere årlige fester. bl.a. rusfesten, hvor de nye studerende blev præsenteret for et udvalg fra sangskatten. De første år fandt møderne sted i festsalen under taget i Borchs Kollegium, som er nabo til Regensen. Senere flyttede de til instituttet på Blegdamsvej

Som nævnt var forfatterne ofte anonyme og de angivne melodier er vist delvis glemte i dag. Fx. kan denne artikels forfatter ikke forbinde noget med melodien til den første sang, der skal citeres. Denne sang og den efterfølgende er fra 1915.

(Mel: "Gorm den Gamle")

Mens vi sidder her og spiser
Frikadeller og Radiser.
Mens de andre om mig fjanter,
tænker jeg paa Resultanter.
Jeg har længe grublet paa,
om jeg ikke kunde faa
rede paa en Sætning svær,
og nu fandt jeg Løsning her.

Man må håbe, at Løsningen også holder i ædru tilstand. Den næste sang indeholder nogle græske bogstaver, som ved de utallige genoptryk af sangen har voldt en del kvaler, men selvfølgelig ikke her i Matilde.

(Mel: "Vift stolt på Kodans bølge")

Er alle partielle
Differentialkvo-
tienter blot reelle,
da faar men let ved (2),
naar Hensyn bare tages
til (3) og (7) og (6),
og naar det saa erindres,
at β er komplex

At φ er integrabel
i dette Interval,
skønt den er ej summabel
i noget Areal.
Naar Kummer etsteds siger
at β er konstant,
saa har han ej haft Øje
for dens Diskriminant.

Den følgende sang er sikkert blevet sunget ved mange rusfester. Den giver en særlig fornøjelse, hvis man kan huske Ludvig Brandstrups fremførelse af "originalen" fra Cirkusrevyen 1936.

SUPPLEMENT TIL STUDENTERRAADETS RUSVILDLEDNING
(Mel: "Hen til kommoden og tilbavs igen")

Børn, nu skal I høre
hvod'n I skal opføre
jer, hvis I vil læse til at bli' cand. mag.
I skal kunne mere
end blot integrere.
og MacLaurins Formel, de'n given Sag.
Først saa maa I kunne
se saa nogenlunde
vaagne ud, selvom I sover indeni.
I maa endlig ikke
snorke eller nikke
selv om Bengte[1] bliver ved evindelig.
Tag en Formel og sæt i den
visse Størrelser, som nok skal passe.
Hen til Kommoden og tilbavs' igen,
saa har I et Bevis af første Klasse.

Saa skal I Determi-
nanter lære, særlig
skal I lægge Vægt på deres Rang og Stand.
Bare man ku' holde
ud når Bohr og Molle-
rup forklarer disse Ting, saa godt den kan.
Den er ble'n beskaaren,.
det sku' den ha' vaaren,
førend første Gang men den paa Tryk udga'.
Nu' den let at bære,
sværere at lære
takket være lille p og store A [2].
Tag en Matrix og sæt i den
sytten andre Ting, som nok skal passe,
Hen til Kommoden og tilbavs' igen,
saa har I et Bevis af første Klasse.

Matematikerens daglige trummerum beskrives her:

(Mel: "Den evigglade Kobbersmed")

Den stakkels matematiker, han regner dagen lang,
og vejen til en løsning synes ofte træg og trang.
Han subtraherer, integrerer, regner med komplex,
og lige ubekendt for ham er dette fæle x.
Rask han stiller op to matricer eller tre,
og han regner løs på determinanterne.
Hvis omsider han så en løsning træffer mod,
skal det nok vise sig, at det er en fremmed rod

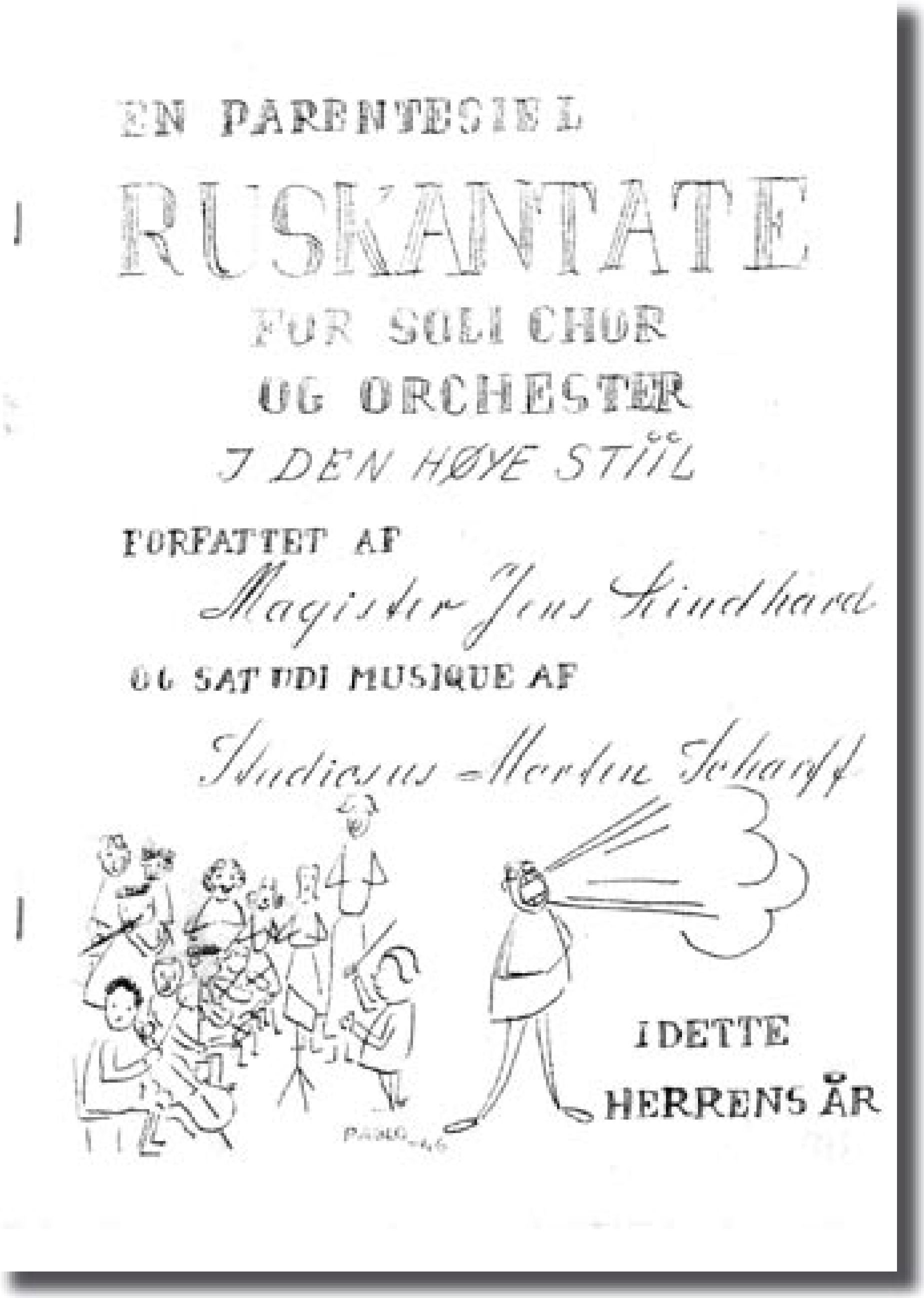
En del vers i Parentesens sangskat handler om Piger. Udover den velkendte "Uh, hvor er de grimme" (som der i øvrigt findes et mandligt modstykke til) er det til tider problematiske forhold til det modsatte køn godt beskrevet i et vers fra sangen

Matematikerens vår
(Mel: "Katinka, Katinka")

Og falder end pigerne tykt for hans fod,
han ænser dem ej med et øje.
Kun grænseforhold tænder ild i hans blod,
kun summer ham ret kan fornøje.
Og kikker end andre på pigernes ben,
kun middelværdisætningen er hans ven.
Og falder end pigerne tykt for hans fod,
han ænser dem ej med et øje.

Måske mangler der bare nogle flere Parentespiger:

Parentespigen

Ja, hun træffes alle Vegne
fra Kemi til Mat'matik.
Hun studerer Dobbeltstjerner
dyrker Fermistatistik.
Matematisk Analyse
det er hendes Filmsroman
og hver anden Nat hun drømmer
om en lodret Billedplan;
og hun elsker Integraler
og er Dus med Dirichlet,
men vil nogen ha' en Engelskvals
kan hun ogsaa klare det.

Der er nogle sange om navngivne videnskabsmænd, heriblandt standardsangen "Videnskabens Fædre". Som man husker, er ideen i sangen den noget tvivlsomme, at de væsentligste videnskabelige erkendelser opstod under indflydelse af alkohol.

Sangen blev ved særlige lejligheder i Parentesen suppleret med "ikke-standard" vers som for eksempel det følgende til Børge Jessen fra slutningen af 1960'erne.

Carlsbergfondets Jessen
hylder vi ved Tressen,
da hver Flaske dér var tom,
han retur til Faget kom.
Carlsbergfondets Jessen.

Jeg fandt et festligt vers om Harald Bohr (1887-1951) Man erindrer sikkert, at han havde en fortid som fodboldspiller, bl.a. på landsholdet.

BOHR stod frem paa Matematikerkongressen
og expres - kom der pres - paa Kongressen.
Han fik Tavlen fyldt.
Mens man sad fortrylt,
skrev han løs med begge Hænder,
og med venstre Fod han sender
Svampen op at viske ud.
-(højre Gummisaal er Klud!)
"Integraler er blot Streger",
sang han, "røde, gule, blaa,
ganske vist de fleste
plejer ingen Løsninger at faa!"

Her er flere eksempler.

Vore stormænd
(Mel: "Den oldenburgske kongerække")

Euklid sin middag aldrig spiste
førend med logisk konsekvens
og streng exacthed han beviste
sin egen maves eksistens.
Når noget meget svært han hitted,
kaldte han det et element,
i dem har folk nu sat og slittet
i 20 hundred' år omtrent.
Han var en vældig matematiker
og i logikken sikker
det var nu hans natur.

Til Euler aldrig fandtes mage,
sin mage heller ej han får;
han laved' mer på 14 dage
end Nielsen skriver på et år.:
Hans højre analyse skriver,
med venstre han algebra tjær'
og når en dag det rigtig kniver
han hjælper til med sine tæ'r.
Hans værker aldrig vil gå i glemme,
Han bliver læst herhjemme
af yngre folk på 60.

(Log π)

Er der et liv efter studiet? Tilsyneladende ikke! Her citeres to ud af adskillige triste vers fra

Skolemesterens sørgmodige sang
(Mel: "Mandaley")

I en lille trist provinsby, i en skole langt herfra
har en gammel lektor time (division med 2. A)
mens hans tanker trisser tyste rundt i fordums tiders tant,
og han drømmer sig tilbage til de år, der hastigt svandt.
- Oh du fagre ungdomstid, instituttet med dets vid,
denne videnskabens mølle, der ku' skelne korn fra klid.
Oh, du hus på Blegdamsvej, skøn erindring gav du mig,
mange tårer triller ned ad mig hver gang jeg mindes dig.

Der var forelæsning af så mangen grumme lærd person,
og man sagde, at han undertiden blev forstå't af no'en,
og vi hørte trofast alt! - Det var jo os, man vented på,
vi var verdens håb og fremtid, tænk blot hvad vi kunne nå.
Vi blev færdige tilsidst - (en blev folkepensionist).
Jeg har glemt de ting, jeg lærte, men er det monstro så trist!
- Oh du hus på Blegdamsvej...

Den mest usædvanlige frembringelse, som befandt sig i Børge Jessens mappe, er uden tvivl "En parentesiel Ruskantate for Soli Chor og Orchester i den høye Stiil.

Forfattet af Magister Jens Lindhard og sat udi Musique af Studiosus Morten Scharff" [3] fra 1946, Parentesens 35 års jubilæum. Illustration af Pablo.[4]

Kvindearie

Se jeg skulle mene,
at tvende Slags Kvinder
paa Jorden man finder.
Af disse den ene
er Pallas Athene.
Den anden jeg nævner
den skønne Helene.
imellem de Tvende
en Forskel der ligger
med Hensyn til Evner.
Men det kan dog hænde,
naar Skæbnen det skikker
at Pallas Athene
og skønne Helene
til een sig forene.

Hovedfagsarie:

Når et Æsel sig befinder
mellem tvende Stakke Hø,
ikke let han sig besinder
men maa Sultedøden dø.
Æslet er en stud.mag.,
der skal vælge Hovedfag.

Indvielsesarie:

Faklen her i mine Hænder
ved min indre Ild jeg tænder.
Den for Videnskaben brænder.
Jeg dig rækker denne Fakkel.
(Hej Musik, gør stort Spektakel)
Gid du Faklen vil annamme.
Ogsaa du er jo en Flamme.
Du og Faklen er det samme
er min Lidenskab
og vor Videnskab.
Saa, nu gik den ud.
Naa, hvad Herregud

De fleste af sangene synges ikke mere. Faklen er gået ud og Parentesen er hævet. Hvordan skal det dog gå videre? Et muligt svar er Matematikrevyerne, som er dukket op på KU i de senere år. Det er en anden historie.

(Tak for hjælp til Tage Gutmann Madsen og Christian U. Jensen)

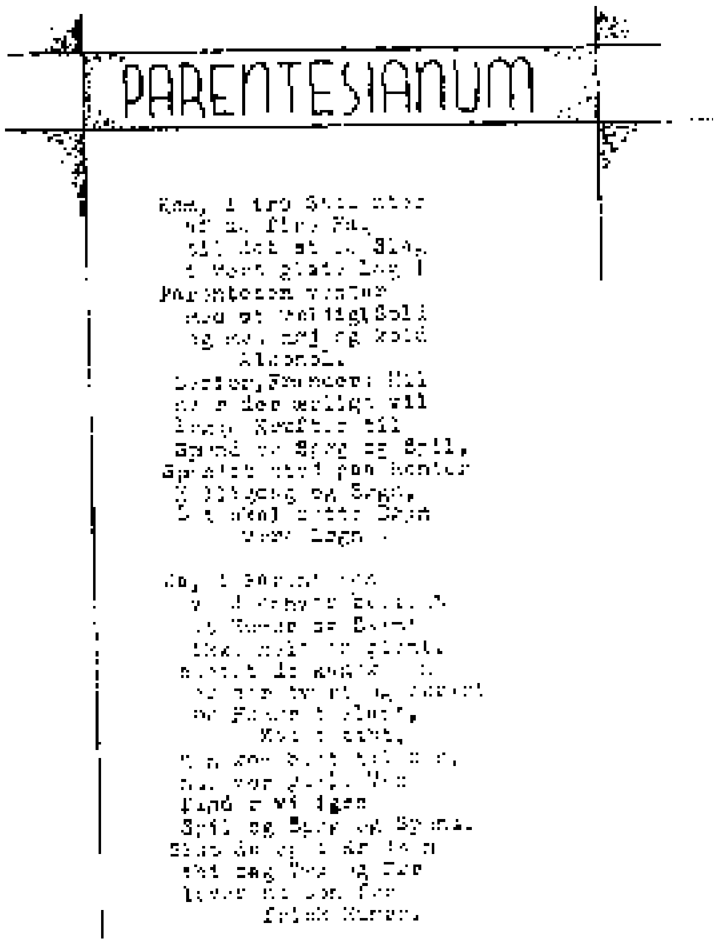
Fodnoter

1 *Bengte* kunne være Bengt Strömgren (1908-87)

2 *lille p* er Richard Petersen (1894-1968) og *store A* er Aksel Frederik (A.F.) Andersen (1891-1972), sammen med Harald Bohr (1887-1951) forfattere af den klassiske: Lærebog i matematik Analyse I-IV"

3 Jens Lindhard (1922-1997) og Morten Scharff (1926 -1961) var fysikere og de arbejdede også videnskabeligt sammen indtil Morten Scharffs tidlige død. Jens Lindhard var senere i mange år professor i fysik i Århus.

4 Pablo: Pseudonym for Povl Victor Kristensen (1922-1987) gift med Vibeke Borchsenius (1921-1997)



An interview with Alain Connes

Part I: conducted by Catherine Goldstein and Georges Skandalis (Paris)

Are there mathematicians of the past you feel close to?

Close to, I would not say but there is one I admire in particular: Galois. There's a very striking characteristic in his writings; their formulation is amazingly simple. For instance, '*Take an equation with n different roots. Then, first statement, there is a rational function of these roots which takes* $n!$ *different values when you permute the roots; and, second statement, the roots are rational functions of this function*'.

In spite of the deceiving simplicity of their formulation, using these statements Galois succeeds in going extremely far. He writes down the equation whose roots are the $n!$ different values of the rational function, he splits it into irreducible factors and chooses one of them, he writes how the roots of the original equation depend on the roots of this factor and he sees a group. And he shows that this group is independent of all the choices made along the way... To achieve this he characterizes the group abstractly by a unique property: '*A function of the roots is rationally determined if and only if it is invariant by this group*'.

It is so simple. What I find fabulous is this kind of leap using the power of abstraction, this enormous step in conceptualizing things. The power of Galois' intuition is not based on the idea of symmetry but on a concept of ambiguity. Naively, you might say he studied the invariance group of certain functions. But Galois' first step is just the opposite: he breaks the symmetry as much as possible by choosing a function which has no invariance at all. The mathematicians before him – Cardano, Lagrange – worked with symmetric functions of roots. Galois, in the footsteps of Abel, does the opposite: he chooses a function with the least symmetry possible. And this is the function he starts with.

What strikes me is the fecundity of these ideas; the various formalisms we have developed to catch them do not yet exhaust their power. Galois' ideas have a clarity, a lightness, a thought provoking potential which remains untamed to this day and finds an echo in the minds of mathematicians till now. They have generated great concepts like Tannakian categories or the Riemann–Hilbert correspondence... These ideas are very pretty but they are often set out with such pedantry that they look like heavy yokes and you don't get the impression they have been freed to the point Galois had freed them. Other avatars of Galois' ideas are the differential Galois theory and the theory of motives, which can be seen as a higher-dimensional analogue of Galois theory.

But have we really understood what Galois had in mind when he wrote:

> *«Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambigüïté. Il s'agissait de voir a priori dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaitre tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développées sur ce terrain qui est immense.»*

Galois

There are other examples of mathematicians who really helped me at an early stage as a source of inspiration. It isn't that I feel close to them at all in what I do but I admire what they do. At first, I was fascinated by Jacobi because I found his way of computing marvellous. And by von Neumann – the depth of what he had discovered and the way he talked about it... And by Tomita of course. I was fascinated by Tomita's mysterious personality; he's someone who has succeeded in avoiding all the traps that society tends to set for someone extremely original. He became deaf at the age of two. When he started his research, his thesis advisor gave him a huge book telling him, "Come back and see me once you have read this book". Tomita met accidentally his thesis advisor two years later and the latter asked him, "How is the book going?" to which Tomita replied, "Oh, I lost it after one week"... But I think the freshest, the most limpid source, is Galois. It's very odd but I have never separated Galois from this powerful mixture of simplicity and fecundity.

Would you like to say something about Choquet?

I remember the first years I was doing research; I worked alone at home but every Thursday

I attended Choquet's seminar. And he shone by his intelligence, his wit. There were questions bursting out; it was extremely open. This shaped me in depth. And Choquet had something unique: he had been very close to the Polish school of mathematics before the war. And so he knew a lot of things which do not make up the usual curriculum of mathematicians but which in fact are quite interesting.

It is only with Choquet for instance that I learnt the theory of ordinals. You might think that this theory is useless, but that's absolutely false. For instance, I remember once, the IHES had an open-door day. There was a first grade class, little kids, and among them a girl with shining intelligence. And so, after the subject of undecidability had been brought up, I gave them an example from the theory of ordinals, the story of the hare and the tortoise. You take a number N, not too big (they had taken 5 or something like that). They had learnt to write numbers in various bases: 2, 3, etc. I explained to them that one writes the number in base 2, then the hare comes and replaces all the 2's by 3's. Thus $5 = 2^2 +1$ gets replaced by $3^3+1 = 28$... and the tortoise just subtracts 1. Then one writes the result in base 3 and the hare comes and replaces all the 3's by 4's and the tortoise subtracts 1 again, etc. Well, the extraordinary phenomenon which comes from the theory of ordinals is that the tortoise wins. After a finite number of steps and even though you have the impression that the hare makes absolutely gigantic jumps each time, you get 0!

And what's hard to believe is that this cannot be proved in the framework of Peano arithmetic. The proof uses the theory of ordinals! You can in fact show that the number of steps required before the tortoise wins is growing faster than any function of N you can write explicitly. You can see on the computer how many steps it takes to reach 0. But the proof that the tortoise wins takes one line with the theory of ordinals. What do you do? You take the first number and instead of replacing the 2's by 3's, then by 4's, etc., you replace them by the ordinal □. For example 5 is 2^2+1, so you write □$^{□}$ +1. This is an ordinal and an ordinal is a well-ordered set and ever y decreasing sequence of ordinals necessarily stops. Now when you do the hare's move, it doesn't change anything, but the tortoise's move subtracts 1, and you obtain in this way a strictly decreasing sequence of ordinals. This has to stop, and you have the proof. And this proof uses ! ... so it is not so surprising that it goes beyond Peano arithmetic. This is typical of the kind of things we discussed at Choquet's seminar.

And this is a partly forgotten mathematical culture, but which is in fact an extremely rich one. We live in a mathematical world which is more and more monocultural. We proclaim principles to say which mathematics is important and which isn't. I try to defend diversity. I believe it is crucial to let schools blossom. This is very important for the health of mathematics.

Operator algebras and coincidences: how did it all begin?

In 1970, I went to the Les Houches summer school [in physics], sent by Choquet. At that time, I had been working on non-standard analysis but after a while I had found a catch in the theory... The point is that as soon as you have a non-standard number, you get a non-measurable set. And in Choquet's circle, having well studied the Polish school, we knew that every set you can name is measurable. So it seemed utterly doomed to failure to try to use non-standard analysis to do physics. But it suited me as a passport to Les Houches in 1970.

And from there, I was taken on as a fellow at the Battelle Institute and I got an invitation for Seattle. I accepted it mostly to visit the States – I did not even look at the program. And the coincidence that occurred is that I stopped in Princeton to visit my brother and I bought a book, at random, at the Princeton bookstore. I hesitated among several books until I came across one which fascinated me, by Takesaki on Tomita's theory. And as I knew I was going to have a long train trip, I bought the book. And I contemplated the book – I can't say I read it, it was really too hard – during the trip through the plains of the Middle West. And the most extraordinary coincidence was that, when I arrived in Seattle, the first day I went and saw the program of the conference and there was Takesaki lecturing on Tomita's theory. From that day, I said to myself, 'That's it, I don't go to any other lecture, just Takesaki's'.

Not a very scientific attitude...

No, and moreover at this time I was fascinated by everything Japanese; it was more at the level of a sensibility to something totally different, that I didn't know at all... If there is a lesson to be drawn, it is that this pulled me completely out of the circle of ideas I was engrossed in at the time. And just then there was another coincidence, so that when I came back I had one more incredible stroke of luck. I had understood a bit of Tomita's theory, a small bit; I wasn't able to do research. But when I came back, I told myself I would go to the seminar in Paris which deals with operator algebras. So I went to the Dixmier seminar and the first time I went there, it was the organizational meeting; the main theme for the year was to be the

Gustave Chouqet

Araki–Woods work on infinite tensor products. Dixmier was distributing the papers among the participants, a bit at random. There was just one left; I raised my hand. Riding home on the RER [suburban train], I was bored. I looked a bit at the paper I had been given and then I was really knocked over backwards. I realized that in this paper there were formulas that I would have had to be a complete idiot not to see were identical, exactly matching those in Tomita's theory. And these formulas said that a certain vector was an eigenvector for the operator defined by Tomita.

An hour after I arrived at home, I wrote a letter to Dixmier saying, 'Here are the Araki–Woods invariants and here is Tomita's theory'. You can see that one can get the first invariants from the intersection of the spectra of Tomita's operators and I gave him the formulas. And since I had been raised by Choquet, I wrote all this in half a page. Dixmier immediately wrote back, '*What you write is totally incomprehensible, I need details'*. And so I wrote back three pages of details, which wasn't difficult, explaining that one could define an invariant that I called S[1]. Dixmier fixed an appointment with me for after his next seminar. I went to see him and all he said then was, "Foncez", which in French is a strong form of "Go ahead!" That was the point of departure. It was really an incredible piece of luck; it wasn't really difficult. Though not exactly written black on white, it was there in the formulas.

It is sure that if I had remained in Paris, if I hadn't moved outside of my circle, I would have continued to work in a narrow direction and I wouldn't have opened up to totally different horizons. I really had this impression at that moment that I got a breath of completely fresh air which allowed me access to a more central part of mathematics. I have often had the impression that there are concentric circles in the mathematical world, that one begins to work in a totally eccentric part and one tries to get gradually closer to the heart.

What is this heart? Is it subjective?

What I mean by the heart of mathematics is that part which is interconnected to essentially all others. A bit like all roads lead to Rome. What I mean is that when the mental picture you get of a mathematical subject becomes more and more precise, you realize in fact that whatever the topic you begin with, if you look at it sufficiently precisely, after a while it converges toward this heart: modular forms, L functions, arithmetic, prime numbers, all sorts of things linked to that. It is not that these things are more difficult and I would hate to follow the wrong example I was discussing before of putting down eccentric topics. What I mean is that if you walk long enough, you are obliged to go towards these domains, you cannot remain outside. If you do, it is a bit out of fear. You can succeed in doing a lot of things by refining techniques in a given topic but unless you keep moving towards this heart you feel you are left outside. It is very strange and surely subjective.

In your research, you have got lightning-like results – you mentioned earlier the discovery of the invariant S. There is also the case of the 2×2 *cocycles and others which cost you considerable efforts.*

Of course. This 2 by 2 matrix trick which is of utter simplicity[2] came indeed to me all of a sudden but only after I had spent three months doing horrible computations; I was doing concrete computations of modular automorphisms with almost-periodic states, etc. In fact, before discovering this cocycle property, I had come across it by experience. The 2 by 2 matrix trick came to me by chance in a flash, but because the ground had been prepared by tons and tons of examples – tons and tons of computations.

My impression is that I have never obtained anything at low cost. All my results have been preceded by preparatory ones – setting up work, a very long experimentation – hoping that at the end of this experimentation, an incredibly simple idea occurs which comes and solves the problem. And then you need to go through the checking period, almost intolerable because of the fear you have of being mistaken. I will never let anyone believe that you can wait just like this until results come all by themselves.

I spent the whole summer [of 2006] checking a formula which gives the standard model coupled with gravitation in our joint work with Chamseddine and Marcolli. The computation is monumental: in the standard model, there are four pages of terms with coefficients $1/8$, $1/4$, of sine or cosine of the Weinberg angle... and if you have not checked everything with all the coefficients, you can't claim that the computation gives the right result. I found different coefficients than those in Veltman's book, which obliged me to do again and again these computations until Matilde Marcolli [with whom I am writing a book] realized that the coefficients we had were the right ones and had already been corrected by Veltman in his second edition! There is always this permanent fear of error which doesn't improve over the years. And there is this part of the brain which is permanently checking and emitting warning signals. I have had haunting fears about this.

For example, some years ago, I visited Joachim Cuntz in Germany and on the return train I looked at a somewhat bizarre example of my work with Henri Moscovici on the local index theorem. I had taken a particular value of the parameter and I convinced myself on the train that the theorem didn't work. I became a wreck – I saw that in the eyes of the people I crossed on the suburban train to go back home. I had the impression that they read such despair in me, they wanted to help... Back home, I tried to eat but I couldn't. At last, taking my courage in both hands, I went to my office and I redid the verifications. And there was a miracle which made the theorem work out in this case... I have had several very distressing episodes like this.

Concerning heuristics: you have written several times that geometry is on the side of intuition. On the other hand, formulas seem to play a leading role in the way you work.

Ah, yes, absolutely. I can think much better about a formula than about a geometrical object because I never trust that a geometric picture, a drawing, is sufficiently generic. I don't really have a geometrical mind. When there is some geometry problem and I succeed in translating it into algebra, then it's fine. There are several steps: first the translation, then the purely algebraic thinking. I always try to distinguish between the intuitive side (the geometrical one) and the linguistic one (the algebraic one) in which one manipulates formulas, and I think much better on that side. For me, algebra unfolds in time: I can see a formula live and turn and exist in time, whereas geometry has something instantaneous about it and I have much more difficulty with it. As far as I go, formulas create mental pictures.

You often give the impression you love computations.

Absolutely. My mathematical thinking is heavily dependent on computations. But, of course, computing does not suffice. Then, one has to interpret things at the conceptual level. Galois was one of the first to understand that one can deal with a computation even if the latter is not practically feasible. For instance, take an equation of degree 7; the polynomial that Galois associates has degree 7! And one has to factorize it. What Galois says,

> *« Sauter à pieds joints sur ces calculs; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes; telle est selon moi, la mission des géomètres futurs »*

is that one should jump *above* the computations, organize them according to their difficulty. One should do them but only like a thought experiment in one's mind, not in a concrete manner. In Galois' example, you can give an explicit function f of the roots of an equation $E = 0$ which takes the $n!$ different values when you permute the roots – you just take a linear form with generic rational coefficients. You can then go ahead and express the roots of $E = 0$ as rational functions of f; this can be done by Euclid's algorithm and by elimination. One can use the computer, and the expression one gets is awfully complicated, even when the starting equation $E = 0$ has degree 4 or 5. If you tried to implement the computations concretely, you would quickly get lost in the complexity of the results. On the contrary, what you have to be able to do is to perform them abstractly and to build mental objects which represent the intermediate steps and results at an idealized level.

I always proceed in the following way. Whatever the complexity of the problem, instead of trying it first on a piece of paper with a pencil, I just go out for a walk and try to have all the ingredients present in my mind, in order to start manipulating them mentally. Only after this exercise am I able to see clearly, think about the various steps and begin to get a mental picture. This is a painful process which consists in gathering in your mind, in your memory, all the elements of the problem, in order to begin manipulating them. It is an exercise that I recommend – well, of course, different people function differently – if one wants to be able not to depend upon paper and pencil. Because with paper and pencil you get tempted to start writing immediately and if you haven't thought long enough before, you will get nowhere. You will get discouraged before having had enough time to create in the linguistic part of the brain specific mental pictures that you can then manipulate, as usual, by zipping them, transforming them into something smaller, and then moving them around.

If you make computations, it is crucial to avoid mistakes. There are ways to check, for instance using different paths to the same result. Also one can see if the result of a computation looks right or not. I remember when I worked with Michel Dubois-Violette, we had a sum of 1440 integrals, each of which was an integral over a period of a rational function of theta functions and their derivatives. We expected the sum to have a simple factorization. Indeed, we found a simple result which was a product of modular forms, elliptic functions, etc. When you find that a huge sum like that gives a product, you feel rather confident that no mistake was made along the way.

Non commutative geometry

What is non-commutative geometry? In your opinion, is non 'commutative geometry' simply a better name for operator algebras or is it a close but distinct field?

Yes, it's important to be more precise. First, non-commutative geometry for me is this duality between geometry and algebra, with a striking coincidence between the algebraic rules and the linguistic ones. Ordinary language never uses parentheses inside the words. This means that associativity is taken into account, but not commutativity, which would permit permuting the letters freely. With the commutative rules my name appears 4 times in the cryptic message a friend sent me recently:

> *« Je suis alenconnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin annales. Qui suis-je ? »*

So somehow commutativity blurs things. In the non-commutative world, which shows up in physics at the level of microscopic systems, the simplifications coming from commutativity are no longer allowed. This is the difference between non-commutative geometry and ordinary geometry, in which coordinates commute. There is something intriguing in the fact that the rules for writing words coincide with the natural rules of algebraic manipulation, namely associativity but not commutativity. Secondly, for me, the passage to non-commutative is exactly the passage from a completely static space in which points do not talk to each other, to a non-commutative space, in which points start being related to each other, as isomorphic objects of a category. When some points are related to each other, they will be represented by matrices on the algebraic side, exactly in the same way as Heisenberg discovered the matrix mechanics of microscopic systems.

One does not go very far if one remains at this strictly algebraic level, with letter manipulations... and the real point of departure of non-commutative geometry is von Neumann algebras. What really convinced me that operator algebras is a very fertile field is when I realized – because of this 2 by 2 matrix trick – that a non-commutative operator algebra evolves with time! It admits a *canonical* flow of outer automorphisms and in particular it has "periods"! Once you understand this, you realize that the non-commutative world instead of being only a pale reflection, a meaningless generalization of the commutative case, admits totally new and unexpected features, such as this generation of the flow of time from non-commutativity.

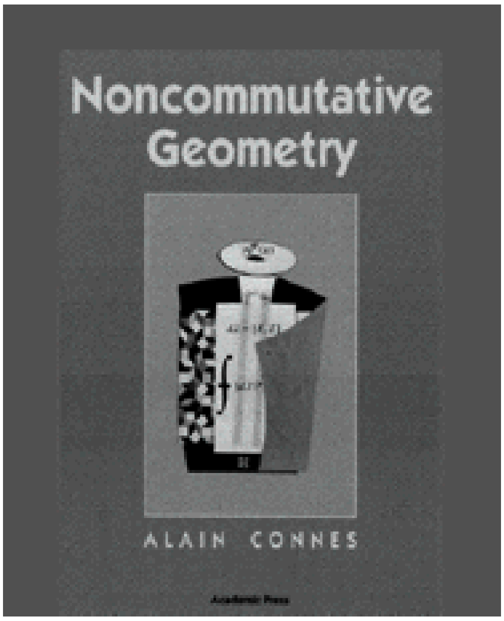
However, I don't identify non-commutative geometry with operator algebras; this field has a life of its own. New phenomena are discovered and it is very important to study operator algebras per se –

I have spent a large part of my life doing that. But on the other hand, operator algebras only capture certain aspects of a non-commutative space, and the "only" commutative von Neumann algebra is $L^\infty[0; 1]$! To be more specific, von Neumann algebras only capture the measure theory, and Gelfand's C^*-algebras the topology. And there are many more aspects in a geometric space: the differential structure and crucially the metric.

Non-commutative geometry can be organized according to what qualitative feature you look at when you analyze a space. But, of course, as a living body you cannot isolate any of these aspects from the others without destroying its integrity. One aspect on which I worked with greatest intensity in recent times is a shift of paradigm which is almost forced on you by non-commutativity: it bears on the metric aspect, the measurement of distances. This is where the Dirac operator plays a key role. Instead of measuring distances effectively by taking the shortest path from one point to another, you are led to a dual point of view, forced upon you when you are doing non-commutative geometry: the only way of measuring distances in the non-commutative world is spectral. It simply consists of sending a wave from a point a to a point b and then measuring the phase shift of the wave. Amusingly this shift of paradigm already took place in the metric system, when in the sixties the definition of the unit of length, which used to be a concrete metal bar, was replaced by the wavelength of an atomic spectral line. So the shift which is forced upon you by non-commutative geometry already happened in physics. This is a typical example where the non-commutative generalization corresponds to an abrupt change even in the commutative case.

I realized recently that the only information we have on the very distant universe is spectral. I hadn't understood that the 'red shift' is not a frequency shift but a scaling of frequencies. If you look far enough back in the universe, frequencies are divided by a factor of up to a 1000. This is amazing. And you see it purely in a spectral way. This spectral point of view is the one which appears from experiments when you study the universe; this is no fantasy. And this is a compulsory point of view when you look at a geometrical space from the perspective of non-commutative geometry. From this point of view one is led very naturally to the spectral action principle which allows one to encode geometrically in a nutshell the tremendous complexity of the standard model coupled with gravity. What happens is simply that space-time admits a fine structure, a bit like atomic spectra, and is neither a continuum nor a discrete space but a subtle mixture of the two.

In the book I am writing with Matilde Marcolli, we develop the first three hundred pages on physics: the standard model and renormalization – linked to motives and Galois groups, and the last three hundred pages on the zeta function: its spectral realization and the spontaneous symmetry breaking of arithmetic systems. We are



The text of this book may be downloaded from Alain Connes' homepage reaching the end of the write-up of the book and we are finding out that quite surprisingly there is a deep relation between the two a-priori disconnected pieces of the book. In fact there is an analogy, a conversion table, between the formalism of spontaneous symmetry breaking which is used for arithmetic systems, zeta functions, dual systems, etc., and a formalism which seems extremely tempting to people who are trying to quantize gravity.

While establishing this dictionary, we found out in the literature that the notion of KMS state, which plays a fundamental role in our work on symmetry breaking for arithmetic systems, also plays a role in the electroweak symmetry breaking which gives masses to particles in the standard model. This allows us to go further in the analogy and it suggests that the people who are trying to develop quantum gravity in a fixed space are on the wrong track. We know that the universe has cooled down; well, it suggests that when the universe was hotter than, say, at the Planck's temperature, there was no geometry at all, and that only after the phase transition was there a spontaneous symmetry breaking which selected a particular geometry and therefore the particular universe in which we are. This is something we would never have thought of – we would never have had this idea – if our book was not written with the two parallel texts. Of course there is no point where one part really uses, or relies, on the other – but you can see an analogy emerging between the two parts.

As André Weil pointed out, this type of mysterious similarity is one of the most fertile things in mathematics. The human mind is still ahead of the computer, for the moment and for a long time to come I hope, in detecting the structural analogies between theories which look quite different in content but in which the same kind of phenomena appear. Translation will never be a literal one and there will always be two texts written in two different languages and there will never be a one to one correspondence between the words of one language and the words of the other. But there will be these strange hints which may well evaporate if you try to rush and write them down too precisely. There are boxes that are very well understood on one side – and not understood at all on the other. Even if it doesn't provide a key to open something, it binds us; it forces us to think from the other side.

It's true that the name 'non-commutative geometry' is a bit unfortunate because there is this 'non', the negation. What is important is to think of it as 'non necessarily commutative', so that it includes the commutative part. We could have given it 36 other names. A name that would have been better in the Riemannian part is 'spectral geometry'. What this geometry shows so well is that all the things we perceive are spectral, that seeing them from the set-theoretic point of view is not the right standpoint. We could have used different names, though certainly not 'quantum'.

Why?

Because in the word 'quantum' there is a perversion, i.e. people don't understand that the word 'quantum', from the beginning, is not so much 'non-commutative' but rather 'integer'. In the word 'quantum' there is really this discovery by Planck of the formula for blackbody radiation, from which he understood that energy had to be quantized in quanta of $\hbar$.

There is a terrible confusion, created by people doing deformation theory who let one believe that quantizing an algebra just means deforming it to a non-commutative one. They take a commutative space and since they deform the product into a non-commutative algebra, they believe they are quantizing. But this is completely wrong. You succeed in quantizing a space only if you give a deformation into a very specific algebra: the algebra of compact operators. And then, there is an integrality, the integrality of the Fredholm index. The use of the wrong vocabulary creates confusion and does not help at all in understanding. That's why I am so reluctant to use the word 'quantum' – this looks more flashy, perhaps, but the truth is that you are doing something quantum only in very particular cases, otherwise you are doing something non-commutative, that's all. Then this may be less fashionable at the linguistic level, but never mind – it is much closer to reality.

What is more important for you in your mathematical work: unity or evolution?

It's difficult to decide. Every mathematician has a kind of Ariadne's thread which he follows from his starting point and that he should absolutely try not to break. So there is a unity, a kind of trajectory, which makes you start from a place, and because you have started there, in a slightly bizarre and special place, you have a certain originality, a certain perspective, different from that of the others. And this is essential, otherwise you put everybody in the same mould – everybody would have the same reactions to the same questions. This is not what we want; we want different people who have their own approaches, their own methods. So there is a unity in the trajectory, which is not at all the unity of mathematics. The unity of mathematics, you discover bit by bit, when you realize that extremely different trajectories, of extremely different people, get closer to the same vibrant heart of mathematics. But what I have felt above all is the unity, the fidelity to a trajectory.

Part II of the interview is to appear in the next issue of Matilde. The interview has also appeared in the EMS newsletter.

Alain Connes is a Professor at the Collège de France, IHES and Vanderbilt University. Among his awards are a Fields Medal in 1982, the Crafoord Prize in 2001 and the CNRS Gold Medal in 2004.

The interviewers, Catherine Goldstein [cgolds@math.jussieu.fr] (Directeur de Recherches – CNRS) and Georges Skandalis [skandal@math.jussieu.fr] (Professor at Université Paris Diderot – Paris 7) are both members of the Institut de Mathématiques de Jussieu.

Footnotes

1. the intersection of the spectra of all modular operators
2. Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 274, 1972.

Questions about the proof
– an interview with John Morgan

conducted by Ulf Persson (Göteborg, Sweden) in connection with the International Congress of Mathematicians (ICM) in Madrid, 2006

Poincaré Conjecture – topology, geometry and analysis

Ulf Persson *In the early eighties Freedman proved what was often referred to as the 4-dimensional Poincaré conjecture (PC). At the time there were comments from the topological community that this was much easier than the 3-dimensional case. Would you care to comment on this?*

John Morgan To me it is impossible to directly compare Freedman's 4-dimensional proof with Perelman's 3-dimensional one. Freedman's proof involved pushing down well-understood techniques from dimension five and higher to four dimensions, isolating the main difficulty, namely that of the existence of Whitney discs. Once you had that everything else would follow by standard techniques. Freedman in fact showed that these discs did exist topologically but in order to fit them in so to speak he had to crinkle them uncontrollably. This was an incredible technical tour de force of topological arguments.

Perelman's proof on the other hand is of a totally different nature. He employs powerful analytic and geometric results in order to prove the existence of 'good metrics'. From there it is easy to get the PC.

This is what strikes the outsider in the proof of the PC, namely the intrusion of extra-topological methods. During the years there have been very many attempts at the PC and I guess most of them have tried to stay within the topological fold. I suspect that you mainly identify yourself as a topologist; when did you hear about Hamilton's approach and did it interest you at all before it was brought to conclusion by Perelman?

For one hundred years people tried direct topological approaches. As far as I am concerned I considered the fact that Freedman's argument was so difficult and so much at the border of the possible as a positive proof that one would not be able to solve the PC by direct topological arguments. It is true that I have known of Hamilton's theorem (1982), to the effect that positive constant Ricci curvature implies spherical, for a long time but I never seriously studied it nor did I think it would lead to a proof of the PC.

One would suspect that you as a topologist would find the techniques employed such as partial differential equations and Riemannian differential geometry not part of your expertise. Do you feel that you eventually understood those aspects or would it have been impossible for you to have written this exposition without the assistance of somebody like Gang Tian? Nevertheless I suspect that the meat of the argument is really topological - surgery, although the initial approach is 'differential' (equational or geometrical), and this is why you got involved in it. Would that be correct?

No, in fact almost all the argument is of an analytic and differential geometric kind. Indeed this is why I started working with Tian. The actual topology involved is really quite elementary; the heart of the argument is geometric/analytic. I first got involved, as I noted earlier, because I wanted to get a feeling for the arguments used to resolve the most famous topological conjecture.

You (and Tian) have really made a very ambitious attempt to understand and explain (the two activities cannot be easily separated) the Perelman proof. From a personal career point of view such an attempt must be considered very unselfish as you tend only to get credit for your own creative contributions. So why did you do it? To vindicate Perelman?

I was motivated by the desire to understand the argument and thereafter by the beauty and power of what I saw. Writing the book was meant as a service to the community. It never ever occurred to me that Perelman needed neither vindication nor protection.

Correctness of proofs. Credits.

At the ICM you formally announced that the proof is correct and that Perelman has proved the PC. Would you consider this, by virtue of your invitation to the ICM, as an authoritative statement?

I was speaking only for myself at the ICM.

This leads to the next question. When is a proof correct? If you take the point of view that mathematics is simply a human activity, then the matter of correctness is simply a question of consensus. If you take a more Platonist point of view, a statement is true or false and the point of a proof is to convince ourselves of forming a belief about its truth or falsity, and our belief has no bearing upon the matter of truth. In practice there is of course very little difference between the two standpoints but from a philosophical point of view, there is a crucial difference. Mathematicians are often derided for taking the second point of view. What is your opinion on the matter?

I think the confidence of the community in proof evolves with time. Perelman posts paper one; clearly he has broken new ground and has made major advances. He claims that the same arguments will prove not only the PC but also Thurston's Geometrization conjecture. I am dubious. Now Perelman posts paper two, giving the extensions of his results to Ricci flow with surgery. Arguments are more intricate and even more condensed. But clearly it is serious business. Paper two ends with the statement of a Theorem on collapsing space. Proof is promised in an upcoming 3rd paper yet to be written. Will this be an issue? Now the community begins to come to grips with paper one - it looks OK. The most delicate analytic points are verified by others (often many others). Paper two is harder but no obvious errors are being reported. Perelman posts paper three giving a short-cut to the PC. People are finding paper two really hard going. Colding and Minicozzi post a result analogous to Perelman's third paper, so that is probably OK.

In September 2004, Kleiner, Lott, Tian and myself organize a small workshop with about a dozen people in attendance in order to work through paper two. We then all believe that it is correct and that we understand the argument. We are then convinced that paper one and two are correct and that either paper three or with the other promised result Perelman has it all. Tian and I then decide to write up what we understand. For the next two years we worked through every detail as well as rearranging and presenting the material coherently. When we finished in May 2006, we, at least, are convinced. The final stage of general acceptance will happen when people closely examine what we have done, what Kleinert-Lott have done and what Cao-Zhu have done, and come to the conclusion that it is OK. I think the Clay rule of waiting two years after publication is about right.

As to the philosophical point, I think there is an abstract notion of proof (assuming mathematics is consistent), but we will never completely get there. We always take short-cuts. We never reduce arguments to logical atoms and complete explicitness. But there is a consensus on where you are close enough to be sure that the argument is correct.

Ostensibly the point of a proof is to decide whether something is true or not but as mathematicians we are probably more interested in explanations, of why something is true. This is why we find computer-assisted proofs so unsatisfactory. Obviously your conviction of the soundness of the proof does not rest on having checked every detail but rather on having been brought to understand a few key ideas. Would you be able to pin-point a few of those that really illuminated why it had to work?

The notion of Ricci-flows is often presented as a key insight and its analogies to the heat-equation stressed. Is the latter just a formal analogy or does it carry explanatory power and in fact structure the entire argument, at least that pertaining to differential equations?

Indeed the analytic theory of Ricci flow certainly rests on the analogy with the heat equation, as the smoothing property of the latter served as inspiration for the hope that the Ricci flow would make the metric better. But there is nevertheless an essential difference. The Ricci flow equation is non-linear and the non-linearity leads to singularity formations. I would identify Perelman's chief insight as the introduction of the length function and its use to show non-collapsing. Once he had that, everything else was a matter of technical power. How he ever came across the notion of the length function I simply can not imagine.

The question of justly assigning credit to the proof of a conjecture is a tricky one. Say that the main conjecture on modular elliptic curves had already been established (by Wiles) and only later the connection with Fermat's theorem had been pointed out by Frey. Would he (or maybe rather Ribet) have been credited with solving Fermat?

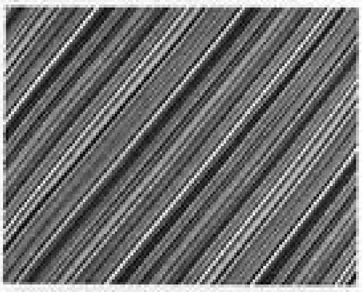
In the case of Hamilton and Perelman there is no such clear-cut case. I do not believe that Hamilton ever formulated a theorem A, claiming that if A was proved so would PC, and that Perelman came along proving A. Yet to an outsider it is easy to get the impression that Hamilton did the crucial work, setting up an approach, but getting mired in some technical details, which Perelman simply clarified.

What would you specifically point at to dispel such a misconception?

Hamilton did indeed lay out the approach and understood that surgery was required. But he was stuck. He was not going to get there, without some coup de genie. Perelman added new and deep insights which were absolutely essential. They are just not 'technical details'. To me the correct analogy is Grothendieck-Deligne and the Weil conjectures. In the ethos of mathematics one says that Deligne proved the Weil Conjectures and Grothendieck revolutionized algebraic geometry. Here we will say that Perelman proved the PC and Hamilton developed the powerful method of Ricci flow.

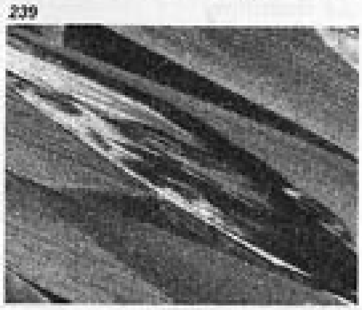
3

7



47

239



Conceptual ideas and formal arguments

At your press-conference at the ICM you pointed out some interesting phenomena, no doubt well-known to all mathematicians and also the source of much didactic confusion. You encounter a statement, you do not understand it, then finally you work it out, only to find out in the end that if you would now explain it succinctly and clearly to the mathematician in the street, you would more or less use the same words and the same formulations, which were so opaque to you initially. This illustrates that mathematical statements, like all other statements, do not live in isolation but are only meaningful in a context. Do you see any way around this?

In particular a proof consisting of a chain of correct statements is not that satisfying, what you need is also a context, and I believe that in many proofs that explanatory context is missing.

In other words there are in fact often (in spite of hand waving) too many details in a proof and not enough motivation setting the reader on the right track. Would you have any comments on this or do you think that there simply are no shortcuts, sooner or later a mathematician has to work things out in privacy and there is little outsiders can do to assist.

I have thought much about this. To me it is a question of internalizing the argument, making it your own. It could be having a picture to go with the formal argument. At the end of the day I think you need both a formal argument with details and the conceptual idea of the proof. I do not believe something until I have both. In writing the correct balance between these two aspects is difficult to find and maintain. Some mathematicians, notably Milnor, succeed; most of us do not. Papers can be as unreadable if they have too much detail as having not enough. In the end you always have to work things out for yourself.

Perelman and the Press

Perelman has received a lot of extra-mathematical attention, much of it I believe actively promoted by some of our colleagues. The question is whether this kind of attention (now further stimulated by Yau threatening to sue the New Yorker for the Naser article) is good or bad for mathematics? On one hand, as people in the media well understand, bad publicity is better than no publicity. On the other hand does not this kind of publicity confirm many people in the standard misconceptions of mathematics (and mathematicians)?

I have concluded that it is after all good for math. I do not think it feeds the stereotype. Yau is certainly not an asocial nerd and certainly does not come across as one in the piece. People relate to human drama and I think it helps to form the impression that what we do is important enough, at least to us, to fight about. I also think the public will come away with the sense of the power and accomplishment of the subject.

At the aforementioned press-conference you got the question whether Perelman was a genius. You disavowed such a label, claiming that it did not explain anything. You were instead talking about incredible talent, of being insightful, and of power. On the face of it those words seem almost as general as the much abused notion of 'genius'. I guess that what you wanted to convey was that Perelman is not extraordinary; he has the same qualities as all other mathematicians, but to a sharper degree.

Would you care to be more specific what you really mean by talent in mathematics, as opposed to having insights? And what do you mean by 'power' as being different from the other two? A sense of perseverance, 'going that extra mile'?

I think of 'genius' as being basically synonymous with extraordinarily high I.Q. And I could easily list hundreds of mathematicians with that quality. Powerful? This aspect of mathematical talent is probably close to I.Q, namely the ability to work through incredibly complex arguments with many interlocking pieces and keep it all straight, sensing all along when you are making progress, not unlike that of a juggler who is able to keep lots of balls in the air and not losing track. Powerful mathematicians are those who can work out arguments requiring many intricately interlaced ideas. Originality on the other hand is the rarest and the most important - the ability to get out of old habits of thought and see new possibilities, or to make new unsuspected connections. Of course in addition to this there is a matter of perseverance, confidence, clarity of thought, self-reliance. They are all important.

Plans for the future

You identify yourself as a topologist. But in mathematics all branches are interconnected, something we as mathematicians learn at our peril. Yet no man today has the capacity to be a universalist and specialization is both a necessity and a curse. How do you look upon yourself?

I have always worked at the interface of topology and other subjects - algebraic geometry, mathematical physics, differential geometry - but I have an interest far away in algebra and number theory.

The natural question is what do you plan to do now? Will you pursue other things in topology or do you feel tempted to apply some of the new things you learned from Perelman? And if so, what would be the natural questions to consider?

I would love to be able to meld the Ricci flow and the Perelman techniques with the elliptic techniques that have produced invariants of 4-manifolds. This is terra incognita and I hope that what I have learned in three dimensions will be helpful in four dimensions.

Mathematics is a competitive subject, especially when you are young. What is your attitude to this? Is it inevitable and should be encouraged, or is it something that actually is counter-productive to most mathematicians? In this context, how would you look upon the Fields Medals and the Clay Prize (the latter can of course be seen as a promotion thing, while the Fields medals are strictly a matter of internal appreciation)?

Mathematics is hard and in some ways competitive. But I think that the healthiest subjects, and the most fun to work in, are those where the competition is not the primary feature but rather the advancement of the subject and our understanding of it. Then one attains a genuine respect and admiration for the accomplishments of ones 'competitors'.

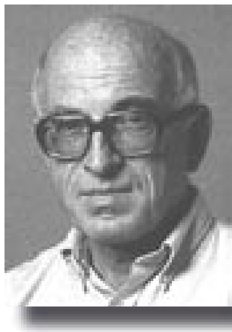
The Fields medal has, I think, become somewhat artificial because of the age restriction. To my mind the winners over the last twenty years have been of widely varying quality. The Clay prize is for publicizing mathematics and it has worked remarkably well. I worry that introducing real money into mathematics may cause more of the kind of scenes we saw this summer (though I do not think money was the cause of that). If so, it would be a terrible shame.

John Morgan [jm@math.colubia.edu] is a professor and chairman at the Department of Mathematics, Columbia University, New York, USA. Ulf Persson[ulf p@math.chalmers.se] is a professor at the Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.

(Dette interview har også været bragt i EMS's newsletter)

Af: Nils A.Baas
Institutt for Matematiske Fag
NTNU
7491 – Trondheim

Email:baas@math.ntnu.no



Atle Selberg til minne

Vår store matematiker Atle Selberg døde 6 august 2007 i sitt hjem i Princeton, New Jersey, USA, etter kort tids sykeleie. Med ham er en av det forrige århundres største matematikere gått bort.Hans bidrag til matematikken er så dype og så mange at hans navn allerede er en del av matematikkens historie. Hans matematiske spesialområde var tallteori.

Selberg ble født i Langesund 14 juni 1917, og vokste opp på Voss og Nestun ved Bergen. Han gikk på gymnaset på Gjøvik.Han vokste opp i en familie med matematikere.Hans far var lektor og hadde doktorgrad i matematikk, og hans to eldre brødre - Henrik og Sigmund – ble professorer i matematikk.Allerede som 12 åring studerte han bifagsforelesningene ved Universitetet i Oslo,og som 15 åring skrev han en liten note i Norsk Matematisk Tidsskrift. Han studerte deretter ved Universitetet i Oslo, hvor han i 1939 ble cand.real., og høsten 1942 forsvarte han der sin doktorgrad.

Hans doktorgradsarbeide var om Riemann-hypotesen som fortsatt er et av matematikkens store uløste problemer.Denne hypotesen gir uhyre dyp informasjon om primtallenes fordeling. Selbergs resultater vakte stor oppmerksomhet,og dannet grunnlaget for hans internasjonale berømmelse.

I 1947 dro Selberg til Institute for Advanced Study i Princeton i USA. Dette er en av verdens fremste forskningsinstitusjoner for teoretisk vitenskap. På denne tiden var Albert Einstein medlem, likeså logikeren Kurt Gødel, og Robert Oppenheimer var direktør. Selberg ble i 1949 fast medlem og i 1951 professor der – en stilling han hadde fram til 1987,da han ble professor emeritus.

I 1948 lyktes det Selberg å gi det første elementære bevis for primtallsetningen som gir et estimat for antall primtall opp til en viss størrelse.Dette var en sensasjon.Selberg benyttet her sin såldmetode som senere har vært av fundamental betydning for utviklingen av tallteorien.

I begynnelsen av 1950 årene kom igjen et nytt og uhyre dyptliggende resultat fra Selberg, nemlig hans nå så berømte sporformel – et resultat som har hatt store ringvirkninger i matematikk og teoretisk fysikk.Her kombinerte Selberg en rekke matematiske områder på en uhyre intrikat og dyp måte.Selbergs sporformel regnes av mange som et av de betydeligste matematiske resultater i forrige århundre. Andrew Wiles' berømte bevis for Fermats Siste Teorem gjør vesentlig bruk av Selbergs sporformel.

Selberg ble tildelt følgende meget prestisjefylte priser:Fields-medaljen i matematikk (1950), den israelske Wolf-prisen (1986) og Abels Ærespris (2002). Han var Kommandør med stjerne av St.Olavs Orden.

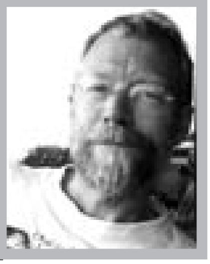
Atle Selberg nøt en enorm respekt i den internasjonale matematiske verden.Hans resultater er matematiske perler.Hans arbeider er preget av enorm skarpsindighet,originalitet og intellektuell utholdenhet. Han var i besittelse av en naturlig og imponerende faglig autoritet som gjorde at man over alt lyttet med den største oppmerksomhet til hans ord.

Selv om han bodde 60 år av sitt liv i USA stod Norge alltid hans hjerte nær. Norsk natur, språk og litteratur satte han alltid stor pris på.

Norge har mistet en av sine største vitenskapsmenn gjennom alle tider.

Aftermath

ved Mogens Esrom Larsen



LØSNINGER

Opgaverne er fra International Mathematical Olympiads, 1986,1, 1986,5, 1986,6, 1987,1, 1995,2, 1988,1, 1988,6, 1992,1, 1998,4.

Nogle af opgaverne er løst af problemgruppen "Con Amore," Ebbe Thue Poulsen og Henrik Meyer.

Kvadratur

Lad d være et naturligt tal, så $d \notin \{2, 5, 13\}$. Vis, at der findes $a \neq b$, $a, b \in \{2, 5, 13, d\}$, som opfylder, at $ab - 1$ ikke er et kvadrattal.

Denne opgave er løst af CA.

Da $2 \cdot 5 - 1$, $2 \cdot 13 - 1$ og $5 \cdot 13 - 1$ alle er kvadrattal, er det klart, at vi "må sætte vor lid til" d sammen med et af tallene 2, 5 og 13.

Idet vi fører beviset indirekte, antager vi altså, ad d kan vælges som et naturligt tal, sådan at

$$2d - 1, \quad 5d - 1 \text{ og } 13d - 1 \text{ alle er kvadrattal.}$$

Det ses let, at modulo 16 er ethvert kvadrattal kongruent med enten 0, 1, 4 eller 9. Ifølge vor antagelse gælder altså, at

$$\begin{aligned}
&2d \text{ er kongruent med } 1, 2, 5 \text{ eller} 10; \text{ dvs.}\\
&d \text{ er kongruent med } 1, 9, 5 \text{ eller } 13 \text{ modulo } 16;\\
&5d \text{ er kongruent med } 1, 2, 5 \text{ eller} 10; \text{ dvs.}\\
&d \text{ er kongruent med } 13, 10, 1 \text{ eller } 2 \text{ modulo } 16;\\
&13d \text{ er kongruent med } 1, 2, 5 \text{ eller} 10; \text{ dvs.}\\
&d \text{ er kongruent med } 5, 10, 9 \text{ eller } 2 \text{ modulo } 16.
\end{aligned}$$

Da intet naturlig tal, d, tilfredsstiller kravene i alle de sidste tre linjer, har vor antagelse ført frem til en modstrid; dvs. påstandens rigtighed følger.

Funktionalt

Find alle funktioner på den ikke–negative reelle akse ind i sig selv, som opfylder

$$\begin{aligned}
(i) &\quad f(xf(y))f(y) = f(x+y) \quad \text{for alle } x, y,\\
(ii) &\quad f(2) = 0,\\
(iii) &\quad f(x) \neq 0 \quad \text{for } 0 \leq x < 2.
\end{aligned}$$

Denne opgave er løst af TP.

Sæt først $y = 2$. Så følger af (i) og (ii), at $f(x+2) = 0$ for alle $x \geq 0$, dvs

$$f(x) = 0 \text{ for alle } x \geq 2.$$

Lad nu y være vilkårligt med $0 \leq y < 2$, og vælg $x = 2 - y$. Så er $f(x+y) = 0$, og da $f(y) \neq 0$ ifølge (iii), følger det, at $f(xf(y)) = 0$, og altså $xf(y) \geq 2$, dvs

$$f(y) \geq \frac{2}{2-y}.$$

Der kan imidlertid ikke gælde $f(y) > \frac{2}{2-y}$. Antag nemlig dette og vælg $x = \frac{2}{f(y)}$.

Så er på den ene side $xf(y) = 2$, der giver $f(xf(y)) = 0$ og altså $f(x+y) = 0$, og på den anden side

$$x + y = \frac{2}{f(y)} + y < 2 - y + y = 2,$$

der medfører $f(x+y) \neq 0$.

Der er altså kun muligheden

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x}, & \text{hvis } 0 \leq x < 2,\\ 0, & \text{hvis } x \geq 2. \end{cases}$$

Det er bemærkelsesværdigt, at vi af (i) kun har udnyttet, at $f(x+y) \neq 0$, hvi og kun hvis $f(xf(y)) \neq 0$ og $f(y) \neq 0$.

Det er derfor i højeste grad nødvendigt at eftervise, at den fundne funktion faktisk opfylder (i), men det er let at verificere.

Rød eller hvid?

Givet en endelig mængde af punkter i planen, alle med heltallige koordinater. Vis, at man altid kan farve dem røde og hvide, så alle har en af farverne, og således at for enhver akseparallel linie vil antallet af røde og antallet af hvide på linien højst afvige med 1.

Denne opgave er løst af CA og TP.

Vi starter med at konstruere en graf, hvis hjørner er de givne punkter. Kanterne tilføjes en ad gangen, idet følgende betingelser overholdes:

1. en kant er enten en $X - kant$ parallel med $X-$aksen eller en $Y - kant$ parallel med $Y-$aksen,
2. fra et vilkårligt hjørne udgår der højst en $X-$kant og højst en $Y-$kant.

indtil det ikke er muligt at tilføje flere kanter.

Herefter farves punkterne således, at to punkter, der er forbundne med en kant, altid gives hver sin farve. At dette er muligt ses ved at vælge et vilkårligt punkt og give det en vilkårlig farve, og derefter gennemløbe den vej, som punktet tilhører, idet punkterne skiftevis farves røde og hvide. Da de kanter, som indgår i en vej skiftevis er $X-$kanter og $Y-$kanter, er antallet af punkter på en eventuel lukket vej lige, og altså den angivne farvning af en vilkårlig vej mulig uanset om vejen er lukket eller ej. Når en vej er farvet, fjernes den fra grafen, og man fortsætter med at farve en vej ad gangen, indtil hele grafen er farvet.

Betragt nu en vilkårlig akseparallel linje, fx en linie parallel med $X-$aksen. De punkter på linjen, der ligger på $X-$kanter, optræder parvis således, at der er lige mange røde og hvide. Ud over disse punktpar kan linjen højst indeholde et af de givne punkter, for hvis der var flere, kunne to af dem forbindes med en $X-$kant i modstrid med antagelsen om, at det ikke er muligt at tilføje flere kanter. Antallet af røde og hvide punkter på linjen afviger højst med 1.

Kombinatorik

Lad $p_n(k)$ være antallet af permutationer af n elementer med netop k fixpunkter. Vis formlen

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$$

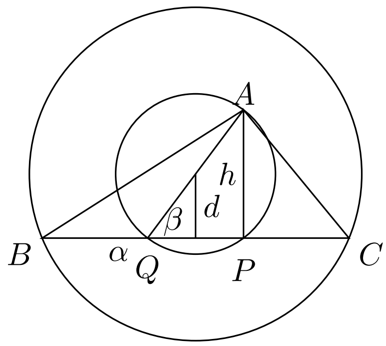
Denne opgave er løst af CA.

Venstre side kan fortolkes som antallet af fixpunkter i samtlige permutationer af de n elementer. Nu er ethvert punkt fixpunkt for netop $(n-1)!$ permutationer, og da punktet kan vælges på n måder, følger påstanden.

Cirkler

Givet to koncentriske cirkler med radier $R > r$. Lad P være et fast punkt på den lille cirkel, og lad B være et variabelt punkt på den store. BP skærer den store yderligere i C. Den vinkelrette linie til BP i P skærer den lille cirkel ydeligere i A.

Find værdierne af $BC^2 + CA^2 + AB^2$.



BP's andet skæringspunkt med den lille cirkel betegnes Q, og BC's midtpunkt betegnes M. Længden af OM betegnes d, længden af AP betegnes h, længden af BM betegnes α, og længden af QM betegnes β.

Så er $h = 2d$, $\alpha^2 = R^2 - d^2$, og $\beta^2 = r^2 - d^2$.

Endvidere er enten $BP = \alpha + \beta$ og $CP = \alpha - \beta$ eller omvendt.

Altså er

$$\begin{aligned}
&BC^2 + CA^2 + AB^2 \\
=&4\alpha^2 + h^2 + CP^2 + h^2 + BP^2 \\
=&4R^2 + 4d^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 \\
=&4R^2 + 4d^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 \\
=&6R^2 + 2r^2
\end{aligned}$$

for enhver beliggenhed af B.

En ulighed

Lad a, b og c være positive reelle tal, der opfylder $abc = 1$.

Vi, at

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Denne opgave er løst af CA.

Lad $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ og $z = \frac{1}{c}$, der også opfylder $xyz = 1$. Da

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3yz}{y+z} = \frac{x^2}{y+z}$$

Bliver uligheden til

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{3}{2}$$

Lad

$$\alpha = \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{x+z}}, \frac{z}{\sqrt{y+x}}\right)$$

og

$$\beta = \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{x+z}, \sqrt{y+x}\right)$$

Cauchy–Schwarz' uliglhed giver da

$$\alpha \cdot \alpha\beta \cdot \beta \geq \alpha \cdot \beta^2$$

altså

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}\right) \cdot \\
&(y+z+x+z+y+x) \\
&\geq x+y+z
\end{aligned}$$

eller

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}\right) \geq \frac{x+y+z}{2}$$

Men da det aritmetiske gennemsnit er større end eller lig med det geometriske, er $x+y+z \geq 3$. Heraf følger uligheden.

Endnu et kvadrat

Lad a og b være naturlige tal, der opfylder, at $ab+1$ går op i a^2+b^2. Vis, at

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

er et kvadrattal.

Denne opgave er løst af CA, som oplyser, at opgaven var i normat 54,4 (2006).

Betragt ligningen

$$a^2 + b^2 = q(ab+1)$$

og søg dens heltallige løsninger med $q > 0$. Betragt løsningen med $a+b$ mindst. Vi kan antage, at $a \leq b$. Da er $b > 0$, når $q > 0$. Vi kan jo skrive ligningen

$$b(qa - b) = a^2 - q$$

Betragt $c = qa - b$, da gælder $bc < a^2 \leq b^2$, så $c < b$. Da $b = qa - c$, giver det $c(qa-c) = a^2 - q$ i modstrid med minimaliteten af $a+b$, med mindre $c < 0$.

vi har altså uligheden $qa < b$. Da $1 \leq -c$, fås $qa < -cb = q - a^2$, så $q(a-1) < -a^2$ og derfor $a - 1 < 0$. Altså er $a = 0$. Men så er jo $q = b^2$.

Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n+1}{n}$ er et helt tal.

Alle tre har sendt besvarelser af denne opgave.

TP løser opgaven, men løsningen er ikke for pæn. Opgaven er da også opstået ved en trykfejl. Løsninger er $n = 3^k$, men også fx. 171.

En divisor

Find alle hele tal a, b og c med $1 < a < b < c$ som opfylder, at $(a-1)(b-1)(c-1)$ er en divisor i $abc - 1$.

Denne opgave er løst af CA og TP.

De eneste løsninger er (2,4,8) og (3,5,15).

Sæt $x = a - 1$, $y = b - 1$ og $z = c - 1$. Så er tallet

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz} = \frac{xyz + yz + zx + xy + x + y + z}{xyz}$$

Et helt tal, som vi kan kalde $k + 1$. Så er

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = k$$

Da $1 \leq x < y < z$ fås $2 \leq y$ og $3 \leq z$, hvoraf $k < 3$. Hvis $x \geq 3$, fås $k < 1$. Så x er enten 1 eller 2. Hvis $x = 1$, så er $k = 2$. så ligningen reduceres til $(y-2)(z-2) = 5$, der må give $y = 3$ og $z = 7$. Hvis $x = 2$, fås

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{yz} = k$$

Da $y \geq 3$ og $z \geq 4$, fås $k = 1$. Så ligningen bliver $(y-3)(z-3) = 11$. Altså bliver $y = 4$ og $z = 14$.

Og en anden divisor

Find alle positive hele tal a og b som opfylder, at $ab^2 + b + 7$ er en divisor i $a^2b + a + b$.

Denne opgave er løst af CA.

Lad $A = a^2b + a + b$ være delelig med $B = ab^2 + b + 7$. Så er også $Ab - Ba = b^2 - 7a$ delelig med B. Hvis $b^2 - 7a = 0$, så er $a = 7c^2$ og $b = 7c$ og $A = Bc$.

Antag derfor $b^2 - 7a \neq 0$. Da $ab^2 + b + 7 \leq |b^2 - 7a|$ gælder enten $b^2 - 7a \geq ab^2 + b + 7$ eller $7a - b^2 \geq ab^2 + b + 7$. Den første ulighed kan ikke opfyldes. Den anden kan skrives $(7 - b^2)a \geq b^2 + b + 7$, så b må være enten 1 eller 2. For $b = 1$ Det giver mulighederne $a = 11$ og $a = 49$. $b = 2$ giver ingen løsninger.

NYE OPGAVER

Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n+1}{n^2}$ er et helt tal.

Trekantet

I en spidsvinklet trekant $\triangle ABC$ skærer vinkelhalveringslinien fra A siden BC i punktet L og den omskrevne cirkel i punktet N. Fra punktet L nedfældes de vinkelrette på AB og AC, fodpunkterne kaldes hhv. K og M.

Vis, at firkanten $AKNM$ har samme areal som trekanten $\triangle ABC$.

Retvinklet

$\triangle ABC$ er retvinklet med den rette vinkel i A. Lad D være fodpunktet for højden fra A. Linien gennem centrene for de indskrevne cirkler i trekanterne $\triangle ABD$ og $\triangle ACD$ skærer siderne AB og AC i hhv. K og L.

Vis at arealet af $\triangle AKL$ er højst halvt så meget som arealet af $\triangle ABC$.

Begge dele

Lad D være et punkt inden i en spidsvinklet trekant, $\triangle ABC$, sådan at

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^o \text{ og } AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

(a) Beregn værdien af forholdet

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$$

(b) Vis, at tangenterne fra C til de omskrevne cirkler for trekanterne $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$ står vinkelret på hinanden.

Elementært

Lad n være et positivt helt tal og lad $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ være delmængder af en mængde, B. Antag, at

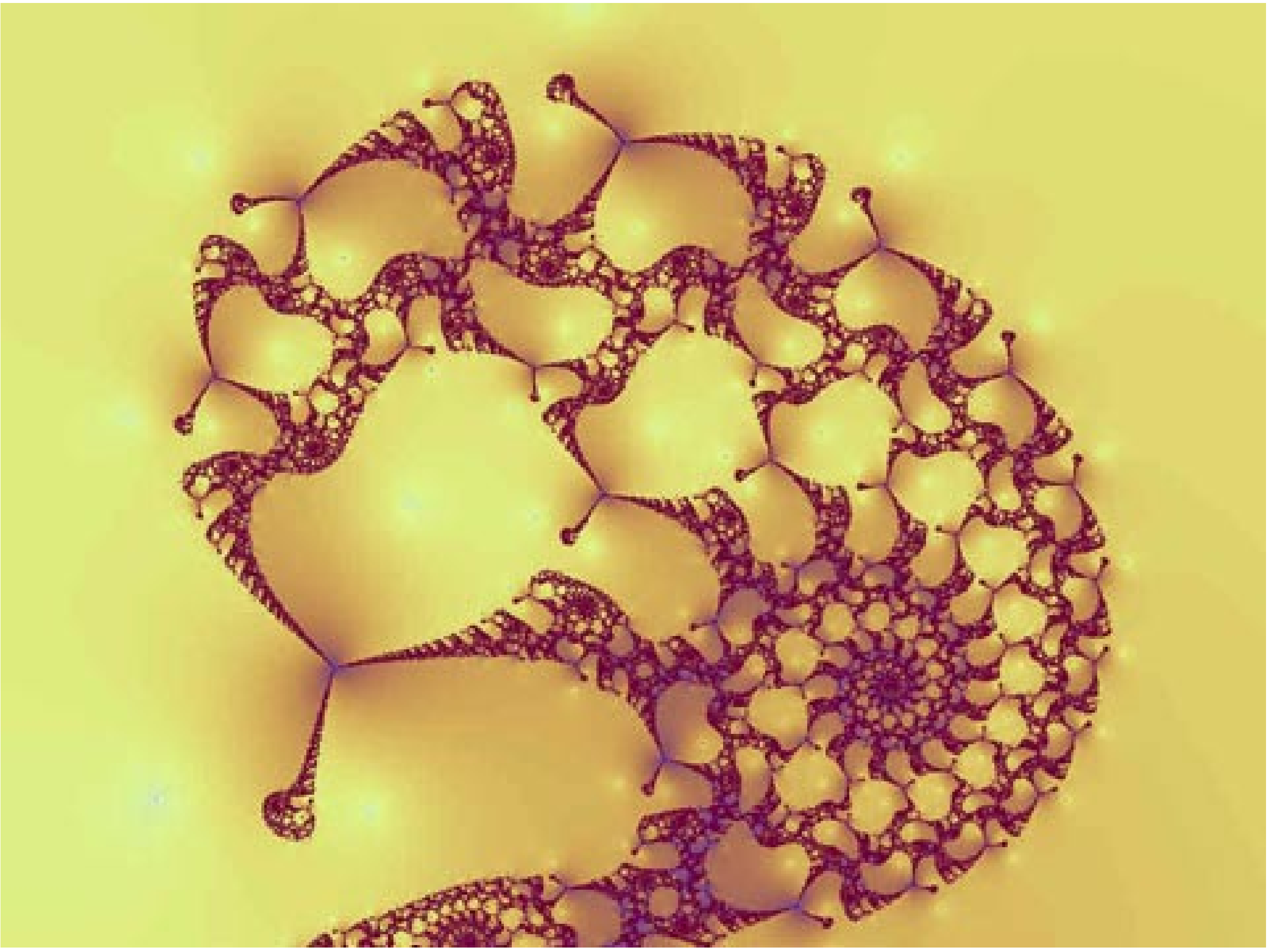
(a) hver mængde A_i har netop $2n$ elementer,
(b) hver fællesmængde $A_i \cap A_j$, $i \neq j$, har præcis *ét* element,
(c) hvert element i B ligger i mindst to af mængderne A_i.

For hvilke værdier af n kan man give hvert element i B en værdi, 0 eller 1, sådan at hver mængde A_i har nøjagtig n elementer af værdi 0?

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C

POST B
PP DANMARK



Kilde: http://www.juliasets.dk/Fraktaler