

mat

M A T I L D E

Tema: Matematisk uddannelse



- Siig mig, hvad kan man slutte om to Størrelser, der ere lige store med en og samme tredie?
- At ... At ... de inte er større end hverandre og heller inte mindre.
- Nu snakker Du hen i Taaget. Kan Du No. 17 besvare mig dette Spørgsmaal?
- At ... naar to Størrelser er ligestor med en og samme tredie saa er de indbyrdes ligestore!
- Fuldkommen rigtigt. Flink Dreng den No. 17, det er en lille Jokumsen, Søn af Kirkeværgen, De veed.



Matematikken i gymnasiet efter reformen

Der er gennemført en del større og mindre reformer af de gymnasiale uddannelser siden 1903, hvor det moderne almene gymnasium blev skabt. Nogle reformer har haft karakter af, at man justerede lidt på strukturen og i øvrigt nedfældede i love og bekendtgørelser den praksis, der efterhånden havde udviklet sig. Valggymnasiet var en sådan reform. De fleste fag, herunder matematik, oplevede ikke et markant skel: 'før og efter reformen'. Et yndet "vandrecitat" fra en ukendt gymnasielærer lød: 'Jeg har endnu ikke set den gymnasiereform, der kan få mig til at ændre på min undervisning.'

Andre reformer var mere omkalfatrende, både mht. struktur og fagligt indhold. Grengymnasiet først i 60'erne og studieretningsgymnasiet fra 2005 repræsenterer sådanne reformer. Her var og er lærerne nødt til at ændre på meget og meget i undervisningen i faget. Også forholdet til de andre fag og det enkelte fags rolle i forhold til hele gymnasieundervisningen var og er i spil. Der er ligheder, men der er også en del forskelle på de to reformkomplekser.

Grengymnasiets fædre forestillede sig, at hvis man indrettede strukturen således, at muligheden for et samarbejde var til stede, så ville det også vokse frem. Det gjorde det også en del steder, båret af en række ildsjæle. Det kastede en del spændende bogudgivelser af sig. Men det letteste var dog at lade være.

De forestillede sig ligeledes, at forærede man de unge mennesker en så fremragende bog som Sløk, Lund og Pihls *De europæiske ideers historie*, så ville de læse den af egen drift derhjemme. De ville tilegne sig indsigt i, hvilke store samfundsomvæltninger, naturvidenskabelige opdagelser og kunstneriske nybrud, der lå til grund for deres egen tid. Det var der også nogle gymnasieelever, der gjorde, og en del lærere anvendte på eget initiativ bogen. Men det letteste var dog at lade være og holde sig til de oplistede pensumkrav.

Studieretningsgymnasiet er båret af nogle af de samme ideelle forestillinger, men det er dog ikke en idealistisk reform. Der stilles krav, som man ikke kan sige nej til. I dette temanummer af Mathilde præsenteres en række af reformens temaer, og der gives eksempler på, hvordan matematikfaget prøver at leve op til intentionerne i reformen:

- Strukturen med studieretninger, defineret af fag, der arbejder naturligt sammen, giver nye muligheder for samarbejde. Der er ikke bestemte krav til samarbejdets indhold, men da eleverne i 3.g skal kunne skrive en stor opgave, hvor de pågældende fag er i spil sammen, er man nødt til at have forberedt dette gennem

forskellige samarbejdsfelter. Dette belyses i artiklen om studieretningssamarbejdet mellem matematik og samfunds-fag.

- Den større skriftlige opgave (SSO) afløses af studieretningsprojektet (SRP), som også skrives i 3.g og som skal involvere to eller tre fag. Matematiklærere, der før havde nogle få elever, der skrev SSO får måske nu 15 eller flere der skriver SRP – en ret overvældende opgave. Allerede dette forår har en række universiteter taget udfordringen op og iværksat et inspirerende udviklingsarbejde – se artiklerne om DTU's workshops og om Tværmæt på KU.
- De matematisknaturvidenskabelige fag skal placeres langt stærkere som en del af den gymnasiale almen-dannelse. Et element heri er, at alle skal have matematik på mindst C-niveau. Et andet element er fag-nes medvirken i de konkrete emneforløb i almen studieforberedelse – se artiklen om matematik og almen studieforberedelse.
- Fagbilagene er ændret både med sigte på at give bedre muligheder, strukturelt og indholdsmæssigt, for det faglige samspil, og at skifte fokus fra stram pensumstyring til en mere kompetencebaseret læreplan. Se artiklerne om statistikundervisningen og om evalueringen af matematik C.
- Didaktiske overvejelser om, hvordan man bedst lærer, er ophøjet fra at være råd og vink i en vejledning til at være krav formuleret i læreplanen. En af hensigterne er at give studenterne nogle specifikke studiekompetencer. Det gælder sådanne emner som projekt-orienteret arbejde, eksperimenterende tilgang til matematikken og inddragelse og udnyttelse af CAS-værktøjernes potentiale i undervisningen – der behandles i hver sin artikel.

Det er klart, at en reform af denne karakter, der fordrer at alle ændrer i hvert fald en del af deres undervisning, vil give dønninger. De første år er ganske krævende for alle lærere, da ingen af os har skufferne fulde af forløb, hvor matematik samarbejder med biologi eller samfunds-fag, eller hvor matematik indgår i almen studieforberedelse. For mange lærere repræsenterer statistikundervisningen eller den eksperimenterende tilgang nye udfordringer.

En reform virkeliggøres ikke blot ved at skrive den – i en længere periode vil der være meget at gøre mht. implementering og udbredelse af kendskab til de gode eksempler. Men holder vi fast i dette, tror jeg på, det vil lykkes at skabe en større interesse for de matematisknaturvidenskabelige fag og en større lyst til at læse disse fag.

Redaktion:

Bent Ørsted, Aau
(ansvarshavende)

Bjørn Grøn
(TEMAREDAKTØR)

Carsten Lunde Petersen, Ruc
Jørn Børling Olsson, Ku
Poul Hjorth, Dtu
Mikael Rørdam, Sdu
Carl Winsløw, Ku

Adresse:

Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø

Fax: 3532 0704
e-post: matilde@mathematics.dk
URL: www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Matilde udkommer 4 gange om
året

Indlæg til næste nummer skal være
redaktionen i hænde senest
15. juni 2007
Tema: Matematikken udefra

Indhold:

TEMA: Matematisk uddannelse

<i>Marianne Kesselhahn</i> Samfunds-fag og matematik – studieretningssamarbejde	4
<i>Marianne Kesselhahn</i> Matematik i almen studieforberedelse.	5
<i>Kjeld Bagger Laursen og Per Rosenqvist</i> TværMat – generering af forslag til studieretningsprojekter	6
<i>Bodil Bruun</i> CAS og skriftlighed	9
<i>Martin P. Bendsøe</i> Workshops om Studieretningsprojekter	12
<i>Bjørn Felsager</i> Ny statistik efter reformen	13
<i>Lars Bo Kristensen</i> Projekt- og emnearbejde i gymnasieskolen efter reformen	15
<i>Niels Grønbæk og Morten Overgård Nielsen</i> Matematik på hf – borgermatematik og studieforberedelse	17
<i>Julian Tosev</i> Eksperimentel matematik i undervisningen	19
<i>Olav Lyndrup</i> Eksperimentel matematik som arbejdsmetode	21
<i>H.C.Thomsen</i> Et matematikforløb om brøkregning til brug i 9. klasse og 1.g ...	22
<i>Juanna Jensen og Helena Skyt Nielsen</i> Effekten af højniveau matematik i gymnasiet på lønnen	24
<i>Christian Berg</i> Orientering om Nationalkomiteen for matematik	27
MatematikerNyt	28
Begivenheder	28
Aftermath	29



Samfundsfag og matematik – studieretningssamarbejde

Af: Marianne Kesselhahn
email:
Marianne.Kesselhahn@skolekom.dk

I studieretninger, der indeholder samfundsfag A-niveau skal eleverne have matematik på mindst B-niveau. I et sådant samarbejde er det af afgørende betydning af lærerne har et vist mål af kendskab til det andet fag. Matematikfaget vil selvfølgelig ikke nøjes med at være regnemaskine for samfundsfag og omvendt vil samfundsfag lige så selvfølgelig ikke nøjes med at være eksempel-leverandør til matematikfaget. Samarbejdet skal tilføre begge fag en øget kvalitet for at kunne siges at være lykkedes.

Indholdet i samarbejdet.

Samarbejdet kan udfolde sig på to niveauer.

- I det daglige arbejde hvor samfundsfag kan have glæde af at eleverne har fælles matematiske forudsætninger – og matematik kan have glæde af relevante eksempler på anvendelse fra samfundsfag.
- I egentlige tværfaglige projekter.

Det daglige arbejde.

På (næsten) alle skoler anvendes statistiksamlingen "Samfundsstatistik" i samfundsfag til næsten alle emner. Den foreligger både i bogform og i digital form. De allerfleste skoler installerer den digitale udgave på skolens net. Alle tabeller og figurer åbnes i et regneark (de fleste steder er det nok Excel) og er herefter klar til viderebearbejdning. Der er altså her et kæmpe-eksempelmateriale at tage af for matematiklæreren. Samfundsfag vil have stor glæde af at matematikfaget arbejder med træning i at anvende regneark til beregninger og fremstilling af grafer og emner som indextal, forbrugerprisindex, Lorentzdiagram, gini-koefficient, grafisk fremstilling, læsning af grafer, logaritmisk skala og vægtning af meningsmålingsresultater er emner som naturligt indgår i samfundsfagsundervisningen.

Eksempler på tværfaglige projekter

Politik:

I ethvert politikforløb er der elementer hvor tabeller og grafiske fremstillinger inddrages:

f.eks:

- Udviklingen i partiernes medlemstal.
- Udviklingen i befolkningens politiske engagement.
- Udviklingen i partiernes repræsentation i folketinget.
- Udviklingen i vælgernes politiske dagsorden.

Ofte diskuterer man spørgsmål som f.eks. hvilke partier der har haft den største medlemstilbagegang, hvordan den procentvise fordeling af stemmerne til folketingsvalgene er og om der er forskel på f.eks. mænds og kvin-

ders valg af partier og politisk dagsorden. Gode forudsætninger for at behandle procenter, indextal og grafisk fremstilling vil være en stor hjælp i disse sammenhænge – og færdigheder i anvendelse af regneark ligeså meget.

Empirisk undersøgelse:

For samfundsfag på A-niveau er der et krav om at eleverne skal lave mindst én selvstændig empirisk undersøgelse. Her vil et samarbejde omkring statistiske deskriptorer, grafisk fremstilling og tests være naturligt. Emnerne kan være alle mulige, men vil nok oftest være undersøgelser af sociologisk art.

Velfærdssamfundet:

Diskussionen om velfærdssamfundets udvikling er aktuelt i den politiske debat og derfor også et emne som gennemgås på de allerfleste hold. De udfordringer som velfærdssamfundet står overfor er den europæiske udfordring – udviklingen af EU, globaliseringen, indvandringen, spørgsmålet om skattetrykket og den såkaldte ældrebyrde. Især i diskussionerne om indvandringen og ældrebyrden argumenteres der ud fra prognoser for udviklingen. Disse prognoser er lavet med anvendelse af differentialligninger og i estimeringen af modellernes parametre anvendes en del sandsynlighedsregning. Et eksempel på dette er den såkaldte Dreammodel som bl.a. velfærdskommissionen har anvendt. Temmelig detaljerede beskrivelser af de anvendte metoder kan findes på deres hjemmeside www.dreammodel.dk.

Økonomi:

I samfundsfag indgår nationaløkonomi og økonomisk politik. De makroøkonometriske modeller SMEC og ADAM spiller en stor rolle i den politiske diskussion om den økonomiske politik. Til undervisningsbrug er der lavet en "minimodel" af sådan en makroøkonometrisk model kaldet Vismandsspillet – eller DK-spillet i de senere versioner. De allerfleste skoler anvender denne model i undervisningen i nationaløkonomi og økonomisk politik. Det er således oplagt at etablere et samarbejde med matematik om disse modeller. Generelle modelbetragtninger, løsning af lineære ligningssystemer og differentiel-ligninger er matematiske emner som kan komme på banen her.

Økonomisk ulighed:

I velfærdssamfundet foregår en betydelig omfordeling af økonomien. Dette har både politiske og økonomisk politiske grunde. Arbejderbevægelsens Erhvervsråd udgiver hvert år en analyse af udviklingen i den økonomiske lighed og ulighed. I analysen bruges mange matematiske redskaber (Lorentzdiagrammer, Ginikoefficienter og boxplots m.m.). Det er oplagt at matematik og samfundsfag indgår et samarbejde om måling af økonomisk ulighed. Dette emne er også velegnet i en international politisk sammenhæng hvor den globale ulighed kan belyses.





Matematik i almen studieforberedelse

Af: Marianne Kesselhahn

email:

Marianne.Kesselhahn@skolekom.dk

Almen studieforberedelse (AT) er et nyt undervisningsfag i gymnasiet. Undervisningens indhold er *"betydningsfulde natur- og kulturfænomener, almenmenneskelige spørgsmål, vigtige problemstillinger og centrale forestillinger fra fortid og nutid"* belyst af forskellige fag i samspil.

Hensigten er at eleverne skal opnå indsigt i de forskellige fags og fakulteters teori og metode. Alle forløb i AT planlægges derfor som flerfaglige forløb. Til eksamen skal eleverne vælge to eller tre fag fra mindst 2 fakulteter. De udarbejder en synopsis om et givet emne og eksamineres mundtligt med udgangspunkt i denne synopsis. Langt hovedparten af forløbene planlægges derfor også som flerfakultære forløb.

Alle fag afleverer 10 % af undervisningstiden til AT og det giver følgende timetal for matematik på de forskellige niveauer:

12,5 time C-niveau

25 timer B-niveau

37,5 time A-niveau

Erfaringerne viser at matematik typisk indgår i to forløb om året (eller pr. niveau-trin) med 6-7 timer pr. forløb. Elevtiden (den tid eleverne bruger på skriftligt arbejde) er typisk 5 timer pr. forløb til involverede fag tilsammen.

Alle fag skal derfor overveje hvorledes netop dette fag kan bidrage til opfyldelsen af kravene.

I et års tid har vi i Matematiklærerforenings-regi haft et udviklingsprojekt om netop dette spørgsmål. Gruppen er nået frem til følgende

- Anvendelse af matematik – hvor kvantificeringen/modelleringen giver mere klarhed over en given problemstilling (beskrivelseskraften)
- Anvendelse af matematik – hvor der er grund til at diskutere modellens anvendelighed (modelkritik)
- Matematikkens udvikling – hvor udviklingen ikke kunne være sket uden matematikken (matematikken som produktivkraft)
- Matematikkens udvikling – forklaret ud fra en religiøs/filosofisk/erkendelsesteoretisk synsvinkel (matematikken som redskab til samtidens naturbeskrivelse)
- Matematisk argumentation, (logik – indre struktur)
- Matematikkens evne til at indfange og beskrive fælestræk ved forskellige naturfænomener og samfunds-skabte fænomener (f.eks. forskellige former for vækst).

Gruppen har også udarbejdet et række (11) forslag til forløb som tilsammen dækker de 6 punkter.

Her omtales 5 af dem.

Emnet *Storbyliv* er et eksempel på at matematiske (i dette tilfælde statistiske) metoder anvendes til at skabe klarhed over et område gennem en kvantificering af iagttagelserne.

Den over ordnede problemstilling: *Hvilke forskelle er der på levekårene og livsstilen i storbyen og i en mindre by?* kan belyses med såvel litterære, kunstneriske, samfunds-faglige som statistiske metoder. De humanistiske fag kan give et billede på hvorledes storbyen opleves gennem forskellige litterære tekster. Samfunds-fag formulerer en række spørgsmål som kan undersøges teoretisk (samfunds-fag) og empirisk (matematik). Det kan dreje sig om indkomstfordeling, aldersfordeling, kriminalitet, uddannelsesbaggrund, national baggrund og kulturforbrug. De matematiske beregninger kan indeholde beregninger af udviklingstendenser (procentregning og indekstal), sammenligninger af data for storbyen og en mindre by ved hjælp af statistiske deskriptorer (kvartilsæt, gennemsnit, typetal, maximum og minimum) og endelig kan de fundne forskelle illustreres grafisk på en passende måde (box-plot, histogrammer, osv.).

I forløbet *Vækst befolkning og energi* arbejder eleverne med vækstmodeller i et samarbejde mellem matematik, fysik og samfunds-fag. Temaet for forløbet er forholdet mellem økonomisk vækst, befolkningsvækst og ressourceforbrug med særlig fokus på energiformer. I relation til denne sammenhæng inddrages forskellige ideologiske synspunkter på problemstillingen, mulige økonomiske styringsredskaber (herunder også tanker om alternative energiressourcer) og overvejelser omkring prognoser for fremtiden. Det matematiske indhold er regression, de forskellige væksttyper: lineær, eksponentiel, logistisk og overvejelser over matematisk modellering og prognoser. Derved stifter eleverne kendskab til matematisk modellering og modelkritik.

Et forløb om *De store opdagelser og navigation* tager afsæt i 1400-tallets opdagelsesrejser. Dette forløb har til formål at belyse bevæggrundene for disse rejser, og konsekvenserne af kulturmøderne mellem de europæiske magter og de indfødte i de såkaldte nyopdagede områder. Desuden arbejdes der med den teknologiske udvikling og det ændrede syn på verden i Europa, som gjorde de sto-

forts. side 20



Af: Kjeld Bagger Laursen
email: laursen@math.ku.dk

og

Per Rosenqvist
email: pr@vordingborg-gym.dk



TværMat

– generering af forslag til studieretningsprojekter

Det 'gamle' gymnasium havde sit 'speciale', nemlig den større skriftlige opgave i 3 g. Her kunne eleven fordybe sig i et emne inden for et fag. I matematik er der i årenes løb blevet skrevet rigtig mange rapporter, fx om $\square$, om sfæriske koordinater, om kryptering, om Euklid. I det nye gymnasium skal eleven i 3g lave et *studieretningsprojekt*. Rammerne er nogenlunde som ved den større skriftlige opgave, med én markant undtagelse: Studieretningsprojektet skal skrives i to eller tre fag. De indgående fag skal være studieretningsfag (eller dansk/historie). Hvis eleven eksempelvis går på en mat-fys studieretning, skal studieretningsprojektet laves i de to fag, eller i mindst et af dem sammen med dansk eller historie.

Rammerne for studieretningsprojektet falder helt i tråd med grundtankerne i det nye gymnasium, som jo dyrker de forpligtende flerfaglige samarbejder. Men denne flerfaglighed kommer bestemt ikke til udfoldelse ganske af sig selv. Fagkonsulenterne i matematik og de naturvidenskabelige fag har derfor besluttet at iscenesætte en del aktiviteter sammen med de faglige foreninger og universiteterne for at sikre, at der bliver lavet en række oplæg til, hvordan studieretningsprojekter kan udformes.

Også IMF, KU, har taget denne udfordring op. Studienævnet godkendte et forslag om at køre et særligt kandidatkursus, Matematik i tværfaglige konstellationer, eller bare TværMat, hvor deltagerne gennem arbejdet med at lave en række projektforslag skulle vinde dybere indsigt i anvendelig matematik, og specielt anvendelig og relativt elementær matematik i samspil med gymnasiets øvrige fagrække: først og fremmest fysik, kemi, geografi, biologi, idræt, men også fag som filosofi, engelsk, historie.

Et betydende aspekt af TværMat-forløbet har været, at det også henvender sig til gymnasielærere som deltagere og som konsulenter. Endvidere er der også blevet trukket på mange universitetsfolk, nogle som oplægsholdere, andre som fagkyndige. Og ikke mindst betydningsfuldt, så bevilgede studienævnet forløbet en ekstern lektor (en af denne artikels to forfattere), der via sin gymnasiebaggrund har kunnet foretage et utal af sunde realitetstjek på de ideer og oplæg, der er kommet frem i kurssets løb.

Undervisningsministeriet har givet forløbet sin velsignelse i form af en projektbevilling, som bla bliver brugt til at betale for ekspertbistand og for assistance med IT: De færdige projektoplæg bliver offentliggjort via de web-baserede portaler, som spiller en stor rolle for det moderne uddannelsessystem: Emu'en og DNA-portalen.

Som allerede antydnet går TværMat ud på at udvikle sådanne oplæg til studieretningsprojekter i gymnasierne, hvor matematik spiller rollen som et af de bærende fag. Ambitionen er, at oplæggene skal kunne benyttes direkte af gymnasielærerne. Gymnasielærerne skal altså umiddelbart, med de studerendes oplæg som udgangspunkt, kunne koncentrere sig om selve vejledningsprocessen, idet litteratur, programmer, eksperimenter og andet, der knytter sig til projektet, er beskrevet og refereret i betryggende form i oplæggene. For at oplæggene også i praksis skal vise sig nyttige, må man sikre sig, at de indeholder en passende substans i begge fag. Det er derfor, der til kurset er knyttet en række gymnasielærere og andre fagfolk, der dels fungerer som samarbejds- eller sparringspartnere i forbindelse med udviklingen af oplæggene, og dels er med til at sikre kvaliteten og brugbarheden af oplæggene.

Der er ca. 12 studerende på kurset og otte tilknyttede gymnasiefolk, hvoraf fire jævnlige møder frem og deltager i gruppernes arbejde med at finde emner, konkretisere dem, helst i mange variationsformer, og finde relevante henvisninger: bøger, artikler, noter, hjemmesider.

Vi har spurgt de studerende på TværMat om, hvorfor de egentlig havde valgt kurset, der jo ikke kan karakteriseres som et traditionelt matematikkursus. Og måske ikke så overraskende viste det sig, at flertallet af dem har taget kurset, fordi de gerne vil være gymnasielærere; en enkelt vil i hvert fald gerne undervise, men måske ikke i gymnasiet. Som en af deltagerne sagde: "Man hører meget om reformen og ved at tage kurset, føler jeg mig bedre rustet. Det har været en introduktion til reformen". En anden af deltagerne nævnte, at det nye system virker lidt uoverskueligt og puslespilsagtigt og en tredje supplerede med, at det til gengæld er sjovt, at man får mulighed for at kombinere sine fag, hvilket ikke er så almindeligt

med hans fagkombination (matematik og musik.)

Hvad angår deres konkrete udbytte af kurset var der kommentarer som disse: "Altså, kurset har givet en klar forståelse af, hvad der kan flyve som studieretningsprojekt" og andre supplerede med: "Ja, det har givet en bedre forståelse af, hvad gymnasiet kræver i matematik nu, og hvad matematik egentlig kan bruges til i tværfaglig sammenhæng, - og hvor man kan finde matematik andre steder. Og så lærer man at dykke lynhurtigt ned i noget og finde litteratur til et emne og sortere/behandle det osv." En deltager, der også læser filosofi: "Og det bliver konkretiseret hvor matematikken spiller en rolle!"

Kursets standardforventning til deltagerenes indsats har været, at de skulle formulere mindst syv projektoplæg. De fleste af disse måtte gerne laves i grupper på to, men hver studerende skulle udvikle mindst et alene. Dette kvantitative krav har givet stor travlhed (og har plaget deltagerne noget!). En sagde rent ud, at "det er lige i overkanten at sætte sig ind i 7 projekter og skaffe materialet til det. Det virker måske lidt ambitiøst. Og så tager det jo også op til 3 uger at skaffe alle materialerne, og projektet skal fremlægges efter en uge!" En anden sagde: "der blev ekstremt travlt til sidst, men til gengæld kom man jo ind i flere fag." De har generelt oplevet det som positivt at skulle beskæftige sig med flere fagkombinationer: "Ja, der er god mening i at få lov til at arbejde med projekter i forskellige fag. Det er jo mere realistisk".

Samarbejdet med gymnasielærerne var et godt islæt: "Det været rigtig godt de steder, hvor det har været muligt, at få lov til at arbejde sammen med gymnasielærerne. Så kommer man nogen vegne, og de har jo også styr på det andet fag". Og fra andre: "Ja, det ville have været svært uden dem at vide, hvad niveauet skal være, så det er meget vigtigt med et feedback hvor lærerne kommenterer på det. Ellers havde man jo bare lavet sine egne små projekter uden at vide, om det kunne bære. Men vi kunne godt have brugt lidt flere gymnasielærere og helst også fra flere forskellige fag. Man kunne også have inddraget studerende fra andre fakulteter. Det ville bestemt have hjulpet på at finde ud af, hvad der var interessant set fra begge fags side. Man ville have manglet feedback på niveauet - men det ville have været godt til at få mere originale ideer, og det kunne også være spændende med ikke matematikstuderende/matematiklærere". Og "ja, det er jo en god pointe, da det jo er de bindinger, der er i gymnasiet: Vi skal arbejde sammen med en lang række faglærere der ikke er matematiklærere, så lige præcis den slags input ville have været relevante" og Sofie supplerer: "Det ville også være meget mere realistisk, hvis de andre lærere ikke har matematik som fag. At flerfagligheden er en udfordring, er der ingen tvivl om. Som en af deltagerne udtrykte det "Det største problem har været at sætte sig ind i de andre fag. I den "virkelige verden" ville der jo være en anden lærer, men det er der ikke her." En anden sagde "Og så synes jeg også, at det har været et problem, at matematik i gymnasiet nu lægger så megen vægt på modellering og anvendelsesaspekter. Det gør det meget besværligt at finde plads til matematik-for-matematik-kens-skyld projekter".

Deltagerne har sommetider oplevet at de famler med fagligheden i det 'andet' fag: "Det vigtigste jeg har fundet ud af er, at man skal tænke sig meget godt om, før man søsætter et matematik-historie projekt. Det ender

meget let med en problemstilling, som den ene af faglærerne ikke bryder sig om". Også samfunds-fag var genstand for en del opmærksomhed fra deltagerenes side, men deres interesse og ambitionsniveau havde ikke helt let ved at blive tilfredsstillet. Som en medstuderende sagde det: "Det ville være rigtig godt med oplæg fra fx samfundsvidenskab eller historie om, hvad der ligger i gymnasiet i de fag! Vi sidder jo nærmest og gætter..."

Fra deltagerne er der således kommet en del forslag til ændringer i forløbets tilgang til projektproduktion. Blandt dem vil vi gerne nævne et som formodentlig også kan bruges i 'almindelige' kandidatkurser i matematik, hvor man jo af og til oplever at deltagerfremlæggelser i plenum kan give stærkt varierende udbytte. Man kunne fx dele folk op "i grupper og kommentere på hinandens ideer eller projektoplæg i stedet for at lave oplæg i plenum, og måske også gøre det tidligere i forløbet, så man hurtigere fik droppet de dårlige eller urealistiske oplæg." Her rører vi ved en didaktisk erfaring som ofte ikke udnyttes til sit fulde potentiale i universiternes matematikundervisning, nemlig det uformelle peer-review i mindre grupper: "Vi har selvfølgelig siddet og snakket, men har mere lavet oplæg til Per og Kjeld, og det giver altså ikke helt samme feedback som arbejdet i små grupper."

TværMats produktion bliver på ca. 50 projektoplæg. I boxen er et eksempel. Vi har i alle oplæggene bestræbt os på fleksibilitet, så oplæggene skal kunne håndtere flere elever på én gang (eleverne skal jo have individuelle opgaver) – og også gerne kunne bruges på et helt spektrum af ambitionsniveauer. Her er et udpluk af oplægsoverskrifter:

Uendelighed i verden (matematik og filosofi)

Hvad er et matematisk bevis? (matematik og filosofi)

Kroppen i fokus (matematik, biologi, idræt)

Jiuzhang Suanshu (kinesisk matematik)
(matematik og historie)

Synthesizers og Fourierrækker (matematik og musik)

Lineær algebra og geometrisk optik
(matematik og fysik)

Kvantitativ kemisk analyse og statistiske modeller
(matematik og kemi)

Satellitbaner og keglesnit
(matematik og fysik / astronomi)

Bayesiansk matematik og DNA-materiale i retssager
(matematik og biologi)

Reaktionskinetik og differentialligninger
(matematik og kemi)

Vandraketter (matematik og fysik)

Oscillerende kemiske reaktioner (matematik og kemi)

Alle oplæggene offentliggøres inden sommerferien på nettet, både på emu'en og på dna-portalen.

Se eksempel på oplæg næste side

Matematik (B – evt. A) og biologi (A)

Statistik i gennemførelsen af observationer af dyreadfærd

Af Lasse Arnsdorf Petersen og Kristian Priisholm

Projektets emne:

Projektet omhandler opstilling, gennemførelse og bearbejdning af et forsøg omhandlende et eller flere dyrs adfærd. Projektet er således meget åbent, men afspejler samtidig meget realistisk hvordan meget biologisk arbejde laves.

Observation af dyreadfærd er forholdsvis tidskrævende og projektet er derfor velegnet til gruppearbejde (evt. kan den efterfølgende skriveproces gøres individuel).

Faglige forudsætninger matematik:

Kendskab til teori og gerne erfaring med brug af statistiske tests.

Faglige forudsætninger biologi:

Gerne grundlæggende kendskab til dyreadfærd.

Faglige mål matematik:

Eleverne skal lære at selvstændigt planlægge og udføre dataindsamling med specifikke statistiske tests for øje.

Eleverne skal lære at vælge mellem forskellige tests og teste for signifikans i en udvalgt model.

Eleverne skal lære at fortolke resultater af statistiske tests og forhold sig kritisk til egne undersøgelser og resultater.

Faglige mål biologi:

Eleverne skal stifte bekendtskab med grundlæggende dyreadfærd, særligt om en specifikt udvalgt art.

Eleverne skal lære at planlægge indsamling af data om dyreadfærd og analysere dette med statistiske redskaber.

Nærmere beskrivelse biologisk del:

Eleverne skal vælge et afgrænset emne indenfor dyreadfærd, som de hver især gerne vil arbejde med. Kravene til emnet er, at der realistisk kan gennemføres undersøgelser/eksperimenter, der kan resultere i et større datasæt. Zoologisk Have tilbyder at hjælpe med sådanne projekter.

Det konkrete biologiske indhold bestemmer så, hvad eleven skal gå i dybden med fagligt. Til demonstration i dette projekt er valgt chimpanser, da det er et socialt dyr med højt aktivitetsniveau, og som derfor skulle give mulighed for mange observationer.

Ud over kernepensum:

Dyreadfærd vil kun være berørt overfladisk og eventuelt slet ikke i biologi.

At gå i dybden med et fagligt emne og skulle opstille relevante forsøg/undersøgelser og skulle behandle resultaterne af disse, går bestemt ud over pensum i A-niveau biologi.

Nærmere beskrivelse matematisk del:

Matematik i dette projekt er i form af statistik. Eleven skal behandle de statistiske modeller/værktøjer, der er

relevante for behandling af de biologiske problemstillinger. Her indgår forsøgsdesign med overvejelse af hvilke typer data der kan forventes og hvilke statistiske metoder/tests det kan bruges. Hvis der anvendes statistiske modeller/fordelinger skal disses baggrund i sandsynlighedsregning inddrages (evt. inkl. beviser).

Særligt skal der i opgaven lægges vægt på de formelle trin i forsøgsdesign:

- Opstilling af forsøg inkl. statistisk model, statistiske tests og hypoteser
- Gennemførelse af undersøgelser/forsøg.
- Gennemførelse af statistiske tests.
- Konklusioner – bekræftelse/forkastning af hypoteser.

Ud over kernepensum: De biologiske undersøgelser bør lægge op til brug af statistiske tests, som eleven ikke har gennemgået i undervisningen. Særligt skal eleven tage stilling til valg af stærkest mulig statistisk test ud fra typer af data.

Hvis eleven bruger mere simple statistiske tests bør den faglige vægt ligge på disses forankring i matematisk teori og eventuelle oplagte bevis/er indenfor sandsynligheds- eller den statistiske model, der inddrages.

Nærmere om observationer:

Nogle typer observationer af adfærd vil være oplagte (her særligt med henblik på at høste forskellige typer data, alle data vil være diskrete):

Scanningsanalyser – registrering af hvad dyrene laver i givne tidsrum. Giver indtryk af almen tidsforbrug (sove, spise, social adfærd osv.). Data vil så være på nominalskala. Man kunne også lave scanning af aktivitetsniveau (fx passiv, lidt aktiv, meget aktiv) for at få data i sammenlignelige kategorier (ordinalskala).

Frekvensanalyser – hvor tit udfører dyrene specifikke typer adfærd? (fx skriger, parrer sig, laver imponerløb, altså fokus på kortere, mere specifikke adfærdselementer). Dette vil give data på nominalskala.

Sekvensanalyse – registrering af rækkefølgen af forskellige typer adfærd (typisk social adfærd). Sammenligningen af rækkefølger af adfærd vil give data på

Muligheder for statistiske tests:

- Data kan sammenlignes med underliggende forventet fordeling, fx tilfældig fordeling.
- Data fra forskellige data kan sammenlignes for at se, om dyrene opfører sig forskelligt fra dag til dag eller på forskellige tider på dagen (2- eller k-sample case).
- Der kan laves tests for forskelle på han- og hunchimpanseers adfærd (test for korrelation).
- Zoologisk Have ligger inde med data for de enkelte dyr (vægt, højde osv.). Dette kan bruges til statistisk test for, om Zoos dyr adskiller sig fra andre populationer taget fra litteraturen eller fra en teoretisk midelværdi (data på ratioskala).

Der er således mange muligheder for forskellige statistiske tests. Det vil også være oplagt at få datamateriale fra tidligere undersøgelser – fx via Zoos videnskabelige personale (se under litteratur).

Variationsmuligheder:

- Der kan vælges forskellige dyrearter.
- Der kan lægges vægt på indsamling af forskellige typer data.

- Der kan lægges op til brug af forskellige typer statistiske tests (selv om eleven i sidste ende selv skal vælge test på baggrund af de indsamlede data, kan læreren jo godt være med til at diskutere mulighederne).
- De principielt samme matematiske og forsøgsmæssige overvejelser kan bruges, selv om det biologiske emne udskiftes. Det eneste krav fra den matematiske side er, at der kan indsamles systematiske data i et rimeligt omfang og disse kan gøres til genstand for statistiske tests.
- Det er muligt at opgradere projektet til et matematik A-niveau ved at lave en meget grundigere gennemgang af den statistiske del med overvejelser over hvilke modeller og tests der ikke er mulige at anvende

Links:

Kontaktpersoner i Zoologisk Have:

Mikkel Stelvig mst@zoo.dk 72 200 225

Mikkel Bro mib@zoo.dk 72 200 243

Noter fra 1. års matematik om statistik og sandsynlighedsregning (per den 14/2 2007):

<http://www.mat1.dk/Statistik.pdf>

"Forelæsnings noter til Biostatistik" af Gösta Nachman (per den 14/2 2007):

http://www.bi.ku.dk/coursedocs/mat_stat/public/Statistik%20kompendium.pdf

Zoologisk Haves hjemmeside (den del omhandler gymnasium projekter med observation):

http://www.zoo.dk/cms/showpage.asp?nodeid=039-10_klasse_og_gymnasie_HF

Litteraturliste:

Basal Biostatistik. I. Skovgaard, H. Stryhn & M. Rudemo, forlaget Biofolia.

Lademanns Dyreleksikon, Lademanns forlag.

Dyrs Adfærd (1977). G. Møller, forlaget Kaskelot.

Bogen om Dyrepsykologi, Politikens Forlag.

Faktaark om dyreadfærd, udleveres gratis i Zoo.

Ark om observationsmetodik, udleveres gratis i Zoo.

Alverdens Fauna, Editio.

Specifikt om chimpanser:

Menneskeaber (1991). A. & C. R. Schmidt, forlaget Skarv.

Primaternes verden (1982). N. Bolwig, forlaget Gad.

Practical statistics for field biology. J. Fowler & L. Cohen. John Wiley & sons.

Statistik og sandsynlighedslære med biologiske anvendelser (del 1 & 2) (1979). M. Rudemo. Forlaget DSR.

Statistik og sandsynlighed anvendt i medicin (1973). A. Nielsen, J. Hilden & K. Fenger. Forlaget FADL.

Litteratur til et A-niveau i matematik:

Matematisk statistisk i grundtræk, Bernhard Andersen og Erling B. Andersen, Gyldendal

Sandsynlighedsregning og statistik, Flemming Clausen, Poul Printz og Gert Schomacker, Munksgaard

Matematik 3, Kristensen og Rindung

CAS og skriftlighed



Af: Bodil Bruun

email: bodil.bruun@skolekom.dk

Læreplanen i matematik er opbygget omkring en kompetencetænkning baseret på de 8 ligeværdige matematiske kompetencer beskrevet af professor Mogens Niss m.fl. i "KOM-rapporten"¹. En af disse kompetencer omhandler specifikt brugen af hjælpemidler. Det drejer sig fx om at kunne håndtere brugen af lommeregnerne og computerprogrammer i forbindelse med matematiklæring. Som en konsekvens af mange års vellykket forsøgsvirksomhed med netop disse typer af hjælpemidler har man så i den nye læreplan valgt at indføre krav om brug af avancerede matematikprogrammer eller lommeregnerne, der kan udføre algebraisk symbolmanipulation, og opgaverne til den skriftlige eksamen stilles nu under forudsætning af, at eleverne råder over et CAS-værktøj². Dvs netop det, at kunne håndtere et teknisk hjælpemiddel hensigtsmæssigt, er en del af de forventninger, man kan have til en elev ved afsluttende eksamen i matematik i gymnasiet.

Indførelse af CAS over en årrække

Erfaringerne fra forsøgene med CAS var blandt andet, at det viste sig nødvendigt bevidst at arbejde med at styrke elevernes elementære færdigheder uden hjælpemidler parallelt med brugen af CAS, og man valgte derfor at ændre fagbilagene og indføre todelte prøveformer (en kortere prøve uden hjælpemidler og en længere prøve med alle hjælpemidler). Dette er også grunden til, at man har valgt at fastholde denne todelte prøve efter reformen

Forsøgene viste, at CAS skal introduceres meget tidligt i forløbet og CAS skal indgå som en fuldt integreret del af den daglige undervisning, for at CAS kan styrke elevernes begrebsindlæring. Desuden har forsøgene vist, at CAS kan styrke den induktive tilgang matematik, idet eleverne med CAS lettere kan prøve sig frem og eksperimentere med nye problemstillinger; også i mere selvstændige projektarbejder med anvendt matematik. Alle forsøg peger også på, at en nødvendig forudsætning for succesfuld implementering af CAS er, at lærerne er godt inde i værktøjets tekniske muligheder ("superbrugere") og er i stand til at kunne agere ressourceperson for klassen og coach for den enkelte elev.

Gennem årene har forsøgene også vist en tendens til at det skriftlige arbejde styrkes, idet de hold, der går til eksamen med et computerbaseret CAS, nu stort set er i stand til at levere den dokumentation, der er brug for, mens det dog stadig kniber for de elever, der sidder med en CAS-lommeregner. Dette har resulteret i en præcise-

ring af kravene til en besvarelse (bl.a. vedrørende dokumentation af elevens brug af CAS) i de nye undervisningsvejledninger (fx Undervisningsvejledning for stx-A, august 2006). I et særligt afsnit "Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt", som også vil være vedlagt de skriftlige eksamensopgavesæt fra sommeren 2007, står der:

"I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation ved et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer
- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation."

Man lader CAS komme til sin ret med de faciliteter, det måtte have, men samtidigt sættes fokus på at belønne de elever, hvis begrebstilegnelse og dermed generelle matematiske kompetencer er bedst udviklede, idet der udover kravene til dokumentationen er blevet indført point for heldhedsbedømmelsen, således at en besvarelse, der er præget af større matematisk modenhed, samlet set vurderes højere.

CAS og undervisningstilrettelæggelse

Parallelt med de gennemførte forsøg arbejdede følgegrupper og forskere med den fagdidaktiske udfordring, der lå – og stadig ligger – i at indføre disse mere og mere avancerede værktøjer i matematikundervisningen. Ved anvendelse af it generelt kompliceres den didaktiske situation og bliver mere krævende for læreren, og undervisningens tilrettelæggelse bør tænkes anderledes, idet kommunikation og refleksion i forbindelse med brugen af CAS er helt afgørende for læringsudbyttet. Det undervisningsmæssige fokus flyttes fra indlæring af regnetekniske rutiner til begrebsindlæring, men samtidig vil en væsentlig del af undervisningstiden skulle bruges til, at eleverne kan tilegne sig de nødvendige tekniske færdigheder parallelt med behandlingen af de matematiske begreber.

CAS og it generelt giver mange mulige indgange til og perspektiver på det faglige indhold, hvilket medfører en øget kompleksitet ikke kun i undervisningssituationen, men også i den enkelte elevs læringssituation og videnskonstruktion. Derfor er det af afgørende betydning, at læreren forsøger at reducere denne kompleksitet, dvs der stilles krav til læreren om en klar refleksion i henhold

til hvordan værktøjerne anvendes. Fx er det vigtigt, at læreren anvender CAS i sin faglige formidling af matematisk teori, og at der heri indlægges elevaktiverende sekvenser, hvor det eksperimenterende aspekt er i fokus. Det kan være tilrettelagt som en klassesdiskussion eller som parvise øvelser med CAS, hvor der lægges vægt på elevernes indbyrdes kommunikation og forståelsesafprøvning i henhold til de iagttagede matematiske sammenhænge. Den lettilgængelige kombination af algebraiske beregninger og visualisering i form af grafiske billeder kan fx give eleverne bedre mulighed for at fastholde fokus på det matematiske tema, der er i spil, fordi de ikke skal slås med fokusforskydende elementære beregninger, der meget let optager hele deres opmærksomhed, så de glemmer, hvad de egentlig var i gang med.

Med tiden bliver CAS en fuldt integreret del af elevernes matematikvirkelighed, så de meget let af sig selv griber til at undersøge en problemstilling og eksperimentere sig frem til forskellige begrebers karakteristika ved hjælp af CAS. Igen er lærerens rolle vigtig, fordi eleverne skal lære at bruge deres sunde fornuft og forholde sig kritisk til de resultater de frembringer med CAS. De skal opnå viden om, hvornår det er hensigtsmæssigt at bringe CAS i spil, og de skal vide at CAS kan noget, men ikke det hele. Men når det er sagt, så skal de vænnes til at "gå på opdagelse", når de stilles overfor en ukendt problemstilling, og her kan CAS måske hjælpe til, at flere elever tør kaste sig ud i denne proces. Lærerrollen vil derfor i højere grad end nu skulle skifte mellem det at være formidler, igangsætter og coach.

Alle forsøg viser også, at der kræves en vis begrebsforståelse for at kunne arbejde hensigtsmæssigt med CAS, og det er derfor også nødvendigt at bruge tid på simpel opgaveregning, hvor elevernes basale færdigheder trænes, således at eleverne gennem forløbet opbygger en vis ressource af paratviden, som umiddelbart kan bringes i spil i en læringssituation med mere komplekse problemstillinger.

Den nye skriftlighed med CAS

Som nævnt er CAS-værktøjet meget mere end et regneteknisk hjælpemiddel, som tages frem i forbindelse med problemløsning og til den ugentlige "blækregning", men det er i besvarelsen af de skriftlige opgaver elevernes evne til selvstændigt at håndtere CAS kan understøttes, og det er her de udvikler deres rutine i brugen af CAS. Det er skolerne selv, der beslutter hvilket værktøj eleverne skal lære at bruge, men typisk vælger man en håndholdt løsning, dvs en CAS-lommeregner³, suppleret med en computersoftware (på skolen og hjemme)⁴, fordi det endnu ikke er almindeligt, at eleverne selv medbringer en bærbar pc. Priserne på bærbare computere er dog nu nede på et niveau, hvor flere og flere elever kan være med, men en lille rundspørge blandt kolleger og elever tyder dog på, at eleverne under alle omstændigheder vil foretrække at have en håndholdt løsning ved siden af, som man kan have med sig overalt. Det ideelle for denne gruppe ville være at den håndholdte løsning og computersoftware var fuldt ud kompatibel, hvilket efter alt at dømme også er den vej udviklingen går med de nye produkter, der kommer på markedet.

Opgaverne til den skriftlige eksamen udarbejdes na-



turligvis uafhængigt af, hvilket konkret CAS-værktøj den enkelte elev har til rådighed, og praksis er, at skolen/lærerne vælger et (eller flere) CAS-værktøjer, som de er ansvarlige for, at eleverne får indgående kendskab til, forstået på den måde at eleverne gennem undervisningen skal nå frem til at kunne beherske forskellige løsningsstrategier over for givne problemer med det værktøj, de er i besiddelse af. Dvs de skal være i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode samt at kunne finde andre veje frem, hvis en given løsningsstrategi slår fejl. Desuden er eleverne i højere grad ansvarlige for at aflevere et rigtigt resultat pga de mange løsningsstrategier og muligheder for at tjekke resultater et CAS-værktøj giver.

Der er i højere grad nu end tidligere krav om at arbejde med forskellige skriftlige genrer i alle fag i gymnasiet, og derfor skal sammensætningen af elevernes skriftlige arbejder tages op til overvejelse i de enkelte fag. De skriftlige arbejder skal sammenlagt understøtte både begrebsindlæring, opgaveløsning med og uden hjælpemidler samt elevernes evne til at formidle matematik, og samtidig skal opgaverne variere i omfang. Med de sædvanlige afleveringsopgavesæt og skriftlige tests trænes eleverne til den skriftlige eksamen. Gennem dette skriftlige arbejde får eleverne selv indblik i deres eget standpunkt inden for et givet emne, og læreren får hjælp til at kunne identificere delemner, hvori eleverne har brug for mere træning (herunder brugen af CAS). Ved projektarbejder er produktkravet typisk en rapport, hvor eleverne kan redegøre for både teori og problemløsning, og vise deres evne til at formidle matematisk stof. I projektarbejdssammenhæng er computerbaseret CAS at foretrække, idet man her kan skrive både tekst og udføre beregninger samt visualiseringer i samme værktøj. Med reformen er der således sat fokus på flere forskellige skriftlige udtryksformer i det enkelte fag. Samtidigt er den samlede mængde skriftligt arbejde imidlertid sat ned, hvilket kan betyde, at den enkelte elev i forhold til tidligere ikke opnår den samme rutine i sædvanlig opgaveregning. Reformen trækker derfor i flere retninger, og på nogle felter kan det resultere i et ringere matematisk udgangsniveau hos eleverne end før reformen.

Den gode besvarelse

En god besvarelse af et eksamenssæt er naturligvis præget af god dokumentation i overensstemmelse med undervisningsvejledningens bedømmelseskriterier. Disse kriterier skal være eleverne bekendt hele gymnasieforløbet igennem, og bør være en naturlig referenceramme ved behandling af alle former for skriftlige afleveringer og prøver i den daglige undervisning. En god måde at bevidstgøre eleverne om disse krav er, at lade dem rette hinandens besvarelser på baggrund af lærerens fulde besvarelse og foruddefinerede pointtildeling, hvor der også er reserveret point til helhedsbedømmelsen. Man kan fx lade eleverne parvist rette og kommentere to andres besvarelser (gerne anonyme), og bede dem argumentere for deres pointtildeling og karakterfastsættelse. Den reflektive kommunikation, der finder sted i denne situation, er af stor betydning, fordi de ikke kun forholder sig reflektivt til den foreliggende besvarelse, men samtidigt forholder sig metareflektivt til deres egen be-

svarelse. Da der med reformen er skåret kraftigt i lærerens tid til at rette elevernes skriftlige arbejder, kan den beskrevne didaktiske situation være med til at udvikle elevernes skriftlige rutiner på trods af lærerens manglende tid til at rette den enkelte elevs arbejde.

Som forsøgene har vist, så er elever med computerbaseret CAS noget bedre stillet til den skriftlige eksamen end elever med håndholdt CAS, fordi dokumentationen følger med som en naturlig del af den tankerække eleven gennemgår ved løsning af de forskellige opgavetyper. Illustrationer, tabeller, geometriske figurer etc; det hele er lige ved hånden, og det er ikke forbundet med ekstraarbejde at vedlægge disse; tværtimod er det en naturlig måde at redegøre for sin metode på. Det er sværere at håndtere med CAS-lommeregner, og diskussionen om hvor meget dokumentation eleverne bør have med, vil sikkert fortsætte så længe håndholdt CAS anvendes, men et godt bud er, at der skal være lige så meget dokumentation, som man ville se i en computersoftware løsning. I dag vælger man at stole på, at CAS-værktøjet finder alle løsninger til en ligning, så eleverne skal i almindelighed ikke argumentere for antallet af løsninger til en ligning. Der vil dog være opgaver, hvor der konkret anmodes om argumenter for at bestemte ligninger har f.eks. 3 løsninger. Og det vil naturligvis tælle med i helhedsbedømmelsen, hvis de forholder sig kritisk til de resultater CAS-værktøjet finder, uanset om det er brugt CAS i håndholdt eller software form.

Fremtidens skriftlighed og CAS

Inden for kort tid må man forvente at Undervisningsministeriet begynder at udsende opgaverne elektronisk til skolerne, således at der på sigt er mulighed for større interaktivitet mellem eleven og eksamensmaterialet. Foreløbig har det været muligt at lægge en scannet pdf-udgave af eksamensopgaverne på skolernes netværk, således at eleverne har kunnet klippe figurer m.v. ud af opgaveteksten, men man kunne forestille sig, at et evt. datamateriale ville foreligge i en form, der direkte kan hentes ind i det CAS-værktøj, eleven arbejder med. På det tidspunkt, hvor det viser sig, at alle elever kommer med deres computer under armen til skriftlig eksamen, vil tiden i hvert fald være moden til at overveje ændringer i den nuværende skriftlige eksamensform.

Noter

- ¹ For en nærmere beskrivelse af disse kompetencer se Niss, Mogens (red) — "Kompetencer og matematiklæring - Idéer og inspiration til udvikling af fremtidens matematikundervisning i Danmark" (KOM-rapporten), Undervisningsministeriet 2002 på <http://pub.uvm.dk/2002/kom/>.
- ² CAS er en forkortelse for ComputerAlgebraSystem
- ³ Typisk modeller fra Texas Instruments eller Casio.
- ⁴ De typiske computerløsninger er TI-interactive!, MathCad og Derive.



Workshops om Studieretningsprojekter

Af: Martin P. Bendsøe,
email: M.P.Bendsoe@mat.dtu.dk

Danmarks Tekniske Universitet afholder i marts og april tre workshops, hvor DTU lærere i et samarbejde med lærere fra gymnasiet arbejder med en række konkrete projektmuligheder til brug for den almene gymnasieskoles flerfaglige studieretningsprojekt i 3g. Initiativet er et led i universiteternes forskellige aktiviteter, der er iværksat efter en række møder, som er afholdt med fagkonsulenterne og de faglige foreninger. Arbejdet på DTU er en koordineret indsats mellem en række institutter og undervisningsdekanerne.

Koncept

Ideen med DTUs workshops er, at der i løbet af arrangementets 7 timer konkret udarbejdes ideer og koncepter for et antal studieretningsprojektforløb. Det vil sige, at fokus er det konkrete arbejde i grupper, der omfatter DTU-lærere fra flere institutter og gymnasielærere med flere forskellige fagkombinationer. Slutproduktet er hvad vi kalder projektmapper. En workshop fra 13.00 til 20.00 har bestået af

- DTU ansatte fremlægger ideer (plenum, 1,5 timer)
- Arbejdsgrupper formes
- Der udarbejdes projektmapper (gruppearbejde) (3 timer)
- Der spises let middag
- Status fremlægges (1,5 timer)

Ved projektmapper forstås en samling af baggrundsmateriale med en kort faglig beskrivelse (oversigt) sammen med en række projektforslag, der er beskrevet forholdsvis kort, og som indeholder skitser til mulige projektforløb på forskellige niveauer (med henvisninger til baggrundsmateriale). Materialet vil typisk skulle efterarbejdes af den enkelte gymnasielærer og afpasses efter den enkelte elev. Konkret består en projektmappe således af:

- En kort beskrivelse af ide (koncept)
- Eksempler på opgavebeskrivelser
- Skitser til projektforløb
- Litteraturhenvisninger (inkl. web)

Projekter

Vi har ved planlægningen af de tre workshops lagt vægt på, at få en bred vifte af forskningsrelevante natur- og teknisk-videnskabelige emner behandlet. Fokus har ikke været på matematikken, men alle projektforslag indeholder variationer, der omfatter matematik, enten på A eller B niveau. Et kernepunkt i arbejdet i grupperne har netop været variationer – et koncept, der tager udgangspunkt i en biologi-kemi kombination kan typisk varieres, således at spektret biologi-fysik, kemi-fysik, kemi-

matematik, matematik-biologi (og så videre) kan dækkes (i diverse kombinationer af A og B niveau). Hertil kommer muligheder for at kombinere med historie og samfundsfag. Dette betyder, at det samme faglige udgangspunkt kan benyttes til at skabe en hel række individuelle opgaver til eleverne i en klasse (på en skole). De projekter, som foreløbigt er behandlet er (med indikation af muligt matematikindhold¹):

- Mikro-fluid systemer (ODE, datafitting)
- Biologisk produktion af stoffer med bakterier og svampe (ODE, dataanalyse)
- Integraler i fysik, kemi, biologi (!)
- Svingninger i molekyler (ODEs)
- Stoffers miljøpåvirkning inkl. målemetoder (dataanalyse)
- Rutchebane (geometri, ODE)
- Arsen i grundvand (ODEs, dataanalyse, datafitting)
- NO_x, miljø, katalyse (ODEs, datafitting)
- Livet er fedt (om Omega-3) (dataanalyse)
- Bioinformatik - sekvensanalyse (dataanalyse)
- Billedgenerering, ray-tracing (geometri, ligninger)

I mange af disse projektideer har et centralt aspekt været at afdække muligheden for forsøg (afviklet på de enkelte skoler, eller eventuelt i mindre skala på DTU), samt muligheden for at DTU kan levere forsøgsdata og eventuelt stoffer og andet materiale til forsøg. Eksempelvis kan mikro-fluid projektet understøttes af et "forsøgs-kit" fra DTU, og DTU kan også levere svampe til projektet om biologisk produktion.

Erfaringer

Vores erfaringer fra de to første workshops er, at den basale struktur af workshoppene giver en produktiv (og ganske fornøjelig) dag, og at alle deltagere får megen brugbar information med hjem. Gymnasielærerne ser nye muligheder, og flere har udtrykt, at opgaven med studieretningsprojekterne ser mindre uoverskuelig ud nu, da de har en række gode ideer med hjem. Som en vigtig sidegevinst får DTUs lærere også en god indsigt i status for gymnasieskolen, om faglig og pædagogisk linie og ikke mindst om fysiske og regelmæssige bindninger. Programmet er dog for stramt til, at en del af projekterne kan gøres "grydeklare" på de timer, der er afsat til aktiviteten, og flere af projekterne skal færdigbehandles i en efterfølgende proces, som vil blive et samarbejde mellem de enkelte gruppemedlemmer².

Arbejdet med nogle af projekterne har været noget vanskeliggjort af (det ret detaljerede) regelsæt for studie-

forts. side 16



Ny statistik efter reformen

‘Tal taler aldrig for sig selv. Tværtimod. En undersøgelse siger først noget, når tallene er analyseret, og konklusionen afhænger i høj grad af, hvordan det bliver gjort.’

Inge Henningsen, AMS, Københavns Universitet

Gymnasireformen har medført en stærkere fokus på samspillet mellem fagene, så efter reformen er matematik blevet en naturlig og væsentlig medspiller i mange former for tværfagligt samarbejde. Her kommer matematiske modeller i alle afskygninger til at stå centralt: Ved at indføre variable i en problemstilling åbnes der for matematiske metoder til at undersøge sammenhænge mellem variablene med udgangspunkt i tabeller, grafer og ligninger. I den forbindelse spiller statistiske modeller med stokastiske variable, som undersøges med statistiske metoder og begreber, en afgørende rolle for samarbejdet med de naturvidenskabelige fag og ikke mindst med samfundsfag. Tilsvarende spiller statistiske begreber og metoder en afgørende rolle når man som elev skal forholde sig kritisk til andres undersøgelser, oplysninger og påstande. Som læreplanen udtrykker det skal eleverne kunne *‘anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog’*.

Statistik på C-niveau er fælles for alle i det almene gymnasium (stx) og skal dermed sikre eleverne det fundament, de alle kan bygge videre på i deres respektive studieretninger. Det har ført til en nytænkning af statistikken efter reformen, hvor vægten er lagt på hvilke centrale begreber og metoder, der – som undervisningsvejledningen formulerer det – kan føre til at *‘eleverne bedre bliver i stand til at forholde sig kritisk til en formidling af et givet statistisk materiale, samt at de kan stille spørgsmål til kvaliteten og håndteringen af statistiske undersøgelser’*. Hovedvægten er lagt på den *undersøgende statistik* i en moderne udformning (exploratory data analysis) med fokus på simple empiriske statistiske deskriptorer såsom *midtdeltal*, *median* og *kvartiler* og enkle grafiske afbildninger, såsom *boksplots* og *histogrammer*, der hjælper eleven med at danne sig et visuelt indtryk af datastrukturen – øjet er jo vores stærkeste mønstergenken. Tilsvarende skal de have kendskab til centrale begreber som *stikprøver* og *populationer*, og have indblik i hvad der skal forudsættes om udvælgelsen af en stikprøve, for at den kan siges at være repræsentativ for hele populationen; og man derfor kan uddrage troværdige skøn om hele populationens opførsel ud fra stikprøven. Der lægges altså vægt på at eleverne kan forholde sig kritisk til statistiske undersøgelser såsom opinionsundersøgelser, spørgeskemaundersøgelser osv. hvor data netop kun er ufuldstændige. Som noget nyt skal eleverne også kunne forholde sig til *tekster*

Af: Bjørn Felsager
email:
bjoern.felsager@haslev-gym.dk



med statistisk indhold, hvor de fx skal kunne identificere relevante uafhængige og afhængige variable, ligesom de skal kunne identificere stikprøver og populationer og diskutere forudsætningerne for tekstens konklusioner. Herunder skal de kunne gøre rede for, hvad der må forudsættes om stikprøven for at den er repræsentativ og om der fx kan tænkes at være mulige skjulte variable på spil, der kan give anledning til misvisende sammenhænge mellem modellens variable. Et eksempel på en sådan tekstopgave kan være den følgende hentet fra de vejledende eksamensopgaver (der sammen med læreplan og undervisningsvejledning er retningsgivende for undervisningen):

På en skole med 700 elever ønsker en af de politiske ungdomsorganisationer at få mulighed for at stille et bord op, hvor eleverne i spisefrikvarteret kan hente materialer og få information. Da skolens ledelse siger nej, opfordrer organisationen alle elever til at tilkendegive, om de er for eller imod dette.

127 afgav deres stemme og heraf støttede 92 forslaget. Organisationen omdeler derefter løbesedler, hvor de skriver: “Elevundersøgelse viser, at over 70% støtter de politiske organisationers ret til at uddele materialer på skolen”.

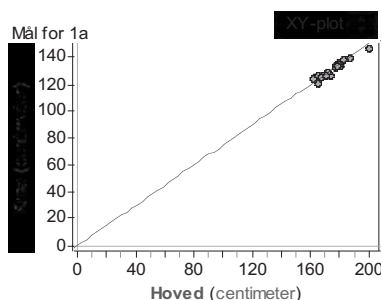
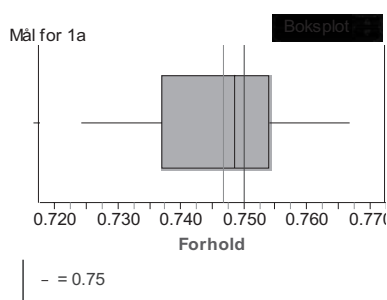
a) Kommenter denne påstand med brug af statistiske begreber som stikprøve, population, systematiske fejl og skjulte variable.

Det er en væsentlig del af arbejdet med statistik at eleverne selv indsamler og bearbejder statistiske data. Det kan være i form af simple spørgeskemaundersøgelser, men det kan også ske i form af simple eksperimenter. Som et typisk eksempel på hvordan elever på C-niveauet kan arbejde med indsamling og bearbejdning af data kan vi fx se på Leonardo da Vincis regler for de menneskelige proportioner, i følge hvilket idealmennesket har en bestemt form: Ideelle mennesker behøver selvfølgelig ikke have en bestemt størrelse, men ifølge da Vinci er de altså indbyrdes ligedannede, ligesom de på malerier og tegninger bør afbildes med bestemte karakteristiske forhold. Fx mente da Vinci, at højden for et knælende menneske bør være tre fjerdedele af højden. Man kan nu nemt undersøge om reglen passer for en klasse ved at lade klassen måle såvel hovedhøjden som den knælende højde. Derved fås en lang række sammenhørende data af de to variable, hovedhøjden og knæhøjden, hvor man kan beregne forholdet og se om det passer med reglen. Et boksplot for min egen klasse viser nu, at forholdene ikke lig-

ger helt symmetrisk, men at såvel medianen som midelværdien ligger pænt tæt på de forventede 0.75. Tilsvarende viser et punktdiagram med hovedhøjden som den uafhængige og knæhøjden som den afhængige variabel, at dataene ligger tæt samlet omkring en linje gennem (0,0) med hældningen 0.75. Dermed har vi altså gennemført en undersøgelse af data, der umiddelbart synes at stemme overens med hypotesen.

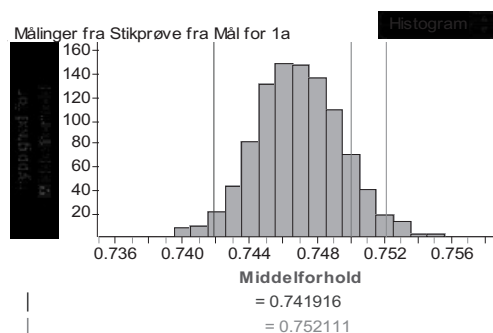
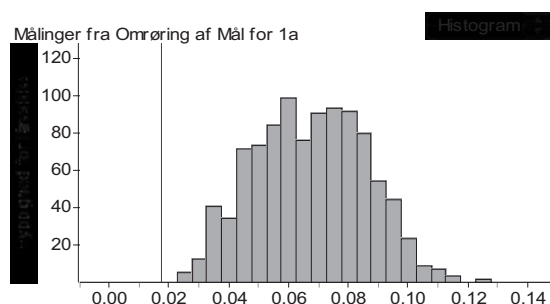
Mål for 1a

	Navn	Hoved	Knæ	Forhold
=				
1	Ceren	166 cm	124 cm	0.746988
2	Anna	163 cm	125 cm	0.766871
3	Anne	171 cm	126 cm	0.736842
4	Daniel	177 cm	133.5 cm	0.754237
5	David	180 cm	136 cm	0.755556
6	Hayal	177 cm	132 cm	0.745763



Men der er også mulighed for at inddrage metoder fra den *bekræftende statistik* (confirmatory data analysis) på C-niveauet, dvs. man kan give dem et første indtryk af de grundlæggende ideer bag hypotesetest og usikkerhedsskøn. Her kan man med fordel inddrage *eksperimentelle* statistiske metoder, der ikke tynget af en svært tilgængelig teori. Derved kan man nærme sig spørgsmål som: Hvor overbevisende er sammenhængen egentlig? Er klassens resultater virkeligt i overensstemmelse med Leonardo Da Vincis regel? Her kommer *omrøring af variable* og *tilfældige stikprøver* til at spille en central rolle, fordi de kan hjælpe med at vurdere, hvor nemt det er at frembringe de observerede tendenser på grundlag af rene tilfældigheder (nulhypotesen). Fx har vi i det ovenstående eksempel set at datapunkterne klumper sig sammen om den rette linje, og dermed at boksplottet for forholdene mellem knæhøjden og hovedhøjden er meget smalt. Kan det med rimelighed forklares som et resultat af tilfældigheder? Som et mål for boksplottets bredde kan man fx inddrage kvartilbredden for forholdene, som i vores tilfælde viser sig at være 0.0172653. Ved at omrøre i variabelen **knæ** (dvs. udføre en tilfældig permutation af varia-

blens værdier) kan man nu bryde enhver sammenhæng mellem variablene **knæ** og **hoved** (dvs. vi kan simulere stokastisk *uafhængighed* af de to variable). Måler vi kvartilbredden for forholdet mellem de omrørte variable kan vi undersøge fordelingen af forholdene, når knæ og højde varierer uafhængigt af hinanden. Vi ser da at selv om vi gentager omrøringen 1000 gange lykkes det os ikke en eneste gang at få en kvartilbredde, der er lige så lille. Vi konkluderer derfor at datapunkterne virkeligt ligger snævert klumpet sammen omkring en ret linje gennem (0,0), dvs. det underbygger hypotesens første del, ifølge hvilken sammenhængen mellem knæhøjde og hovedhøjde med god tilnærmelse kan beskrives ved en ligefrem proportionalitetsmodel.



Men er forholdet virkeligt æ? Dvs. kan afvigelsen mellem klassens median og Leonardo da Vincis regel forklares som et resultat af den uundgåelige usikkerhed, der præger stokastiske målinger? Det kan vi undersøge ved at *bootstrappe* datasættet, dvs. konstruere tilfældige stikprøver med tilbagelægninger med det samme antal som det oprindelige datasæt, dvs. antallet af elever i klassen (derved simulerer vi netop den naturlige variation i klassens målinger). Vi måler altså middeltallet for forholdet mellem knæhøjden og hovedhøjden og gentager målingen et passende antal gange (typisk 1000 gange). Som vist i den anden graf for oven, ligger den typiske variation mellem 0.742 og 0.752 (svarende til 2.5%- fraktilen og 97.5%-fraktilen, dvs. vi har fundet et skøn over konfidensintervallet på 95%-niveauet). Klassen synes altså på dette punkt at være rimeligt velproportioneret, idet Leonardo da Vincis regel ikke er i modstrid med klassens målinger.



Projekt- og emnearbejde i gymnasieskolen efter reformen



Af: Lars Bo Kristensen
email: lk@egaa-gym.dk

Ikke nok med, at alle gymnasieelever nu skal have matematik, men efter reformen har projekt- og emnearbejdet ligeledes fået en central rolle i matematikundervisningen. På mange måder er det begge tiltag, der ændrer matematikfaget i gymnasieskolen. Denne artikel vil forsøge at vise hvorfor de to ting hænger godt sammen, og ligeledes illustrere hvorfor, og hvordan, projekt- og emnearbejdet i allerhøjeste grad kan lykkes efter reformen.

Hvad er det nye?

For helt konkret at finde ud af hvad det nye er, kan man betragte bekendtgørelsens fremstilling af matematikfaget. Her er projekt- og emnearbejdet ikke bare nævnt som det første under afsnittet "arbejdsformer", men inddrages ligeledes på A og B niveau som et af de steder, hvor matematik kan mødes med andre fag:

"En betydelig del af undervisningen tilrettelægges som projekt – eller emneforløb over forskellige dele af kernestoffet og det supplerende stof eller problemstillinger der er genstand for fagsamarbejde" (side 123, [1])

(Den første del af formuleringen er ens for både A, B og C niveau).

Udover det ovenstående findes der en central ændring i beskrivelsen af den mundtlige eksamen, hvor der nu er mulighed for at vælge den såkaldte "prøveform b":

"En mundtlig prøve på grundlag af rapporter udarbejdet i tilknytning til undervisningen."; "Prøven er todelt. Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af den udtrukne rapport og dennes faglige delmål suppleret med uddybende spørgsmål fra eksaminator" (side 124, 1)

På lignende vis er der ændringer i den skriftlige eksamensform, hvor de første eksempler på vejledende opgaver tydeligt har illustreret, at det nu ikke kun er den klassiske "stykkeregning", der er i fokus til eksamen.

Bindes dette sammen med viden om at det såkaldte kernestof er beskåret en del, springer det i øjnene, at der efter reformen nu er mulighed for at fastholde en rød tråd mellem eksamen og undervisningen – *hele tiden!* Før reformen var det ofte svært at motivere eleverne til at forstå, at den skriftlige dimension af et emneforløb var lige så central som den klassiske ugentlige aflevering. Ligesom det ikke lå i kortene, hvordan emneforløbet skulle bindes sammen med en eventuel mundtlig eksamen. Det er det i langt større omfang nu.

Hvorfor nu det?

En ting er, at rammerne nu er bedre – men man er jo selvfølgelig også nødt til at overveje, om det vitterligt er en god idé at give så meget plads til arbejdsformer, der ikke synes helt oplagte i det eksakte fag matematik. Det viser sig dog hurtigt, at idéen fungerer. Specielt på det laveste af matematikniveauerne, C-niveauet, er det er godt tiltag. Eleverne har her kun matematik i et år og faget kan være et "nødvendigt onde" for en del elever. Det tvinges man i allerhøjeste grad til at forholde sig til som lærer, ikke mindst i valg af arbejds- og undervisningsformer. Her er projekt- og emnearbejdet en god makker. Oprigtigt talt bevæger man sig nok kun på emnearbejdsplan på dette niveau, men i undertegnede verden er det en flydende grænse. Normalt, vil man kunne se elementer af begge dele i spil når bølgerne går højt – men man vil nok ofte forsøge sig med emneforløb, før man sætter projekter i gang: I det *emneorienterede arbejde* arbejdes med et snævert afgrænset emne, hvor eleverne skal tilegne sig konkret viden om et emne, der er givet af læreren. Disse forløb er korte og lærerstyrede. I et *projektorienteret arbejde* skal eleverne kunne vælge, anvende og kritisere metoder, kilder og teorier i forhold til en problemstilling – som de selv skal have stor indflydelse på at vælge. Forløbene bliver længere og lærerstyringen forsvinder. ([2], [3]).

På C-niveauet er tiden som sagt normalt ikke til, at man når meget længere end emnearbejdet, men enkelte tiltag kan forsøges. Eleverne får under alle omstændigheder, ud fra flere forskellige emnearbejder, et helt andet tilhørsforhold til matematikundervisningen, når det går op for dem, at matematikken faktisk er til diskussion, blot man argumenterer ordentligt og arbejder fagligt med sit emne. Fastholder man derudover, at arbejdsformen skal være individuel, kan man – i den bedste af alle verdner – få skabt en stor motivation for faget hos den enkelte elev.

På A- og B niveau (omfang hhv. to og tre år) er der både mere tid og langt flere muligheder. Normalt vil matematik på disse niveauer indgå som en del af studieretningen, der definerer elevens tre gymnasieår, og her giver det stor mening at arbejde projektorienteret. Eleverne kan her igennem få mulighed for at binde studieretningsfag sammen, men samtidigt selv arbejde dybere med matematiske emner inde i selve faget, så det ikke forbliver teori, beviser og tavleundervisning. Specielt er der rigtig gode muligheder for at sikre undervisningsdifferentiering, da man jo kan sætte forskellige faglige krav til forskellige elever, ligesom de over tid selv skal definere deres problemområder. Den selvstændige arbejdsform kan således komme i fokus.

De nævnte ting er, i parentes bemærket, alle tænkt vi-

dere i reformen under de nye større individuelle opgaver "Studieretningsopgave" (i 2.g) og "Studieretningsprojekt" (i 3.g), hvor den sidstnævnte "afløser" den snart heden-gangne 3.årsopgave. I begge opgaver er der krav til stor selvstændighed, hvor man i projektet endda selv skal definere sin problemstilling.

Hvordan gør vi så?

På Egå gymnasium har vi valgt forskellige måder at implementere emne- og projektarbejdet på, så det får den ønskede virkning. I grundforløbet i 1.g inddrages emnearbejdet for eksempel i alle klasser, som en introduktion til matematikkens anvendelse. Her forsøger vi at stille opgaver, der skal underbygges af forklaringer – og således bliver mere emnebaserede afleveringer end decideret opgaveregning. Som et eksempel kan nævnes forløbet "En bolds hoppehøjde", hvor eleverne arbejder med modelbegrebet og regression, og hvor de herigennem når frem til den rette linje, som (tilnærmelsesvis) beskrivelse for forholdet mellem slippe- og hoppehøjde for en bold. Undervejs sætter de blandt andet spørgsmålstegn ved modelbegrebet og variabelsammenhæng. Afleveringen danner ligeledes baggrund for deres (eventuelle) mundtlige eksamen i emnet, og deler man denne afleveringsfase op i flere dele, så man får en form for processkrivning i spil, så eleverne får en god ansvarsfølelse for både emnet og opgaven.

Et andet oplagt område er statistik, der ofte er svært at formidle til eleverne. Alt efter niveau kan man vælge omfanget, men man kan i alle tilfælde vælge at tage udgangspunkt i nærværende emner for eleverne. Da vi på Egå gymnasium eksempelvis har gennemført forskellige test i idrætsundervisningen, kan man inddrage disse målinger i statistikundervisningen. Eleverne arbejder her individuelt ved hjælp af IT med klassens egne testværdier, både beskrivende (diagrammer og empiriske størrelse) og analyserende (test af hypoteser). Desuden bliver de også bedt om at redegøre for de anvendte matematiske redskaber i deres afleveringer. Slutteligt kræves en diskussion og vurdering af deres fremkomne modeller og værdier – de skal "pille" i matematikken! Forløbet kan gøres mere projektorienteret, ved at give eleverne indflydelse på *hvilke* fysiske test der skal laves og hvilke hypoteser man gerne vil undersøge.

Det var blot et par eksempler, og er man lidt på herrens mark i forhold til i idéer er der heldigvis hjælp at hente: Mange af de nye lærebøger, der er skrevet til gymnasieskolen efter reformen har grebet bolden i luften og indeholder således mange bud på hvordan projekt- og emnearbejdet kan gennemføres i matematikfaget – på alle niveauer og på tværs af fagene. I flæng kan nævnes emner som det gyldne snit, optimering, opsparing og lån, genetik, kinematik, astronomi og ikke mindst anvendt statistik.

Kilder:

- [1] STX-bekendtgørelsen, 2. udgave, august 2006, UVM
- [2] Projektarbejde i gymnasiet, Christensen, Henriksen, mfl., Naturfagsforlaget, 2005
- [3] <http://www.emu.dk/gym/projektarbejde/index.html>

forts. fra side 12

retningsprojekterne. Her er det særligt retningslinierne:

"Opgaveformuleringen kan ikke direkte bygge på den del af fagenes stof, der allerede er indgået i den enkelte elevs undervisning. Der er dog intet til hinder for, at studieretningsprojektet udarbejdes i forlængelse af arbejdet i de indgående fag eller har forbindelse hermed."

"Opgaveformuleringen ... skal rumme såvel fagspecifikke som mere tværgående faglige krav i de indgående fag, og der skal være krav om fordybelse, der på væsentlige punkter ligger ud over arbejdet i de enkelte fag," som giver nogle fortolkningsvanskeligheder, og som til tider giver unødvendige begrænsninger for den flerfaglige kreativitet. En DTU ansat vil nok være tilbøjelig til at mene, at det perspektivrige projekt, der involverer flere fag, til fulde vil leve op til kravet om fagligt niveau, og den opgave, der ligger i at kombinere fagligheder på et nyt område, er helt tilstrækkelig for at udfordre selv de bedste elever. Måske har diskussionen i gymnasiekredse fokuseret for meget på ordene "... kan ikke direkte bygge på..." ?

Desværre har tilslutningen fra gymnasielærerne til aktiviteten været moderat. Vi har haft 15 henholdsvis 13 deltagere på de to første workshops (og samme antal DTU lærere), og annonceringen har det ikke skortet på. Der kunne sagtens have været 2 til 3 gange så mange deltagere, og det ville have lettet gruppearbejdet med flere flere "hænder" og ikke mindst flere faglige baggrunde. Den næste workshop i april ser ud til at blive mere velbesøgt, men vi ægrer os da over, at kapaciteten i aktiviteten til nu slet ikke er blevet udnyttet fuldt ud. Vi trøster os så med, at når projektmapperne gøres offentligt tilgængelige (på internettet) vil arbejdet blive spredt passende ud.

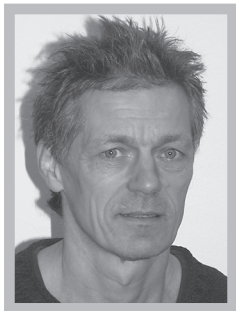
Efterskrift

Workshoppene ville ikke have været mulige uden økonomisk støtte fra Corrit-fonden samt en stor indsats fra en række af mine kollegaer fra institutter ved DTU: Bio-Centrum-DTU, Institut for Fysik, Informatik og Matematisk Modellering, Kemisk Institut, Institut for Kemi-teknik, Institut for Miljø & Ressourcer, Institut for Matematik og Institut for Mikro- og Nanoteknologi. Der skal også lyde stor ros til de gymnasielærere, der har deltaget – der er udvist stor entusiasme, og der er bi-draget med stor faglig indsigt.

Noter

- ¹ Dataanalyse: Statistik, least-squares; Datafitting: Bestemmelse af modeldata fra målinger; ODE: Differential- eller differensligning (parametervariationer, dimensionsløs form). ODEs: Systemer af differential- eller differensligninger.
- ² Dette arbejde støttes af en bevilling fra Corrit-fonden.





Af: Niels Grønbæk
email: gronbaek@math.ku.dk

og



Morten Overgård Nielsen
email: mo@kvuc.dk

Matematik på hf

– borgermatematik og studieforbereelse

Hf-reformen skærpede hf's profil som anvendelsesorienteret uddannelse. Det blev valgt at matematik C-niveau fortsat skulle være et obligatorisk fagniveau mens matematik B-niveau primært skulle være studieforbereende. Det obligatoriske C-niveau skal fremstå som et fagniveau de fleste kursister består hvis de aktivt gennemfører undervisningsforløbet.

C-niveauet

I læreplanen er formålet med hf matematik på C-niveau formuleret som:

... at kursisterne bliver i stand til at forstå, anvende og kommunikere om matematik i sammenhænge, der vedrører dagligliv, samfundsliv og naturforhold, og at de opnår tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en uddannelse, hvori matematik indgår på et grundlæggende niveau.

C-niveauets indhold er blevet betegnet *borgermatematik*, og læreplanen lægger op til at forløb i hf C-niveau tilrettelægges målrettet mod de kursister der er på pågældende hold. Den skriftlige eksamen er skåret ned til fra 4 til 3 timer. Selvom det er en overkommelig eksamen, kræver den opgavetræning forløbet igennem. Desuden lægger projekt- og emneforløb op til differentieret undervisning til at imødekomme den meget store faglige spredning der ofte er på hf-hold.

Læreplanen fokuserer på en vifte af kompetencer hvor fem centrale kompetencer her skal fremhæves:

Den ene kompetence er at træne kursisterne i at tænke logisk, i at kunne ræsonnere sig frem ud fra givne præmisser. I læreplanen står at det supplerende stof bl.a. omfatter "*ræsonnement og bevisførelse inden for udvalgte emner*". Det er lærerens opgave at udvælge passende eksempler til illustration af matematisk ræsonnementer og beviser.

Den anden er at træne kursisterne i at behandle grundlæggende matematiske anvendelser og dermed behandle matematiske modeller. I læreplanen står fx at kursisterne skal kunne "*håndtere simple modeller til beskrivelse af sammenhænge mellem variable og kunne diskutere rækkevidde af sådanne modeller*".

Træningen af dette finder primært sted via behandling af lineære modeller, eksponentielle modeller og potensmodeller, men også gennem behandling af modellerne bag statistiske deskriptorer.

Den tredje er at opøve og træne kursisterne i at anvende it og lommeregner. I læreplanen skrives: "*Undervisningen tilrettelægges, så lommeregneren/it indgår som væsentlige hjælpemidler i kursisternes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning. I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende lommeregner og it til at udføre beregninger, til håndtering af statistisk datamateriale og til at skaffe sig overblik over grafer.*"

Den fjerde kompetence er at træne kursisterne i at kunne formidle matematisk viden og kunnen. I læreplanen er der et krav om projekt- og emnearbejder: "*I forbindelse med hvert større projekt- eller emneforløb skal kursisterne udarbejde et skriftligt produkt, som kan dokumentere de faglige resultater... En række af projekt- og emneforløbene afrundes med, at kursisterne udarbejder en rapport.*" Det er en væsentlig del af C-niveauet at kursisterne trænes i at kunne videreformidle matematisk stof, og en evaluering af dette findes både i den mundtlige og den skriftlige eksamen.

Den femte kompetence er at kunne arbejde selvstændigt og anvende den viden der er formidlet i undervisningen, til at arbejde videre ud fra.

Derudover skal nævnes at matematik hf C ikke alene skal formidle matematisk viden og kunnen, matematik hf C skal også bidrage til optræning af studiekompetence. Matematik hf C er et almindende fag – både matematisk og studiemæssigt.

Den første eksamen i det nye C-niveau fandt sted i mai-juni 2006.

B-niveauet

B-niveauet på hf er valgfrit og retter sig mod matematik på videregående uddannelser. Indholdet er primært funktionsteori, differential- og integralregning, trigonometri og statistik.

Indholdet er således langt mere traditionelt matematisk orienteret end C-niveauet er, og det er fortsat en meget stor udfordring i den konkrete undervisning at løfte kursisternes matematiske niveau fra C- til B-niveau.

Den første eksamen i det nye B-niveau finder sted i maj-juni i år.

Vurdering af første skriftlige eksamenssæt for C-niveau

Der er både mundtlig og skriftlig eksamen på hf C-niveau. Den skriftlige eksamen er blevet justeret i forhold til tidligere idet den dækker færre emner end hf fællesfagseksamen, og så varer den 3 timer, dvs. en time mindre end fællesfagseksamen. Den skriftlige eksamen er styrende for undervisningen, og den afspejler hvordan indholdet i fagniveauet skal udmøntes.

Derfor beskrives eksamenssættet fra maj 2006 i det følgende. En mere detaljeret analyse findes i Undervisningsministeriets evalueringsrapport over den skriftlige eksamen på det nye hf C-niveau (se www.uvm.dk).

Modelhåndtering er sammen med håndtering af simple formler og ligninger den kompetence der optræder i flest opgaver - nemlig i 7 ud af 9 opgaver. De specifikke modelkompetencer som opgavesættet adresserer, kan groft deles i:

- genkendelse af modeltype
- angivelse/beregninger af modelparametre ud fra opgivne størrelser/data
- fortolkning af konkrete værdier af parametre
- prognoser
- vurdering af models gyldighed.

Disse kompetencer testes i større eller mindre grad inden for et antal modeltyper:

- simpel rentetilskrivning
- lineære modeller - både eksakt i form af sammenhæng mellem pris og forbrug, og som 1. approksimation til tidlige udviklinger
- eksponentiel model
- potensmodel
- modellerne bag de statistiske deskriptorer sumkurve og boksplot.

På hf C-niveau er det et grundlæggende krav at kursisten inden for kernestoffets spektrum af modeller er i stand til *at skelne de forskellige typer af modeller*. I praksis betyder det at kursisterne skal kunne foretage typekorrekte manipulationer med opgivne størrelser. De oplysninger som kursisterne kan bruge til modelklassifikationen, kan være sproglige markører, fx ordet *rente*, eller det kan være en eksplicit ligning mellem modellens parametre. I en enkelt opgave er modelgenkendelsen skærpet til at kursisten selv skal opstille den model der beskriver sammenhæng mellem forbrug af el og pris på el. Kursisten skal således selv finde frem til en lineær model ud fra en sproglig beskrivelse af hvilke afhængighedsforhold modellen skal beskrive.

Angivelse af eller beregning af modelparametre indgår naturligtvis i de fleste af modelopgaverne. Det drejer sig oftest om beregning af en afhængig parameter hvor den uafhængige parameters konkrete værdier er beskrevet sprogligt, fx "hvor mange elever var der i år 2004, når det oplyses at...?" Men det drejer sig også om aflæsninger på en graf.

I to opgaver skal kursisterne *fortolke* parametre. I den ene opgave skal kursisterne redegøre for betydningen af størrelser som ikke varierer i modellen: Hvad fortæller tallene 6410 og 1,06 om elevantallet? (i en konkret eksponentiel model $y = 6410 \cdot 1,06^x$). I en anden opgave om boksplot skal kursisterne sammenligne to boksplot.

I en enkelt opgave er der et spørgsmål om *prognose*: Hvad er antallet af ... hvis udviklingen fortsætter? Spørgsmålet skal besvares ud fra en lineær model som er opgivet ved to punkter på modellens linje. Kursisten skal ikke forholde sig til sin prognose.

Egentlig *modelvurdering* stilles der ikke krav om, men kursisterne bliver i en opgave bedt om at kommentere en given eksponentiel models konkrete værdi af en parameter sammenholdt med

den målte værdi. Dette indebærer at kursisterne forholder sig til spørgsmål såsom

- Skal en model være eksakt?
- Er 8092 tilnærmelsesvist 8112?
- Er 6,08 % en stor afvigelse fra modellens 6 %?
- Er en eksponentiel model rimelig?

Sættet kommer således godt omkring i en række specifikke kompetencer knyttet til matematiske og statistiske modeller (med en vis overvægt af den lineære model). Modellerne baseres på autentiske data. Når modeltypen først er fastlagt, er (kendskab til) den modellerede virkelighed dog uden betydning for opgavens løsning, men kan tjene som staffage, der kan hjælpe til at fastholde kursistens tankegang. Hf's anvendelsesprofil må siges at afspejle sig i opgavesættet.





Af: Specialestuderende Julian Tosev,
Institut for Naturfagernes Didaktik, Københavns Universitet
email: julian @ tosev.dk

Eksperimentel matematik i undervisningen

I den nye læreplan for matematik i gymnasiet introduceres, som noget nyt, at eleverne skal arbejde eksperimentelt med matematikken og dermed skal elevernes begrebsapparat og innovative evner udvikles. Eleverne skal selvstændigt blive i stand til at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler. Hvordan bliver eleverne i stand til at arbejde eksperimentelt, kan man spørge, og hvordan bør man som underviser tilrettelægge undervisningen, så eleverne bliver i stand til at formulere formodninger og udvikle innovative evner?

Når jeg læser lærerplanen, bider jeg mærke i, at underviserens rolle bliver ændret fra at være en person, der sidder med alle svarene, til en vejleder der er med til at navigere eleven rundt i et ukendt miljø. Når underviseren præcis kender den tilsigtede viden, så vil underviseren forsøge at skjule denne viden, som eleven dernæst skal finde gennem blandt andet opgaver. Hvis eleven selvstændigt skal kunne formulere formodninger, så bliver underviseren nødt til at træde et skridt tilbage og lade eleven arbejde selv. Dette forudsætter selvfølgelig, at eleven besidder viden, som der kan trækkes på, for at der overhovedet kan formuleres noget som helst. Dermed kan den eksperimentelle matematik ikke stå alene og mere traditionel undervisning, hvor underviseren gennemgår teori og eleven regner øvelser, er derfor stadig nødvendigt. Skovsmose [1] beskriver hvordan matematikopgaver i grove træk kan være: opgaver om ren matematik, halv-virkelige omstændigheder og virkelige omstændigheder. Derudover opdeler Skovsmose disse 3 kategorier i "paradigm of exercise" og "Landscape of investigation", hvor den første er klassiske opgaver og den anden er opgaver, hvor elever arbejder mere eksperimentelt. Skovsmoses pointe er ikke at den ene form for undervisning er bedre end den anden, men at man så vidt som muligt bør beskæftige sig med flere former end kun én, da dette vil styrke forståelsen af matematik og give et mere nuanceret billede af matematikken.

Eksperimentel matematik er altså kendetegnet ved, at eleven bliver sat i fokus og eleven er med til at skabe et miljø, hvor der kan tilegnes ny viden. Dette vil, til tider, føre eleven ud i områder, der er fuldstændige ukendte for både underviser og elev, men en af pointerne er, at underviseren ikke straks bør lede eleven tilbage på en vej,

der er mere tryk, men at både underviser og elev skal blive bedre til at navigere i ukendte områder.

Når man som underviser beslutter sig for at arbejde med eksperimentel matematik, så bør man vælge et problem, som har mange løsningsmodeller, og som kan beskrives ved hjælp af mange repræsentationer. Dermed bliver elevens handlemuligheder forøget og hver elev kan vælge den repræsentation, som han eller hun finder mest hensigtsmæssig. I denne sammenhæng er computeren et helt centralt redskab, hvor eleven hurtigt kan generere hundredvis af eksempler, som kan være med til at give et billede af en given situation, dette kunne fx være opførelsen af en graf, når der ændres på en variabel. Borwein [2] beskæftiger sig med eksperimentel matematik på forskerniveau, og her står computeren helt centralt, som redskab til at få indsigt, se sammenhænge, bekræfte og afvise formodninger, bevise mm. Ved at introducere computeren i matematik bliver eleven hurtigt i stand til at arbejde eksperimentelt, hvert input/output er et lille eksperiment, som eleven så kan forholde sig til. Det skal dog nævnes, at benyttelsen af computeren i undervisningen kan medføre nogle uheldige konsekvenser, som man som underviser bør være opmærksom på: Både elev og underviser bør have kendskab til programmet, ellers kan det være utrolig tidskrævende. Derudover skal man være opmærksom på, at computeren ikke blive et stykke legetøj, så eleven bruger mere tid på at fokusere på teknikken og selve software end på matematikken.

Det forventes i lærerplanen, at eleven selvstændigt fremstiller formodninger ud fra konkrete eksempler. Jeg er i øjeblikket i gang med at skrive mit speciale, som netop omhandler dette aspekt. Math en Jeans [3] (matematik i cowboybukser) er et fransk projekt, hvor elever beskæftiger sig med matematik i fritiden. Math en Jeans beskæftiger sig med matematiske opgaver, der kan beskrives ved hjælp af meget få sætninger (ofte blot en), desuden kan stort set alle mennesker forstå opgaverne, da opgaver ikke kræver stor matematisk viden for at forstå. Skønheden i Math en Jeans projekt er desuden, at disse små, simple opgaver ofte er uløste matematiske problemstillinger, som elever og undervisere i fællesskab forsøger at angribe ved at stille hypoteser og fremlægge beviser. Dermed kan fuldstændig den samme problemformulering

- lering benyttes på alle niveauer i uddannelsessystemet, fra folkeskole til universitet. Jeg har valgt 2 problemstillinger fra Math en Jeans [3], som jeg for tiden afprøver på 4 gymnasieskoler i københavnsområdet. Jeg har valgt 2 geometriske opgaver, hvor den første beskæftiger sig med cirkelskiver: "Hvordan placeres 1, 2, 3, 4, ... cirkelskiver, så de tilsammen dækker den største cirkelskive?" Dette problem er relevant for satellitters placering i forhold til jorden, når der skal dækkes områder, der er afhængig af GPS.

Det andet problem jeg har valgt er sofaproblemet: "En genstand skubbes hen ad gulvet i en korridor med bredde 1 og passerer et hjørne på 90 grader. Hvilken form har den genstand, der dækker det største gulvareal og som kan passere hjørnet?" Problemet kaldes for sofaproblemet, da man ofte beskriver problemet med en sofa i stedet for en genstand, som jeg gør. Eleverne bliver udstyret med et hypoteseark, som de skal benytte sig af, når de i grupper arbejder med problemet. Jeg ønsker at danne noget erfaring omkring den proces, hvor elever stiller hypoteser og den efterfølgende argumentation og bevisførelse for disse.

Ovenstående undervisning, hvor elever selv er herre over hvilken vej der følges, kan virke skræmmende og utryk for eleven, da eleven er overladt til sig selv og underviseren indtager en mere tilbagetrukket position. Hvis eleven altid har fået matematikundervisning, hvor underviseren gennemgår teori og dernæst stiller simple opgaver, så kan det være en stor omvæltning med et mere eksperimentelt forløb. Men nu hvor eksperimentel matematik er kommet ind i lærerplanen, så bliver underviseren nødt til at forholde sig til denne undervisningsform. Mogen Niss [4] skriver således: "Hvis vi ønsker at matema-

tikundervisningen skal indfange denne matematikkens essens, i det mindste i en rimelig grad, følger det mere eller mindre umiddelbart at matematik problemløsning må indtage en prominent position i matematikundervisningen".

Både eksperimentel matematik i den danske lærerplan og Math en Jeans projektet i Frankrig er gode initiativer, der er med til at mindske forskellen mellem videnskabsfaget matematik og undervisningsfaget matematik. Rent personligt synes jeg at disse forskerlignende situationer, hvor eleven tilnærmelsesvis arbejder ligesom forskeren, er helt unikke muligheder for at tilføre matematikundervisningen en ekstra dimension. Den bør regelmæssigt indgå i undervisningen sideløbende med mere traditionel matematikundervisning.

Referencer:

- [1] O. Skovsmose: Landscapes of Investigation, Center for Research in Learning Mathematics, National University of Education, publication no. 20, 2000.
- [2] J. M. Borwein: The experimental mathematician: The pleasure of discovery and the role of proof, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10: 75-108, 2005.
- [3] <http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm>
- [4] M. Niss: Opgavediskursen i matematikundervisningen, *Mona*, side 7 – 17, 2007 – 1.

forts. fra side 5

re opdagelser muligt. Dermed beskrives et af de store teknologiske/naturvidenskabelige brud.

I matematiktimerne skal eleverne planlægge en fiktiv navigation med brug af astronomiske navigationsinstrumenter (kopier af disse instrumenter kan lånes gennem www.geomat.dk), indsamle data vha. observationer, udføre bestikregning (trigonometriske beregninger) og opstille en matematisk model til beskrivelse af forhold på jordkloden – herunder elementær geometri og sejlads over små afstande. Desuden prøver de at læse og forstå tekster om matematik – her kildetekster om matematiske navigationsberegninger.

Et forløb om Galilei lægger op til en behandling af "Den Naturvidenskabelige Metode", som blev udviklet af bl.a. Galilei. Udviklingen i den naturvidenskabelige erkendelse i det 16. og 17. århundrede belyses bl.a. gennem Galileis faldrendeforsøg, Venusobservationerne og det frie fald. Der arbejdes desuden i forløbet med verdensbilleder fra både en naturvidenskabelig og humanistisk indgangsvinkel. Matematik, fysik, dansk og religion kan alle bidrage til dette. Det matematiske indhold vil være at

anvende simple geometriske modeller og håndtere simple geometriske problemstillinger, at lave regression på Excel i forbindelse med Galileis faldrendeforsøg. Desuden introduceres eleverne for funktioner/parabler/potenssammenhænge.

Et forløb om Logik og argumentation kan gennemføres sammen med faget dansk. Idéen er, at eleverne ved at arbejde med formel logik og argumentationsteori bliver i stand til at se den logiske struktur i de dagligsprogsargumenter, de møder i avisartikler mv. Forløbet vil dermed dels gøre eleverne til bedre tekstlæsere, dels give dem forståelse for det matematiske bevis som en særlig form for argumentation. Endelig vil projektet få eleverne til at se sammenhængen mellem den strengt logiske argumentation, de møder i matematiktimerne, og den argumentation, de i øvrigt møder i deres hverdag.

Hele rapporten med de 11 forløb kan ses på: <http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/at/at.html>



Eksperimentel matematik som arbejdsmetode

Af: Olav Lyndrup m.fl.
email: Olav.Lyndrup@skolekom.dk

I forbindelse med et udviklingsprojekt om eksperimentel matematik udkommer der dette forår 2007 en bog. Bogen består af to dele: Del 1 indkredser hvad eksperimentel matematik er og hvordan det kan praktiseres. Del 2 er række forløbsbeskrivelser, der indeholder eksperimentel matematik. Om nogle måneder vil materiale til forløbene ligge på EMU'en under <http://www.emu.dk/gym/fag/ma>.

Bogen og hjemmesiden er baseret på bidrag fra en række personer: Nynne Afzelius, Berndt Andersen, Peter Brander, Morten Birk Christensen, Flemming Clausen, Søren Eilers, Lisbeth Fajstrup, Nils Fruensgaard, Steen Markvorsen, Poul Hjorth, Jes Sixtus Jørgensen, Olav Lyndrup, Ib Michelsen, Dennis Pipenbring, HC. Thomsen, Christian Thune, Julian Tosev, Hans Vestergaard og J.P. Ward.

En redaktionsgruppe bestående af Nynne Afzelius, Morten Birk Christensen, Jes Sixtus Jørgensen, Olav Lyndrup, Ib Michelsen og Dennis Pipenbring har indsamlet og redigeret bidragene.

Matematiklærerforeningen har ved Nils Fruensgaard søgt Undervisningsministeriet om midler til udviklingsprojektet, og ansøgningen er imødekommet.

Set fra en række matematikere igennem tiden

Udgangspunktet er spørgsmålet "Har eksperimentel matematik afsæt i den professionelle matematikers arbejdsmetode og hvordan kan eksperimentel matematik beskrives som arbejdsmetode?"

I bogen "Mathematics and plausible reasoning" Volume 1 af G. Polya fra 1954 citerer G. Polya fra Eulers Opera Omnia, ser. 1, vol. 2, p. 459

"It will seem not a little paradoxical to ascribe a great importance to observations even in that part of mathematical sciences which is usually called Pure Mathematics, since the current opinion is observations are restricted to physical objects that make impression on the senses. As we must refer the numbers to the pure intellect alone, we can hardly understand how observations and quasi-experiments can be of use in investigating the nature of numbers ..."

Vi ser her, at Euler bla. bruger begrebet kvasi-eksperimenter i forbindelse med matematikerens arbejdsmetode, og det er åbenbart i modsætning til den daværende opfattelse af den rene matematik.

G. Polya skelner selv i forordet til bogen "Mathematics and plausible reasoning" Volume 1 mellem "demon-

strative reasoning" og "plausible reasoning", hvor "demonstrative reasoning" er det eller de argumenter som vi anvender, når vi opstiller beviser for matematiske sætninger. "Plausible reasoning" er det eller de argumenter, der støtter os, når vi eksperimenterer og opstiller formodninger. G. Polya anviste selv en metode til arbejdet med "plausible reasoning". Nemlig ved "I address myself to all interested students of mathematics of all grades and I say: Certainly, let us learn proving, but also *let us learn guessing.*" Vi kan måske ud fra G. Polya beskrive eksperimentel matematik, som en arbejdsmetode, hvor vi lærer eleverne at gætte kvalificeret om matematik.

I 2004 udkom bogen "Mathematics by Experiment" af Jonathan Borwein og David Bailey. Undertitlen på bogen er "Plausible reasoning in the 21st Century". Undertitlens mulige reference til G. Polya underbygges i forordet, hvor "Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving" fra 1968 af G. Polya citeres. "Mathematics by Experiment" indeholder avancerede eksempler, hvordan matematikere eksperimenterer i det laboratorium eller de laboratorier, som computerprogrammer i matematik har skabt.

Med afsæt i disse værker af en række professionelle matematikere kan eksperimentel matematik opfattes som en arbejdsmetode, der består i kvalificeret at gætte, og et værktøj til at gætte kan være computerprogrammer.

Set fra didaktikere

Da begrebet "eksperimenterende tilgange" optræder under didaktiske principper for tilrettelæggelse af undervisningen i alle matematik læreplanerne på hf og stx, så er udgangspunktet nu spørgsmålet: "Kan den eksperimentelle matematiks arbejdsmetode ses som et didaktisk princip – dvs. som en undervisningsmetode?"

Redaktionsgruppen er kommet frem til, at det kan det godt, da den eksperimentelle matematik undervisning er matematik undervisning, hvor eleverne bliver aktiveret i og med, at de skal gøre noget for at opdage sammenhænge. På den måde kombinerer den eksperimentelle matematik undervisning det som Wolfgang Klafki kalder handlings-orienteret undervisning og det Lev Vygotsky kalder nærmeste udviklingszone. For hvis de eksperimentelle forløb ikke er i zonen for den nærmeste udvikling, så vil eleverne ikke være i stand til at tage fat på problemet. Det er meningen at eleverne selv skal arbejde med problemstillingerne. Om problemstillingen er lukket (med en fast konklusion/resultat) eller om de er åbne, er ikke så vigtigt fordi det er i selve arbejdet med problemstillingerne at eleverne lære – handlings orienteret undervisning.

Et matematikforløb om brøkgregning til brug i 9. klasse og 1.g



udarbejdet og gennemprøvet af
H.C. Thomsen,
Frederiksberg Gymnasium

STAMBRØKER - den korte udgave.

Et eksempel på et forløb til genopfriskning af brøker og regning med brøker i 9.klasse og 1.g. Denne korte udgave vil blive fulgt op af en mere udførlig med indarbejdelse af erfaringer fra afprøvninger og en diskussion af, hvilket udbytte et sådant forløb kan give. Forløbet kan puttes ind hvor det passer bedst til holdet, og bør rundes af med en skriftlig aflevering. Eleverne arbejder enkeltvis eller i smågrupper, alt efter hvad der egner sig bedst i situationen.

En *stambrøk* er en brøk af formen $1/n$, altså en brøk hvor tælleren er 1 og nævneren er et naturligt tal (dvs. et positivt helt tal).

Skriv $1/6$ som sum af to stambrøker.
Hvor mange måder kan det gøres på ?
Skriv $1/6$ som forskel mellem to stambrøker.
Hvor mange måder kan det gøres på ?

Samme opgave for $1/7$, $1/8$ osv.

Er der mon en regel ?
Hvis der er, kan du så *overbevise* dig selv og andre om den ?
Hvis der er, kan den så *bevises* ?
Hvis der ikke er, hvordan kan man så svare på de første spørgsmål ?

Stambrøker - udvidet version.

Brøkgregning er et emne som kan få det til at slå gnister i gymnasium/folkeskole forholdet. På afsluttende trin i folkeskolen skal regning med brøker dyrkes og emnet optræder i færdighedsregningsprøven efter niende. I gymnasiets førstegymnasieklasse på matematisk linie skal man ifølge bekendtgørelsen "...opøve sikkerhed i at regne med brøker...".

Når jeg begynder med en ny første-g-matematisk taler jeg med eleverne om hvad de har lavet før (i min sidste klasse kom eleverne fra 19 forskellige skoler) - og hvad de synes var let eller svært. Eleverne de sidste par år hælder mere til opdelingen godt/svært end let/svært, så den bruger vi. Der er ikke enighed eleverne imellem om hvad der er godt eller svært - undtagen på et punkt: Brøkgregning - det er svært.

Således manipuleret tager vi fat dér...

Jeg trækker stambrøken $1/6$ (alle sjettedeles moder) op af lommen og beder eleverne løse opgaverne i "Stambrøker - den korte udgave".

Hvorfor stambrøker ? Jo bl.a. fordi vi så kan nøjes med at tale om nævneren og ikke nævne tælleren - og for næsten alle elever er det en "ny" måde at se på brøker på - og også fordi man jo så, hvis man er til den slags, kan tilgodese det historiske aspekt ved en senere lejlighed og tale om de "gamle" egyptere, som var fænomenele til at regne med stambrøker; men ikke regnede med brøker.

Så går de dér 28 elever, hvoraf de færreste kender hinanden, i gang, enkeltvis eller i smågrupper. Jeg glider rundt mellem dem og lærer dem lidt at kende. Husk, vi befinder os mellem hytteturen og introfesten, så alle føler alle på tænderne og elevernes hormoner sidder uden på tøjet. Men de gør pænt hvad den nye matematiklærer siger.

Eleverne har endnu ikke købt grafregner; men sidder ofte med en eller anden lommeregner, så det første spørgsmål er som regel: "Må vi bruge lommeregner ?" Selvfølgelig må de det. Det næste spørgsmål efter lidt tid er: "Kan de godt være de samme ?". Vore dages unge er ikke meget for at bruge ordet "ens", og mit svar er: "Ja de må godt være ens. Hvis de skulle være forskellige så skulle det have stået der".

Nu begynder der at komme tal på bordet - og efter den første session og en pause ser vi hvad vi er kommet frem til. Der har nu spredt sig en fornemmelse af at det kan være vanskeligt at se om man har fået (kan få ?) dem alle sammen med. Nogle har flere end andre - nogle kan kun finde en og får så et par ekstra fra de andre (som dog helst ikke giver alle dem de har fundet fra sig). Nu kommer så spørgsmålet: "Hvor mange er der ?". Mit svar: "Vent lidt og se om ikke I allerede tilsammen har hvad der kan være". Så går vi over til at få skrevet op på tavlen, hvad de har fundet ud af.

Under hele dette forløb har det føget med bemærkninger eleverne imellem som: Du skal bare flytte over på den anden side. Du kan bare plusse med den. Vi skal bare bruge fællesnævneren. Osv osv ("bare"-generationen ?). Alle disse og flere fagtermer uden at jeg har nævnt dem. Eleverne kender dem og kan bruge dem. Men hvis de var blevet spurgt direkte (om noget svært og to måneder siden de sidst var i skole!) ville kun et par af dem mene at nogen nok engang havde mumlet noget om fællesnævner og sådan. Ikke noget "bare" dér.

Efterhånden får vi skrevet alle muligheder op (det er vi overbeviste om):

$$1/6 = 1/7 + 1/42 = 1/8 + 1/24 = 1/9 + 1/18 = 1/10 + 1/15 = 1/12 + 1/12$$

og

$$1/6 = 1/5 - 1/30 = 1/4 - 1/12 = 1/3 - 1/6 = 1/2 - 1/3.$$



Flere elever har undervejs indset at fratrækningsstykker blev nemmere end sammenlægningsdo, fordi der skulle "flyttes over på den anden side", og så blev sammenlægning til fratrækning og omvendt.

Et vist system viser sig allerede nu for nogle, og følgende spørgsmål rejser sig: "Hvor er 11 blevet af?" og "Er der ikke en formel?"

Vi fortsætter med

$$1/7 = 1/8 + 1/56 = 1/14 + 1/14$$

og

$$1/7 = 1/6 - 1/42.$$

Så når vi ikke mere den dag - eleverne får 1/10 og 1/11 med hjem på værkstedet.

Nogle af dem prøver også selv hjemme med 1/8 og 1/9.

Følgende er hvad eleverne får arbejdet med i sådan en dobbelt/trippel time:

- summer og differenser af brøker
- forkortning og forlængning
- fællesnævner
- når nævneren bliver større bliver brøken mindre og omvendt
- brøker ganget med tal
- præcisering af begreber og ord
- formulering og afprøvning af formodninger
- de små tabeller
- primtal
- reciprok
- behov for afklaring ("er der en formel?")
- algoritmer
- undren alligevel
- det som på forhånd så sværest ud var nemt og omvendt
- overbevis
- bevis

Efter at have set på 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10 og 1/11 gættes følgende regel: Der er altid en mindre ved forskel end ved sum. Vi har nemlig set:

Nævner	6	7	8	9	10	11
Summer	5	2	4	3	5	2
Forskelle	4	1	3	2	4	1

- og vi gætter også at antallet af måder må høre sammen med antallet af divisorer (for de fleste elever en ny term) i nævneren.

Tilbage står nu: "Hvor mange er der i alt - er der en formel?" og "Hvordan finder man dem alle sammen?"

Svaret på det sidste spørgsmål kommer næsten af sig selv ved arbejdet med at finde dem. Ved summer kører man igennem fra 1/(n+1) til 1/2n og ser, hvad for nogle der dur. Ved forskelle kører man fra 1/(n-1) og igennem til 1/2.

Svaret på det første spørgsmål er følgende:

Lad d være antallet af divisorer i n² (d er altid ulige - her er mulighed for en dybere diskussion af primtalsfaktoropløsning m.v.).

Så er antal måder 1/n kan skrives som sum af to stambrøker på (d+1)/2.

Og antal måder som forskel mellem to stambrøker (d-1)/2.

Så forskellen er, som gættet, altid 1.

Som del af valgfrit emne i talteori på højniveau eller som (del)emne til en tredieårsopgave kan beviset for ovenstående påstand så føres.

Jeg har ved flere lejligheder fået følgende som forslag til algoritme i "sum-tilfældet": "Kunne du ikke bare skrive den som sum af tre (fire, fem osv) stambrøker, og så lægge dem sammen?"

Lad os prøve:

$$1/6 = 1/12 + 1/12 \text{ ok}$$

$$1/6 = 1/18 + 1/18 + 1/18 = 1/18 + 2/18 = 1/18 + 1/9 \text{ ok}$$

$$1/6 = 1/24 + \dots + 1/24 = 1/24 + 3/24 = 1/24 + 1/8 \text{ ok}$$

$$1/6 = 1/30 + \dots + 1/30 = 1/30 + 4/30 = 1/30 + 2/15 \text{ no}$$

$$1/6 = 1/36 + \dots + 1/36 = 1/36 + 5/36 \text{ no}$$

$$1/6 = 1/42 + \dots + 1/42 = 1/42 + 6/42 = 1/6 + 1/7 \text{ ok}$$

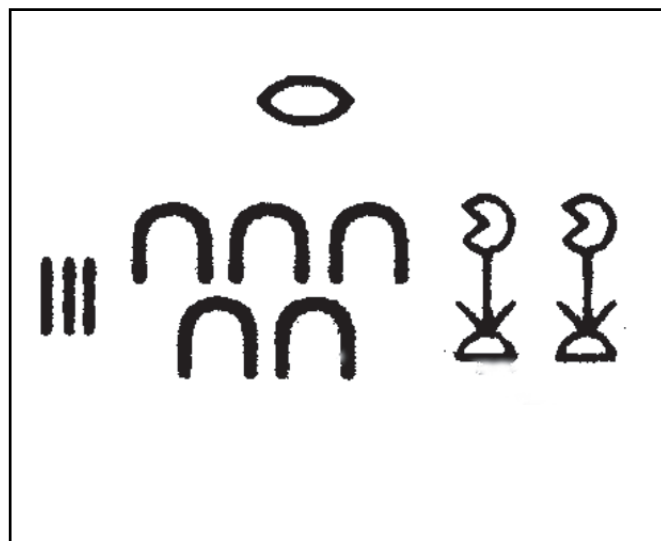
Her skulle man så være så snu at man regnede på den med 1/30 en gang til:

$$1/6 = 1/30 + \dots + 1/30 = 2/30 + 3/30 = 1/15 + 1/10 \text{ ok}$$

Og så havde man dem alle fem (hvilket vi jo til at begynde med ikke vidste var *alle* fem).

Hov, hvad så med den med 1/36? Kunne vi ikke gøre noget ved den? Jo, men...

Til sidst, igen, igen: "Hvor blev den med 1/11 af?"



Ægypterne havde en prik med at skrive brøker som en sum af stambrøker, dvs brøker med tæller 1. Det indledende billede viser brøken 1/253 skrevet med hieroglyffer. Øjet foroven viser at det er en brøk og så står der ellers 3 enere + 5 tiere + 2 hundreder nedenunder.

<http://www.246.dk/stamb.html>



Af: Juanna Jensen
email: jjoensen@econ.au.dk

Effekten af højniveau matematik i gymnasiet på lønnen



og Helena Skyt Nielsen
email: hnielsen@econ.au.dk

Det er velkendt, at personer med høje matematikkvalifikationer har en mere favorabel karriere end andre. De får højere karakterer, får længere uddannelse og tjener en højere løn.

Spørgsmålet er så, om den favorable karriere skyldes selve matematikken, eller om de personer, som vælger at erhverve høje matematikkvalifikationer, under alle omstændigheder ville have klaret sig bedre. Med andre ord: er det en årsagssammenhæng eller blot en selektionseffekt?

Datamateriale

For at besvare dette spørgsmål, har vi set på årgangene, der startede i det almene gymnasium i 1986 og 1987, i alt ca. 30,000 personer. I denne population valgte 28% matematik på højt niveau, heraf ca. en tredjedel piger. Disse personer er interessante af to årsager. For det første var de udsat for et naturligt eksperiment, idet nogle af dem havde nem adgang til et gymnasium med en forsøgsordning, som gjorde det nemmere at erhverve høje matematikkvalifikationer, mens andre ikke havde så nem adgang til dette. For det andet, er de så gamle, at vi kan observere deres lønninger efter de har fået et godt fodfæste på arbejdsmarkedet, fx 13 år efter de startede i gymnasiet.

Det almene gymnasium før 1988

Indtil 1988 gjaldt gren-gymnasiet, hvor man kunne vælge mellem fire sproglige grene og fire matematiske grene, se figur 1, medmindre man gik i et gymnasium med en forsøgsordning, som tilføjede en ekstra matematisk gren til valgmulighederne.

Personer på gymnasier uden forsøgsordninger kunne kun få højniveau matematik, hvis de også valgte højniveau fysik, hvilket mange betragtede som meget svært og måske kedeligt. Personer på gymnasier med forsøgsordning kunne også få højniveau matematik, hvis de valgte det sammen med højniveau kemi, hvilket især appellerede til pigerne. Den ekstra valgmulighed kan betragtes som en reduktion af omkostningen ved at få højniveau matematik.

Identifikation af den kausale effekt af højniveau Matematik

Vi identificerer årsagssammenhængen mellem højniveau matematik og løn ved at anvende et naturligt eksperiment, som fremkom som følge af, at forsøgsgrenen var tilgængelig på 50% - omtrent tilfældigt valgte - gymnasier rundt om i landet. Det naturlige eksperiment i dette forskningsprojekt går ud på, at nogle elever af eksogene årsager fik nemmere adgang til at vælge højniveau matematik.¹ De fik nemlig mulighed for at kombinere med kemi i stedet for fysik. Konsekvensen var, at en hel del af de elever, som ellers ville have valgt matematik på mellemniveau sammen med Musik, Biologi eller Samfundsfag på højt niveau, endte med at vælge matematik og kemi på højt niveau. Det er disse personer, som vi implicit anvender til at identificere effekten af højniveau matematik. Vi kan derfor ikke adskille den gunstige effekt af højniveau matematik, fra en eventuel gunstig synergi effekt mellem højniveau matematik og højniveau kemi,

¹ Vi måler nem adgang til forsøgsordningen på to alternative måder: 1) vha en indikator for om man går på et forsøgsgrensgymnasium eller 2) vha forskellen i afstanden fra bopælen til hhv nærmeste gymnasium og nærmeste gymnasium, der udbyder forsøgsgrenen. Disse to variable fungerer rent teknisk set som to alternative instrumentvariable for valget af højniveau matematik, som hver i sær er valide under to forskellige antagelser om fordeling af elever på gymnasier: 1) er valid under forudsætning af, at man ikke vælger et bestemt gymnasium, fordi man forventer at vælge forsøgsgrenen i 2.g., mens 2) er valid under forudsætning af, at man frit kan vælge gymnasium fx fordi man forventer at ville vælge forsøgsgrenen i 2.g.

eller fra en stor gunstig effekt af kemi. Den internationale litteratur finder dog, at det eneste fag, som måske kan påvises at have en særlig positiv effekt på lønnen, er matematik.

Figur 1. Oversigt over Grengymnasiet.

1. år	2. og 3. år
Math track <i>Courses taught at both tracks:</i> <i>High level:</i> Danish History <i>Medium level:</i> French or Russian <i>Low level:</i> Ancient history Sports Religion Music or Visual arts <i>Mandatory courses taught at the Math track only:</i> Math Physics Chemistry English/German	Math – Social Science <i>Medium level Math, high level Social Science, medium level Physics and Geography, low level Chemistry and Biology.</i>
	Math – Natural Science <i>Medium level Math, high level Biology, medium level Physics, Chemistry and Geography.</i>
	Math – Music <i>Medium level Math, high level Music, medium level Physics and Geography, low level Chemistry and Biology.</i>
	Math - Physics <i>High level Math, high level Physics, medium level Chemistry, low level Biology and Geography.</i>
	Math – Chemistry <i>High level Math, high level Chemistry, medium level Physics, low level Biology and Geography.</i>
Language track <i>Courses taught at both tracks:</i> <i>High level:</i> Danish History <i>Medium level:</i> French or Russian <i>Low level:</i> Ancient history Sports Religion Music or Visual arts <i>Mandatory courses taught at the Language track only:</i> English German Latin Biology Geography Math	Social Science and languages <i>High level Social Science, high level English or German and medium level Geography.</i>
	Music and languages <i>High level Music, high level English or German and medium level Latin.</i>
	Modern languages <i>High level English and German,, and medium level Latin.</i>
	Classical languages <i>High level Latin along with high level Greek or Ancient History.</i>

Empirisk Analyse

En simpel OLS regression viser, at lønnen for personer med højniveau matematik er 33% højere end for andre personer med studentereksamen. Når vi estimerer den kausale effekt² for de elever

² Vi anvender en instrument variabel metode, idet vi anvender en indikator for, om man gik på et forsøgsgymnasium, eller den ekstra rejseafstand til det nærmeste forsøgsgymnasium som instrumenter.

som skifter grenvalg, når de får mulighed for at vælge Mat-Kemi, bliver effekten af højniveaumatematik reduceret til 26%, og den reduceres til 12-13%, når vi kontrollerer for opnået uddannelseslængde. Effekten på lønnen skyldes således primært, at disse personer får en længere uddannelse. De er overrepræsenterede på universiteterne, og især på de teknisk-naturvidenskabelige uddannelser og på samfundsvidenskab/handelshøjskolerne. Dette tyder altså på, at deres uddannelsespræferencer påvirkes af grenvalget i gymnasiet eller at de bliver bedre til at gennemføre lange videregående uddannelser efter at have bestået en gymnasieeksamen med den relevante fagkombination.

Forsigtige paralleller til gymnasiet anno 2006

Hvis man på baggrund af analysen skal drage nogle forsigtige paralleller til diskussionen omkring det nye gymnasium (efter 2005), kan man dels give nyttig information til de unge, som skal vælge grundforløb og studieretning, ligesom man kan give nyttige råd til de beslutningstagere, som skal definere studieretninger.

Til de unge: Hvis man er på vippen i forhold til at vælge en naturvidenskabelig studieretning, 'Go for it!'. Man kan forbedre sine karrieremuligheder betydeligt ved at vælge naturvidenskabelig studieretning med højniveau matematik kombineret med et andet hårdt naturvidenskabeligt fag på højt niveau.

Til beslutningstagerne: I grengymnasiet fungerede Mat-Kemi lidt som lokkemad for at få nogle flere unge mennesker til at sluge de benhårde naturvidenskabelige fag. Måske skulle man overveje lignende lokkemad i dag i form af fagligt indholdstunge og studieforberedende fag med mere tiltrækkende titler og indhold: fx fødevareteknik, biofysik eller sundhedsrelaterede fag. Relevance of Science Education (ROSE) undersøgelsen kan eventuelt give endnu flere fingerpeg.

Reference:

Joensen, J. S. og H. S. Nielsen (2006), 'Is there a Causal Effect of High School Math on Labor Market Outcomes?' Working Paper, Århus University, October 2006.

A dozen reasons to join the European Mathematical Society

1. The EMS is dedicated to promoting mathematics, both pure and applied, throughout Europe, both in the EU and outside.
 2. The EMS has successfully lobbied Brussels to make the European framework programmes more appropriate for mathematics. The Society has supported the creation of a European Research Council.
 3. The EMS has founded a publishing house to publish journals and books at reasonable prices.
 4. The Journal of the European Mathematical Society has established itself among leading mathematical periodicals.
 5. The EMS publishes a quarterly Newsletter, with news about the Society and mathematical events, interviews with mathematicians, general interest articles about mathematics, book reviews, and a conference calendar.
 6. The EMS promotes the European Congresses of Mathematics.
 7. The EMS promotes the European Prizes for Mathematics.
 8. The EMS supports and co-ordinates summer schools for young mathematicians.
 9. The EMS runs a series of mathematical weekend meetings, in conjunction with its member societies.
 10. The EMS, through its subcommittees, supports mathematicians in Eastern Europe and in developing countries.
 11. The EMS works to improve the position of women in mathematics.
 12. The EMS works to raise public appreciation of mathematics.
- The EMS has shown it can be effective in areas beyond the limits of national mathematical societies. But it needs more individual members, so as to truly represent European mathematics. It also needs individual members to take part in its ever-expanding activities, thus contributing to a richer mathematical life in Europe.
- Please support the work of the society by joining it as an individual member!**
- Benefits of membership include:
- The free quarterly Newsletter
 - Reduced registration fees for European Congresses and Mathematical Weekends
 - Discounts on journals and books published by the EMS Publishing House
- Individual membership doesn't cost much: currently EUR 22 if you are a member of a national mathematical society in geographical Europe, just enough to cover the costs of producing and posting the Newsletter and to pay for routine administration. You can join through your national society.
- For more, including a list of national societies who are corporate members of the EMS, see <http://www.emis.de>.



Af: Christian Berg
email: berg@math.ku.dk

Orientering om Nationalkomiteen for matematik

Nationalkomiteen for matematik afholdt møde den 22. november 2006 i Odense og konstituerede sig med Mikael Rørdam som sekretær og undertegnede som formand. Den tidligere formand Ib Madsen og den tidligere sekretær Hans Jørgen Munkholm havde ikke ønsket genvalg, og som nye medlemmer blev Henning Haahr Andersen udpeget af Kgl. Danske Videnskabernes Selskab og Bent Ørsted af Dansk Matematisk Forening. Derudover blev Morten Brøns udpeget af Dansk Center for Anvendt Matematik og Mekanik som afløser for Martin Bendsøe og Hans Christian Hansen blev nyudpeget af Matematikundervisningskommissionen, som i en årrække ikke har haft repræsentanter i nationalkomiteen. Valgene gælder for 4 år. Af komiteens 7 medlemmer er 4 altså udskiftet i 2006. Nationalkomiteen er bindeledet mellem dansk matematik og IMU (Den Internationale Matematiske Union), som afholder de internationale kongresser hvert fjerde år, senest i Madrid i August 2006. Som danske delegerede ved IMU's generalforsamling i Santiago de Compostella i weekenden inden ICM2006 deltog Hans Jørgen Munkholm og undertegnede.

Kort referat af Generalforsamlingen.

Der var 133 delegerede fra 64 lande tilstede udover den gamle eksekutiv komite og forskellige specielt inviterede personer og observatører.

Det blev vedtaget at oprette et såkaldt associeret medlemskab beregnet på lande

som endnu ikke er medlemmer, men som kunne tænkes at melde sig ind senere. Associerede medlemslande har ikke stemmeret og betaler ikke kontingent.

Medlemslandene er inddelt i grupper 1-5. Store lande som USA og Frankrig er gruppe 5 medlemmer, Danmark er medlem i gruppe 2. Tallet angiver hvor mange delegerede (og dermed stemmer) landet har. Kontingentets størrelse udregnes efter formlen $F(G)U$, hvor G er gruppen, $F(G)$ er en faktor og U er en enhed i Schweizer Franc. Det blev besluttet, at $U=1386$ CHF for 2007, hvilket er en stigning på 5% i forhold til 2006. Det blev også besluttet at øge $F(G)$ til $F(4)=8$, $F(5)=12$, medens $F(1)=1$, $F(2)=2$, $F(3)=4$ forblev uændret. Dette og andre detaljer kan ses på IMU's hjemmeside <http://www.mathunion.org/>. Kontingentforøgelsen specielt for de store lande blev begrundet i et ønske om større aktivitet med henblik på at støtte udviklingslande.

I året før generalforsamlingen havde der været ned-

sat en nomineringskomite, der havde som formål at foreslå kandidater til præsident, sekretær, vicepræsident og menige medlemmer af eksekutiv komiteen for IMU samt til forskellige underkomiteer. Denne midlertidige ordning blev gjort permanent efter afstemning ved generalforsamlingen. Komiteen bestod af IMU's præsident John Ball og en af ham udpeget formand Ludwig Faddeev. Derudover sammensættes komiteen efter en række regler og bl. a. vælges repræsentanter fra forskellige grupper af lande ved lodtrækning blandt de foreslåede kandidater. Undertegnede var valgt til komiteen som repræsentant for gruppe 2.

Som ny eksekutiv komite for årene 2007-2010 valgtes László Lóvász (præsident), Martin Grötschel (sekretær), Zhi-Ming Ma og Claudio Procesi (vicepræsidenter), som anbefalet af nomineringskomiteen. Antallet af menige medlemmer i eksekutiv komiteen blev vedtaget øget fra 5 til 6 og nomineringskomiteen præsenterede en liste på 8 personer, der kunne vælges imellem. Det skal nævnes at de delegerede også kan stille forslag om valg af personer til de forskellige komiteer, men der var ingen sådanne forslag. Ragni Piene fra Norge blev genvalgt til eksekutiv komiteen. Også ICMI (International Committee for Mathematical Instruction) var på dagsordenen. Den arrangerer kongresserne i matematikundervisning hvert fjerde år, seneste i Lyngby i 2004. Hidtil er ICMI's eksekutiv komite blevet valgt af de delegerede på IMU's generalforsamling, og som ny præsident valgtes Michèle Artigue, men det blev vedtaget af den i fremtiden vil blive valgt på ICMI's egen generalforsamling af deres delegerede. Også for ICMI var der en nomineringskomite, hvor IMU har en vis indflydelse. Dens formand var Mogens Niss, som på den baggrund deltog i IMU's generalforsamling.

Efter anbefaling fra Eksekutiv komiteen blev det vedtaget, at ICM2010 afholdes i Hyderabad i Indien (19.-27. august 2010) og IMU's generalforsamling finder sted i Bangalore.

Til slut skal nævnes, at der via email udsendes et nyhedsbrev fra IMU hveranden måned. Man kan gratis tilmelde sig til denne service ved enten at gå ind på <http://www.mathunion.org/> IMU-Net og trykke på "Subscribe" knappen, eller ved at sende en email til imu-net-request@mathunion.org med Subject: subscribe.

MatematikerNyt

ved Mikael Rørdam



Erik Kjær Pedersen er d. 1. januar tiltrådt som institutleder ved Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet.

Erik Kjær Pedersen er cand scient fra Aarhus Universitet 1969. Efter overstået militærtjeneste tog han en PhD grad fra University of Chicago 1974. Herefter blev han lektor i Odense afbrudt af forskningsophold ved Princeton, Göttingen og McMaster indtil 1989. I 1990 blev han professor ved SUNY Binghamton, hvor han også har virket som institutleder i 5 år. Kjær Pedersens forskning drejer sig mest om eksistens og klassifikationssætninger om mangfoldigheder.

Erik Kjær Pedersen er gift med Inger der er high school lærer i Johnson City. De har tre børn og et barnebarn der alle bor i det storkøbenhavnske område.

Begivenheder

ved Poul Hjorth



61st European Study Group with Industry.

The 10th Danish, and the 61st European, Study Group where mathematicians attack current problems from industry, takes place in Sønderborg, August 13-17.

See: <http://www.mci.sdu.dk/ESGI61/>



European
Mathematical
Society

5th European Congress of Mathematics,

Amsterdam, July 14-18. Se: <http://www.5ecm.nl/>

Levy Processes: Theory and Applications

Sandbjerg Manor, August 9-12, 2007

See: <http://www.math.ku.dk/conf/levy2007/summerschool.htm>



CTQM afholder to workshops:

"Geometry and TQFT" June 18-22

"Algebraic and Geometric Lie Theory" June 25-29 at University of Aarhus.

See: <http://www.ctqm.au.dk>

Aftermath

ved Mogens Esrom Larsen



LØSNINGER

Nogle af opgaverne er fra USA Mathematical Olympiads, 1983,2, 1973,4, 1976,3, 1976,2, 1979,5. Den sidste opgave er fra Ed Barbeau, After Math.

Alle opgaver er løst af problemgruppen ”Con Amore.”

Polynomielt

Vis, at rødderne i et 5-te grads polynomium med reelle koefficienter,

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

der opfylder betingelsen $2a^2 < 5b$, ikke alle er reelle.

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer.

Lad rødderne være de reelle tal $x_1, \dots, x_5$. Da $a = -\sum_i x_i$ og $b = \sum_{i < j} x_i x_j$ finder vi, at

$$\begin{aligned} 5b - 2a^2 &= \sum_{i < j} 5x_i x_j - \sum_i 2x_i^2 - \sum_{i < j} 4x_i x_j \\ &= \sum_{i < j} x_i x_j - \sum_i 2x_i^2 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Systematisk

Løs ligningerne

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer, hvis løsning vi bringer.

Vi sætter $x = 1 + h$, $y = 1 + k$ og $z = 1 + \ell$. Ligningssystemet bliver da til

$$h + k + \ell = 0$$

$$h^2 + k^2 + \ell^2 = 0$$

$$h^3 + k^3 + \ell^3 = 0$$

Der kan derfor ikke være andre reelle løsninger end 0-løsningen.

Vi indsætter nu $\ell = -h - k$ i de to af ligningerne og får

$$2h^2 + 2k^2 + 2hk = 0$$

$$3hk(h + k) = 0$$

Af sidste ligning følger, at en af dem er 0. Lad $h = 0$. Af den første fås nu $k = 0$. Altså må også $\ell = 0$ og derfor $x = y = z = 1$.

Diophantisk

Find samtlige heltallige løsninger til

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2$$

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer, der også gør opmærksom på, at opgaven har været bragt i Normat 2006, nr. 4 p. 187.

$a = b = c = 0$ er en løsning.

Hvis $c = 0$, så er $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 1$, der kun har løsningen $a = b = 0$.

Vi kan derfor nøjes med at søge løsninger, hvor alle tre tal er naturlige. Hvis a eller b er ulige, fås $c^2 \equiv 3(4) - \text{en modstrid}$. Derfor er alle 3 tal lige. Lad nu $a = 2^n p$, $b = 2^m q$ og $c = 2^\ell r$, hvor p , q og r er ulige. Antag f. eks. at $m \leq n$. Vi har så ligningen

$$2^{2(n+m)} p^2 q^2 - 2^{2n} p^2 - 2^{2m} q^2 = 2^{2\ell} r^2$$

Heraf følger, at $m \leq \ell$. Vi kan derfor forkorte ligningen til

$$2^{2n} p^2 q^2 - 2^{2(n-m)} p^2 - q^2 = 2^{2(\ell-m)} r^2$$

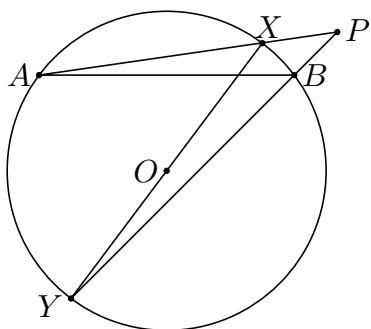
Hvis $m < n$, er venstre side kongruent med 3 modulo 4, hvad højre side ikke kan være. Og hvis $m = n$, står der

$$2^{2n}p^2q^2 - p^2 - q^2 = 2^{2(\ell-m)}r^2$$

hvor venstre side er kongruent med 2 modulo 4, mens højre side ikke er.

Geometrisk

Lad A og B være to punkter på en cirkel. Lad XY være en diameter, og lad P være skæringspunktet mellem linierne gennem A og X og B og Y hhv.



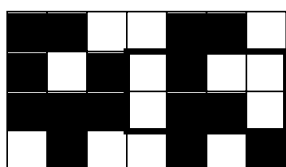
Bestem det geometriske sted for skæringspunkterne P , når XY gennemløber diametrene.

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer.

Da $\angle YAX$ er ret og $\angle AYB$ er konstant, og også $\angle APY$ konstant. P gennemløber derfor en synsvinkelbue, altså er det geometriske sted en vis cirkel, dog på nær punkterne A og B .

Skuffende

Antag, at hvert felt af et 4×7 skakbræt er farvet enten hvidt eller sort.



Vis, at for enhver sådan farvelægning findes et rektangel med akseparallelle sider og de fire hjørner af samme farve.

Lad os se på de tre øverste rækker. Der må være fire søjler, der alle har to af samme farve. Da kun tre forskellige placeringer er mulige, må to af søjlerne være ens.

PS. Et rektangel af størrelse 4×6 kan farves, så der ikke er noget delrektangel med fire ens hjørner.

Babylonisk

Ni matematikere mødes til en international konference og opdager, at blandt hver triplet er der to, som taler et fælles sprog. Hvis vi yderligere ved, at hver matematiker højst taler tre sprog, så skal man vise, at der er tre matematikere, der taler et fælles sprog.

Lad os kalde et sprog for et **fællessprog**, hvis (og kun hvis) mindst to af matematikerne taler det. Endvidere tænker vi os 27 punkter fordelt jævnt på en cirkel, 3 punkter for hver matematiker. For hver matematiker farver vi et punkt med en farve svarende til det fællessprog, hun taler mens eventuelle overskydende punkter, der svarer til et sprog, hun har for sig selv, eller mangelen på et sprog, fjernes. Nu forbinder vi de punkter, der har samme farve, med liniestykker, der så får den pågældende farve. Hvis der er to liniestykker med samme farve, er der mindst tre, der taler det tilsvarende fællessprog. Vi går derfor ud fra, at liniestykkerne har forskellige farver. Af dem kan der højst være 13. Da disse forbinder 26 punkter, må der være et punkt, der er fjernet. Der er altså mindst én matematiker, A , der højst har to punkter. Hun taler derfor højst med to af de andre. Der findes derfor 6 matematikere, der ikke taler samme sprog som A . Men hver gang A er sammen med to af de seks, skal to tale samme sprog, altså de to andre. Men det giver 15 sprog blandt de 6, og der var kun 13 til rådighed.

Noget om medianerne

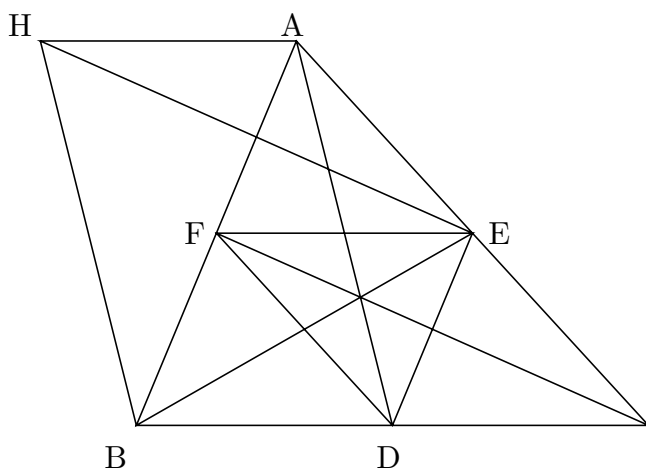
Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer.

I en trekant, $\triangle ABC$, er tegnet de tre medianer, dvs. at f. eks. D er midtpunktet af linie-

stykket BC . Trekanten $\triangle DEF$ er ligedannet med $\triangle ABC$, og da siderne er halvt så lange, er dens areal en fjerdedel. Også hver af de tre trekanten, $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, og $\triangle CDE$ er ligedannede med den oprindelige i halv størrelse og derfor af areal en fjerdedel.

Man kan nu tegne en trekant med siderne af længde som de tre medianer, AD , BE og CF . Opgaven går ud på at vise, at denne median-trekants areal er $\frac{3}{4}$ af trekantens, $\triangle ABC$.

Vi tegner mediantrekanten som $\triangle BEH$, så $BH = AD$ og $EH = CF$.



Så er AH parallel med BC og EF , og derfor er trekanten $\triangle EFH$ lige stor med $\triangle AEF$ og har derfor arealet en fjerdedel. Tilsvarende er $\triangle BEF$ lige stor med $\triangle BDF$ og derfor af arealet en fjerdedel. Endelig er $\triangle BFH$ lige stor med $\triangle DEA$ (parallelforskydning), som er lige stor med $\triangle DEF$ og derfor af arealet en fjerdedel. Tilsammen de ønskede $\frac{3}{4}$.

NYE OPGAVER

Kvadratur

Lad d være et naturligt tal, så $d \notin \{2, 5, 13\}$. Vis, at der findes $a \neq b$, $a, b \in \{2, 5, 13, d\}$, som opfylder, at $ab - 1$ ikke er et kvadrattal.

Funktionalt

Find alle funktioner på den ikke-negative reelle akse ind i sig selv, som opfylder

- (i) $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$ for alle x, y ,
- (ii) $f(2) = 0$,
- (iii) $f(x) \neq 0$ for $0 \leq x < 2$.

Rød eller hvid?

Givet en endelig mængde af punkter i planen, alle med heltallige koordinater. Vis, at man altid kan farve dem røde og hvide, så alle har en af farverne, og således at for enhver akseparallel linie vil antallet af røde og antallet af hvide på linien højst afvige med 1.

Kombinatorik

Lad $p_n(k)$ være antallet af permutationer af n elementer med netop k fixpunkter. Vis formelen

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$

Cirkler

Givet to koncentriske cirkler med radier $R > r$. Lad P være et fast punkt på den lille cirkel, og lad B være et variabelt punkt på den store. BP skærer den store yderligere i C . Den vinkelrette linie til BP i P skærer den lille cirkel yderligere i A .

Find værdierne af $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

En ulighed

C Lad a, b og c være reelle tal, der opfylder $abc = 1$.

Vi, at

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Endnu et kvadrat

Lad a og b være naturlige tal, der opfylder, at $ab + 1$ går op i $a^2 + b^2$. Vis, at

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

er et kvadrattal.

Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n + 1}{n}$ er et helt tal.

En divisor

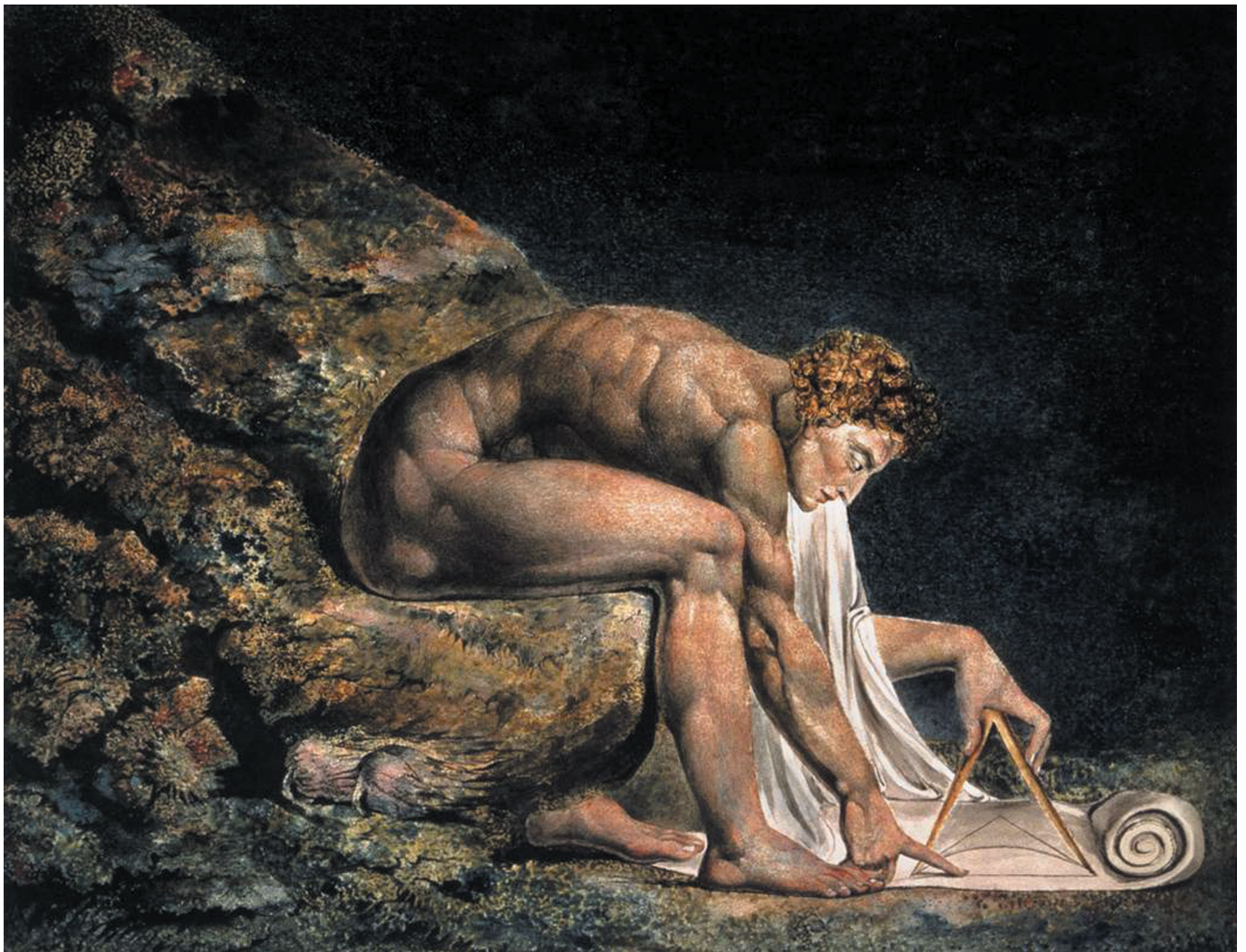
Find alle hele tal a, b og c med $1 < a < b < c$ som opfylder, at $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ er en divisor i $abc - 1$.

Og en anden divisor

Find alle positive hele tal a og b som opfylder, at $ab^2 + b + 7$ er en divisor i $a^2b + a + b$.

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C



William Blake: Isaac Newton (1795), Tate Gallery, London