mat
MATILDE

Matematik i Norden: Finland

NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR 29 DECEMBER 2006

Af: Bent Ørsted

Matematikken er som et puslespil, hvor adskillige brikker blev lagt for meget længe siden, og hvor mange af de store matematikere fik startet helt nye områder af mønstre for senere generationer at forstå og fortsætte. Der er ikke nogen æske med det endelige billede gengivet på låget, og meget af arbejdet med at komme videre foregår i dunkel belysning og med en del prøven og venden af nye og mærkværdige brikker. Men det er vel samtidig det, der gør matematikken interessant. Der har fra de tidligste tider været noget mystisk dragende ved f. eks. solens og månens og tallenes indbyrdes leg, hvor 7 og 12 og 24 og 60 har søgt deres rolle - for ikke at tale om primtallene. Desværre er dette aspekt ved faget nok ikke blandt de gængse opfattelser hos dem, der skal have det på et givet niveau for at ”komme videre”, og her kan selv et velmenende Matilde nok ikke flytte meget; men alligevel har vi til hensigt at lade temaet i næste nummer være *Uddannelsen i Matematik*. Dette skal ses i bred forstand, og her set som en almendannende faktor, for som matematikeren Henri Poincaré fastslog, er matematikken studiet af alle mulige verdener, og den reelle verden er bare et enkelt eksemplar.

Dette nummer af Matilde har som tema, Matematik i Norden: Finland. Som bekendt er der noget ganske særligt ved parret (matematik, Finland). Javist, de klarer sig formidabelt i internationale tests, vi har hørt, at der er et højt niveau i undervisningen, også i folkeskolen, så det er naturligt, at vi her vil se mest på undervisningsaspektet. Men derfor må man ikke glemme, at Finland har fostret store navne som Lars Ahlfors og Rolf Nevanlinna, og især på området komleks funktionsteori har finsk matematik bidraget væsentligt med variationer over temaet *kompleks differentiabilitet*. Her er en af matematikkens mange smukke ideer: Hvis differenskvotienten $(f(x+h)-f(x))/h$ for komlekse variable x, h har en grænseværdi for h gående mod 0, så siger vi, at funktionen $f(x)$ er komleks differentiabel - altså nøjagtig samme udseende af definitionen som for reelle variable; men nu med dramatiske konsekvenser. Således f. eks. Liouvilles sætning, at hvis funktionen f er kompleks differentiabel i alle komplekse punkter x og begrænset, så må den være konstant. Her er starten på megen videregående teori, og Ahlfors selv skrev en klassisk lærebog og udvidede nævnte klasse af funktioner til de såkaldte quasi-konforme funktioner, med dybe anvendelser i studiet af Riemann-flader.

Et (meget) kort rids af finsk matematik og i særdeleshed finsk matematisk forening findes i det udmærkede `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Societies`, her et kort uddrag:

”The Finnish Mathematical Society was named Suomen Matemaattinen Yhdistys. It is a Society for professionals, appliers and students of mathematics. Its purpose is to advance mathematical thinking and research and overall interest in mathematics in Finland.

At the time that the Society was founded in 1868, Finland had only one university city. The University of Helsinki was founded at Turku in 1640 and transferred to Helsinki in 1828 (it was only sixteen years before this in 1812 that Helsinki became the capital). The Helsinki University of Technology, founded in 1849, was also in Helsinki. Ernst Lindelöf's father, Lorenz Lindelöf, was professor of mathematics in Helsingfors (the old name for Helsinki) at the time when the Society was founded and he became its first chairman appointed at the founding meeting on 20 November 1868.

The time that the Society was founded was a crucial one in the history of Finland. The country had been under Swedish rule for many centuries - a rule that had left Finland with practically no institutions of their own. In 1809 Finland became a nation under Russian protection and was ruled from 1809 to 1863 by a bureaucracy chosen by the Russian emperor. In fact student organisations had been banned in in 1852 by a government who saw them as a source of anarchist ideas. After 1863 the country became more independent, setting up its own monetary system, army, and institutions. In 1868 student organisations were again allowed and the Finnish Mathematical Society partly filled this role.

With all the mathematical activity in Finland being in Helsinki when the Society was founded, its initial purpose was largely to raise interest in mathematics among students. One of the original statutes of the Society gave students the right to seek guidance from the Society about any difficulties they encountered in mathematics lectures.

In the 20th century new universities were founded in Finland, located at Jyväskylä, Oulu, Joensuu, Kuopio, Tampere and two universities located at Turku. The Finnish Mathematical Society became more active in encouraging young people to study mathematics at university.

In 1926 Ernst Lindelöf was the professor of mathematics at the University of Helsinki and Rolf Nevanlinna was also teaching there. From this time the Society worked to bring more foreign mathematicians to lecture in Finland, although prior to the outbreak of World War II only nine foreign mathematicians had addressed the Society.

forts. side 3

mat

Matilde – Nyhedsbrev for Dansk Matematisk Forening medlem afEuropean Mathematical Society

Nummer 29 – December 2006

Redaktion:
Bent Ørsted, Aau (ansvarshavende)

Bent Ørsted (TEMAREDAKTØR)

Carsten Lunde Petersen, Ruc
Jørn Børling Olsson, Ku
Poul Hjorth, Dtu
Mikael Rørdam, Sdu
Carl Winsløw, Ku

Adresse:

Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø

Fax: 3532 0704
e-post:
matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Matilde udkommer 4 gange om året

Indlæg til næste nummer skal være redaktionen i hænde senest 16. marts 2006

Tema:
Matematisk uddannelse

Indhold:

TEMA: Matematik i Norden: Finland

---

fortsat fra side 2

The war, however, caused a marked downturn in activity. The war and its aftermath were a heavy blow to the Society. Lindelöf retired, Ahlfors and Nevanlinna left the country, and conditions generally were not favourable for scholarly research. It was not until the early 1950s that the worst effects of the war were overcome. War reparations were paid, the residents of the ceded Karelia were resettled, and the economy of the country finally began to improve visibly.

Slowly over the years international connections were built up. In 1957 the Society organised an international conference on analytic function theory in Helsinki, the first international mathematics conference to be held in Finland. The Society undertook the task of organising the International Congress of Mathematicians in Helsinki in 1978, Nevanlinna being one of the main organisers."

Udover temaet indeholder dette nummer bl. a. et interview med L. Carleson, en musikartikel af Jørgen Tind i forlængelse af forrige nummer, indlæg om *Numb3rs*, artikel om kvinder i europæisk matematik, Adrien Douady in memoriam, debat på AUC samt en reportage fra ICM i Madrid. God fornøjelse.

WHAT ARE THE REASONS BEHIND THE SUCCESS OF FINLAND IN PISA?

Af: George Malaty,
University of Joensuu,
Finland,
george.malaty@joensuu.fi

The success of Finland in PISA has surprised mathematicians and mathematics educators both in and outside Finland, myself among them. Nevertheless, because of my background and experience, it was easy for me to understand the reasons behind this success. The five main reasons are the success of pre-service teacher education, the culture of the teaching profession, the success of in-service teacher education, the different efforts which have been made to develop mathematics education and the daily traditions of school life in Finland.

A direct answer to the question

As a direct answer to the title question, I think that the main reasons for Finland's success in PISA are as follows:
1. the success of pre-service teacher education
2. the culture of the teaching profession
3. the success of in-service teacher education
4. the different efforts which have been made to develop mathematics education
5. the daily traditions of school life in Finland.

These reasons are discussed in more detail below, including in 4. the work of my own university, the University of Joensuu, as a case study.

1. The success of pre-service teacher education
The success of pre-service teacher education in Finland has mainly two aspects: keeping the level of teacher education qualification high being able to recruit motivated students. As regards the teaching qualification, every schoolteacher must achieve a Masters degree: an M. Ed. for a primary school teacher (Grades 1 - 6) and an M.A. or M.Sc. for a secondary school teacher (Grades 7 - 12). Regarding the recruitment of teachers, although entry to secondary mathematics teacher education in Finland is at a satisfactory level, primary teacher education (Grades 1-6) is one of the most popular studies in higher education. Whereas we are able to re-

cruit enough students to fill most of the places available for secondary mathematics teacher education, the number of applicants for primary teacher education is 5-6 times the number of places available. Those who fail to obtain a place normally apply again one or more times in the following years. Note that in Finland primary teachers are known as class teachers because they must be able to teach all subjects to a class.

1.1 Why is primary teacher education so popular?

One of the main reasons is the special status of primary school teachers in Finnish society. For about 150 years, the teaching of reading and writing has been the responsibility of primary school teachers, a task previously undertaken by a holy organisation, the church. Because of the 1921 Primary School Compulsory Education 2 Act, a primary school was established in every village and the Primary teacher became an 'enlightening candle' for the community. After that time, beside each Church Street, there was a School Street in each town. By 1974, primary school teacher education had been completely transferred to universities, generating further interest in primary teacher education. From an affective point of view, Finnish youth remembers their time spent in Primary school, especially the early years, with great warmth. During these years, it is quite common to end the school day by shaking hands with the teacher and not uncommon to give the teacher a hug.

1.2. What about secondary teacher education?

The main reason for the relative popularity of secondary teacher education is related to more general factors beyond secondary school. These factors can be divided into four inter-related groups:

a) the welfare of schools
b) the pleasant work environment in schools
c) the daily traditions of school life
d) the school principles of care, comfort and equality.

These factors add a special meaning to our discussions but I will deal with them towards the end of this paper.

2. The Culture of the Teaching Profession

For the majority of Finnish teachers, teaching is a mission in which there has been a long tradition of teachers' interest in students' learning. This can be seen from two aspects: one is the interest of teachers in developing themselves, and the other is their intimate approach to helping individual students, for instance in solving a mathematical problem. It is common to see the teacher sitting on his or her knees in front of a student's desk in order to have a face to face quiet discussion. In Finnish schools there are no inspections. This not only saves money but also makes each teacher feel free and responsible. Every teacher can develop his or her own curriculum, building on the basic curriculum published by the National Board of Education and the more detailed curriculum accepted by the school, in which every teacher has played a part in developing. Teachers are also involved in writing the core National Curriculum. In addition, every teacher has the freedom to choose the textbooks needed for his or her class from those made available by different publishers. All this freedom gives every teacher an active role in the profession, making them highly interested in their work and offering them an opportunity to develop their experiences.

3. The Success of In-service Teacher Education

The in-service education of teachers is well organized in Finland, with different organisations providing different types of courses. For example, the National Board of Education provides different types of in-service education in mathematics teaching and local education authorities provide in-service courses for primary and secondary school teachers.

Teachers' associations also provide in-service education on mathematics teaching both locally and nationally. The main associations are Mathematical Subjects Teachers Association, Class Teachers Association, Teachers of Early School Grades Association (Grades 1 and 2) and Specialist Teachers Association. Each university has a centre for continuing education and each province has a Summer University. Both provide different types of education, including in-service education for teachers. Also, 'Free Institutes' and 'Civil Institutes' can provide inservice education for teachers. In this brief survey, I have mentioned the main organisations providing in-service education for teachers but this is not a complete list of providers. In-service education is sometimes provided free, otherwise teachers have to obtain funding from their schools. It is remarkable that in some cases teachers themselves pay for participation on in-service courses of interest to them – an indication of how interested teachers in Finland are in their profession and its development. I must also mention that in some cases teachers can have an influence on the content of in-service courses, increasing teachers' motivation to attend such programmes.

4. The Different Efforts Made to Develop Mathematics Education

Case study: the role of the University of Joensuu

We have made different efforts to develop mathematics education in Finland, especially during the 1990s when different organisations were involved. Let me now tell you about the role of the University of Joensuu. One of the main problems we had in mathematics education was the lack of primary school teachers who were mathematics specialists. Although as a minimum, half of the programme of study for an M.Ed. is devoted to education, a modest obligatory part is allocated to mathematics and mathematics education. The study programme for primary teacher education consisted of 160 credits while the minimum part of educational studies was 75 credits. The obligatory part of mathematics and mathematics education together was 3-4 credits. A credit relates to 20 teaching hours and each teaching hour is 45 minutes (Malaty 2004). As a result of the Bologna Declaration, changes have taken place in teacher education programmes for the 2005 quota but these changes have not affected the structure or the content of teacher education programmes so there have been no changes to mathematics and mathematics education programmes. Indeed, there had always been an opportunity to choose one or two school subjects in which to specialise or to choose elective educational studies, but mathematics had not been a popular choice. Less than 2% of students chose mathematics as a specialisation and this remained the case until 1992, when the work done at the University of Joensuu led to radical changes. At the moment, mathematics is one of the most popular specialist subjects on the Primary teacher education course at the University of Joensuu, with more than 80% of students specialising in mathematics (15 credits) and half of them continuing their studies to 35 credits. The study for 35 credits offers a secondary school mathematics teacher qualification.

4.1 The story of the University of Joensuu

What follows is personal experience and therefore I have some reservations in writing about it but nevertheless this experience may indicate, for some readers, a possible approach for trialling such developments in mathematics education in their own institutions. In Finland, each department of teacher education has a practice school, in most cases within the University campus. This school is called a 'Normal School'. During mathematics teaching practice, supervision is provided in the primary school of the Normal School by class teacher and the mathematics educator from the university. Our efforts in Joensuu to improve mathematics education started mainly from this supervision. In the year 1986-1987, I had a chance to observe 135 lessons of 45 students. This supervision included supervision of lesson planning. In this supervision, I asked my students to teach more systematic mathematical content than that provided by textbooks. In addition, I asked them to put emphasis on understanding and to use discovery strategies. These guidelines reflect some of our main teaching principles. In addition, to assist my students in lesson planning, I took part in teaching school classes. The success we gained from this work led us to propose setting up Mathematics Clubs in the Normal School and the first mathematics club was established in autumn 1988. Five teachers from the Normal School joined me in working in these clubs. In 1989, in response to a request from my university students, I established an evening mathematics club just for them. More than 50 students attended this club, which took place once a week between 18.00 and 19.30. The following year, 1990, this club was changed to an elective course 'Mathematical Thinking' (2 credits). Since 1993, this course has been split into two courses, 'Geometric Thinking' (1 credit) and 'Algebraic Thinking' (1 credit).

In 1993, more than 50 students chose mathematics as their specialist subject. This number represented more than half of the yearly quota of primary teacher students and was more than triple the number of students specialising in mathematics in all the other 10 Finnish teacher education departments. Since that time, this success has continued and the number of students specialising in mathematics has increased to more than 80% of the quota. In 1994, the Higher Education Evaluation Council nominated the University of Joensuu as the 'Centre of Excellence in Mathematics Teacher Education'. In the same year the international committee, which evaluated the faculties of education of Helsinki, Joensuu and Oulu Universities, wrote in its report that "... The University of Joensuu has been successful in developing a study program for teachers specialising in mathematics education, that can serve as a model for other faculties and other content domains . . . the program seems to help in freeing future teachers from the frequently observed anxiety for (the teaching of) mathematics." (Buchberger 1994, 13). Personally, that same year I was nominated 'Teacher of the year', which was offered by the Finnish Summer Universities.

4.2. Details of some other activities undertaken by my university

In 1990, the Joensuu Board of Education asked me to organise a mathematics club for those teachers who were interested in establishing their own mathematics clubs. 39 teachers attended this club. Most of them were class teachers or specialist teachers and some were Junior (Grades 7-9) or Senior (Grades 10 - 12) secondary school teachers. Because of this group of teachers, mathematics clubs spread to all the primary schools and to some secondary schools in Joensuu. In the first half of the 1990s, mathematics clubs spread all over the country through in-service education of teachers. The publishing of some of the clubs' materials and a teacher book gave support to teachers' work (Malaty 1992, Malaty 1993, Malaty 1994). During the 1990s, I was involved in more than 300 in-service education programmes in more than 75 municipalities, including all the major cities, reaching more than 12 000 teachers from kindergartens to senior secondary schools. The content of these in-service programmes was not always related to mathematics clubs but the success of mathematical clubs brought credibility to these programmes. Some colleagues who are mathematics educators attended some of these in-service education programmes. Since 1992, similar activities to those of spreading mathematics clubs have been done to bring mathematics teaching to kindergartens. This has given a relevant grounding for the preschool education act of 1998. Different teachers' associations have invited me to give talks at their conferences, especially the Association of Mathematical Subjects Teachers. At their 1993 conference I gave a talk on the need for developing Geometric Teaching. Two years later, in 1995, after there had been no textbooks in geometry for more than 20 years, a geometry textbook was published for senior secondary schools.

Finally, may I mention that our work has attracted the interest of different people, among them politicians and the media. Mathematics clubs became a topic for daily newspapers and weekly magazines. One of the magazines was distributed to every home in the country (1989). Also the TV channels 1 and 3 showed an interest in mathematics clubs and it was an item of the main news of the most popular channel: Channel 3. In 1994, I had the chance to speak directly to the public in a lecture for Channel 3 MTV-akatemia. The topic of the lecture was 'Developing Mathematics Teaching: What? Why? And How?' This publicity has supported other official efforts to develop mathematics education, including *The National Joint Action Programme for Developing Science and Mathematics*, 1996 - 2002 (The Ministry of Education 1999). 4.3. The University of Joensuu and PISA results

One of the most important achievements we can mention is that our region (Eastern Finland) now has more qualified teachers of mathematics. This we can see from the PISA results and also from our National Assessment Studies. Our efforts in developing teacher education in

our region are not only related to class teacher education. In conjunction with the efforts made in class teacher education mentioned earlier, similar efforts have been made in special teacher education. At the University of Joensuu, there is a Department of Specialist Teacher Education, where mathematics and mathematics education is just the same as that for class teacher education. Lectures on mathematics and mathematics education have been provided for both types of students combined in one group. This gave specialist teacher education students the chance to attend class teacher students' mathematics clubs in 1989. Since 1993 the majority of specialist teacher education students in our university have attended the same mathematics specialised programmes of the class teacher education students (15/35 credits.) This education has provided Primary Schools (Grades 1–6), and Junior Secondary Schools (Grades 7–9) in Eastern Finland with more qualified special teachers in mathematics teaching. In addition, some of the kindergarten teacher education students in our university have received the same education in mathematics and mathematics education as that for primary school teachers and specialist teachers, including the specialised courses mentioned above (15/35 credits).

5. Back to the Background for Success

At the beginning of our discussion we mentioned general factors related to the success in teacher recruitment. These were:

- the welfare of schools the pleasant work environment in schools
- the daily traditions of school life
- the school principles of care, comfort and equality.

In fact, these are the main factors without which all the efforts made in Finland to develop mathematics education could not succeed.

5.1. The welfare of schools

Traditionally, children and young people have special status in Finnish society. As Finland represents a type of welfare state, the government offers, mostly free of charge, all types of services, particularly to children and young people. This interest in children's and young people's development brings to teachers a remarkable respect. All types of education in Finland are not only free but also well supported: schools offer free healthcare; students and teachers receive free daily hot meals; there is free access to computers and printers, with all computers linked to the internet; students from Grade 1 onwards have the opportunity to access computers for email and other uses; comprehensive school students (grades 1-9) are provided with free textbooks, notebooks, pencils, etc.; for school journeys exceeding five kilometres, taxis are provided free of charge.

5.2. The pleasant work environment in schools

Finnish schools are well furnished and well equipped. Schools are open places, both physically and socially. On the one hand, schools are open so that visitors can enter through any open door. On the other hand, teachers' work is not subject to any type of regular inspection. In Finnish schools, there is no formality in either clothing or in teachers' and students' communications. Nevertheless, respect for teachers, especially in the case of primary schools, is obvious. Every morning the teacher finds the blackboard and/or other type of boards well cleaned. Finnish schools are relatively quiet, especially inside the classrooms. This gives the teacher a chance to take care of students and their learning, and in return it increases the teacher's interest in his or her work. There are no restrictions on the number of photocopies a teacher can make for distribution to children as learning materials. These materials and others like them are given out freely. Each classroom has a washbasin and paper towels for washing hands and other purposes. Classrooms, corridors, auditoriums, halls and bathrooms are always clean and warm and that is why most children walk about in socks or slippers inside school, giving them the feeling of being at home.

5.2. The traditions of daily school life

Every teaching hour is 45 minutes. In the 15 minutes break between lessons, the teacher opens a classroom window to refresh the air, even in winter. At break time students, especially those in Grades 1-6, must leave the classroom and go into the school yard. Teachers take it in turns to observe the children while they are outside. Each class and its teacher go to the dinning room together for their daily hot meal. Rectors of schools are able to contact all children and teachers through loudspeakers in each classroom. This means that from time to time the rector can ask children and teachers to stop their activities for a while to hear to some urgent information but this happens rarely.

5.3. School principles of care, comfort and equality

The care of each student in Finnish schools is obvious and can be seen from the relatively low number of students in a class, normally between 15 and 25. This has an impact on social elations in the class and on the learning of each individual child. From the social aspect, the low number of students ensures an intimacy between the teacher and students. The class lunch with the teacher is like having lunch as a large family and the food provided is similar to an ordinary family lunch, consisting of a hot dish and bread, salads, dessert and drinks, especially milk. The food is always fresh and served with care in a pleasant dining room. That is why students like school lunches. From the learning aspect, the low number of class students offers teachers the opportunity to take care of each learner. When a student shows some weakness, for example in mathematics, both the student's teacher and a specialist teacher (M.Ed) soon take care of him or her. This care includes, among others, organizsing 'support classes' and providing individual support. The results of this support care can be seen from PISA results. The small number of class students allows everyone to know each other better, therefore some students also receive help in their learning from other students in the class. Schools arrange parents' evenings to discuss general issues. These evenings are normally organised so that each student's parents can meet, in private, their child's teacher but some teachers, especially those teaching the first two grades, visit each child's home at least once a year. What about comfort? In Finnish schools, there is no need to think about punishing students. Physical punishment does not enter a teacher's head, even shouting is unnecessary. Punishment and control are not characteristics of the Finnish teaching profession; the aim of a teacher's work is to support students' development. For example, if a student in a comprehensive school leaves his exercise book at home, the teacher offers him a new one without any blame. What about the principle of equality? The dispersion of Finnish students is less than in other countries, as has been shown not only in the PISA studies but also in other earlier comparative studies. This can be seen as the result of implementing the principle of equality accepted by comprehensive schools, but the equality of the comprehensive school law of 8 1998 is just a reflection of traditions in Finnish society. The results of PISA show that there is no significant effect of different socio-economical backgrounds on students' learning. This is not an unexpected result as in Finland there is no interest in so-called private schools and private lessons are unknown. This is because there has been a long tradition of trust in public schools and in teachers. Parents send their children to school so that they will not only learn but also receive support in their development. Homework is not stressed and no homework is set before holidays or weekends. The limited amount of homework means that students are able to participate in hobbies and activities which interest them, especially music and sport, at the end of school day. Students are grateful to schools for offering delicious lunches and a place to meet their friends. Schools not only prepare children for the future but ensure that they have a good life in the present. Learning subjects is not the main objective of schooling and that is one of the reasons why it is difficult to see cheating in examinations in Finnish schools. Parents trust teachers to take care of their children and teachers are indeed interested in assisting the growth of every student, especially those who have weaknesses. That is why the dispersion of Finnish students' performance is less than in other countries. On the other hand, this also reflects one of our main problems in mathematics education, the need for more care of gifted students.

6. General Information on Higher Education

Higher education is free and well supported. For 9 months each can student receives a monthly bursary, currently 259 euros. He or she receives a monthly housing support of about 170 euros. Students are allowed to earn up to 505 euros per month and this sum is tripled to 1 515 euros in the three months summer holiday. In addition, a student can get a monthly loan of up to 220 euros per month. All course books are freely available on loan from university libraries along with access to on-line electronic literature.

References

Buchberger, F. et al. 1994, Educational studies and teacher education in Finnish universities. Helsinki. Ministry of Education, Department for Higher Education and Research.

Malaty, G. 1992. Geometrinen ajattelu I [Geometric Thinking I]. Porvoo: Weilin+ Göös.

Malaty, G. 1993. Geometrinen ajattelu I[Geometric Thinking I]. Didaktiikka [Didactics]. Porvoo: Weilin+ Göös.

Malaty, G. 1994. Algebrallinen ajattelu I [Algebraic Thinking I]. Porvoo: Weilin+ Göös.

Malaty, G. 2004. Mathematics Teacher Training in Finland. In: Series of International Monographs on Mathematics Teaching Worldwide. Monograph 2. Teacher Training. Budapest: Müszaki Könyvkiadó, A Wolters Kluwer Company. Ministry of Education 1999.

Finnish Knowledge in Mathematics and Sciences in 2002. Revision of the National Joint Programme (LUMA). Helsinki: Ministry of Education.

The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children's mathematical skills

The results of the PISA survey (http://www.pisa.oecd.org) have brought about satisfaction and pride in Finland. Newspapers and media have advertised that Finnish compulsory school leavers are top experts in mathematics.

However, mathematics teachers in universities and polytechnics are worried, as in fact the mathematical knowledge of new students has declined dramatically. As an example of this one could take the extensive TIMSS 1999 survey, in which Finnish students were below the average in geometry and algebra. As another example, in order not to fail an unreasonably large amount of students in the matriculation exams, recently the board has been forced to lower the cut-off point alarmingly. Some years, 6 points out of 60 have been enough for passing.

This conflict can be explained by pointing out that the PISA survey measured only everyday mathematical knowledge, something which could be - and in the English version of the survey report explicitly is - called "mathematical literacy"; the kind of mathematics which is needed in high-school or vocational studies was not part of the survey. No doubt, everyday mathematical skills are valuable, but by no means enough.

Out of the 85 assignments in the survey about 20 have been published. The assignments are simple numerical calculations, minor problems or deductions, interpretation of statistical graphics and evaluation of situations where text comprehension is an essential part. However, hardly any algebra or geometry is included. Nevertheless, the assignments are well in agreement with the goals of the survey; in fact, the goal was to study everyday mathematical knowledge.

The PISA-survey leaves us, thus, with unanswered questions regarding many skills, like computing with fractions, solving elementary equations, making geometrical deductions, computing volumes of solid objects, and handling algebraic expressions. Still algebra is perhaps the most important subtopic in mathematical studies after the compulsory comprehensive school.

In comprehensive school, the goal should be to learn the basic concepts of mathematics so that they can be used as a basis for more. Even the use of calculators does not change this situation: although calculators nowadays might be able to handle fractions, manual computation is essential to master since it is part of the foundations in handling algebraic expressions. Further study becomes impossible if the basics are not learned properly.

One reason for the increase of poor standards in the matriculation exam and in the beginning of university studies is, undoubtedly, the weakness of the foundation received in the comprehensive school. New, more difficult concepts are hard to learn because still in upper secondary school much energy is spent in reviewing concepts that should have been learned in the comprehensive school. This vicious circle continues in tertiary education: the high-school concepts are not properly learned, and further learning becomes more difficult. The PISA survey provides us with useful information regarding the mathematical literacy needed in everyday life and the ability to solve simple problems. These skills are simply not enough in a world which uses and utilizes mathematics more and more.

A proper mathematical basis is needed especially in technical and scientific areas, biology included. The PISA survey tells very little about this basis, which should already be created in comprehensive school. Therefore, it would be absolutely necessary that, in the future, Finland would participate also in international surveys which evaluate mathematical skills essential for further studies.

Kari Astala, Professor of Mathematics,
University of Helsinki

Simo K. Kivelä, Senior Lecturer,
Helsinki University of Technology

Pekka Koskela, Professor of Mathematics,
University of Jyväskylä

Olli Martio, Professor of Mathematics,
University of Helsinki

Dr. Marjatta Näätänen, Senior Lecturer,
University of Helsinki

Dr. Kyösti Tarvainen, Senior Lecturer,
Helsinki Polytechnic Stadia

and 201 mathematics teachers in universities and polytechnics

Published in Helsingin Sanomat in February 17, 2005.

Severe shortcomings in Finnish mathematics skills

About one half of those signing the article "The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children's mathematical skills" are teachers at polytechnics (universities of applied sciences) and technical universities in Finland. They do not teach "academic" mathematics but mathematics needed in technical practice and engineering sciences. In Finland over 12 000 students start engineering studies yearly.

The mathematics skills of new engineering students have been systematically tested during years 1999-2004 at Turku polytechnic using 20 mathematical problems. One example of poor knowledge of mathematics is the fact that only 35 percent of the 2400 tested students have been able to do an elementary problem where a fraction is subtracted from another fraction and the difference is divided by an integer.

If one does not know how to handle fractions, one is not able to know algebra, which uses the same mathematical rules. Algebra is a very important field of mathematics in engineering studies. It was not properly tested in the PISA study. Finnish basic school pupils have not done well in many comparative tests in algebra (IEA 1981, Kassel 1994-96, TIMSS 1999).

The polytechnic teachers of professional subjects are astonished at how poorly students can handle algebraic expressions and solve equations. The decreased mathematical skills of the students have forced to reduce the teaching material in those engineering courses that most heavily rely on mathematics. This is a serious matter taking into account the importance of engineering knowledge to the Finnish economy and welfare.

In technical universities the situation is not as bad, but it has been noticed also there that especially algebraic skills have weakened and that students have difficulties to handle comprehensive mathematical structures. The same deficiencies are noticed in the matriculation examinations for the graduates of the upper secondary schools.

There are positive aspects in mathematical knowledge and teaching in Finland. The success of basic school pupils in the practice-oriented numerical problems of the PISA study is fine. A contributory factor to this success is basic school mathematics books, which include excellent examples of everyday life. In addition to the compulsory courses, upper secondary school students have the possibility to deepen their knowledge in good optional mathematics courses. In Finland, the teachers are known to be motivated and they have obtained a good education.

However, it is undeniable that new students in universities and in polytechnics have poor mathematical skills on the average. To improve the situation, Ministry of Education should appoint a working group to find out what are the reasons for the deficiencies in the skills and to suggest measures for improvement. In this group, there should be a considerable representation of university and polytechnic teachers, since they know what kind of mathematics is really needed in follow-up studies and various applications.

At the same time, one has to consider the possibility that the first place in the PISA study is a Pyrrhic victory: are the Finnish basic schools stressing too much numerical problems of the type emphasized in the PISA study, and are other countries, instead, stressing algebra, thus guaranteeing a better foundation for mathematical studies in upper secondary schools and in universities and polytechnics.

The effect of the present upper secondary school practices to the poor average knowledge has to be examined, too. It is clear that a serious mistake is the practice of most upper secondary schools that one can get a final pass, even if he or she has failed some of the courses, and that one can be absent from many classes without a reason.

These things hamper the follow-up studies. Especially in polytechnics, it is apparent that the students do not any more have a common mathematical knowledge base, upon which to build. Students have different gaps even in important basic knowledge according to which upper school courses they failed or followed only partly. This causes inefficiency in teaching: a great part of the first-year mathematical teaching in polytechnics is a review of upper school mathematical subjects.

The mathematics of the upper secondary school and also that of engineering mathematics requires no special mathematical talents. We see this clearly from the fact that also those students (a third of all students) that come from vocational schools to polytechnics learn these mathematical skills.

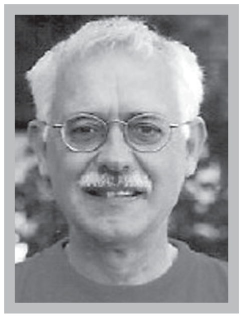
The following fact has also to be considered. The national LUMA development project set a target of 17 000 advanced syllabus examinations in upper secondary school mathematics. This target is far off; for example, last year 12 000 graduates passed this examination. The difficulties culminate in polytechnics, where about 40 percent of the students coming from upper secondary schools have passed only the basic syllabus examination.

Kyösti Tarvainen principal lecturer in mathematics
Helsinki Polytechnic Stadia

Simo K. Kivelä senior lecturer
Helsinki University of Technology

Published in Helsingin Sanomat in March 10, 2005

Optimering af vellyd



Af: Jørgen Tind
Institut for Matematiske Fag
Københavns Universitet
tind@math.ku.dk

1 Indledning

Igennem mange år har jeg beskæftiget mig med analyse af optimeringsmodeller og løsning af dem i forbindelse med mit arbejde, især gennem min tilknytning til studierne i matematik-økonomi, først i Århus og siden i København. I disse sammenhænge har modellerne typisk drejet sig om omkostningsminimering i produktions- eller transportplanlægning. Som det vil være mange bekendt udgør disciplinen lineær programmering her en substantiel bestanddel, og i denne sammenhæng bruges ofte økonomiske eller tekniske termer såsom prisfastsættelse af aktiviteter, forbrug af ressourcer, fastlæggelse af produktionsfaktorer o.s.v. Det er naturligvis meget nyttige sager, men det glædede mig nu også positivt, da jeg for nogen tid tilbage fik lejlighed til at læse artiklen "Optimal temperament" af Allen A. Goldstein, nu professor emeritus fra University of Washington, Seattle, USA, [2]. Thi heri benyttes lineær programmering lidt overraskende også til at fastlægge toneskalaer, eller lidt kort fortalt til at stemme et klaver.

I de nærmest forudgående numre af Matilde har der været artikler om toneskalaer og matematik. De anvendte teknikker og kriterier for analyserne har været mange: kædebrøker, fourieranalyse, gruppeteori m.v. Når man benytter lineær programmering er der i princippet kun et kriterium af interesse, nemlig en talværdi, som ønskes så god som muligt. I nærværende sammenhæng vil tallet her markere graden af vellyd. Den kritiske læser vil selvfølgelig straks indvende, at vellyd er en mangesidet sag. Jovel, men lineær programmering tillader rig variation også i udformningen af det kriterium, som man vil arbejde med. Det følgende skal derfor kun opfattes som et eksempel på, hvorledes man kan maksimere vellyd ved hjælp af lineær programmering.

2 Vellyd og frekvensmåling

Selv om noget af det følgende materiale genfindes i nogle af de tidligere artikler om emnet i Matilde, skal jeg her indføre notation og nogle af de fundamentale begreber.

Betragt tonerne i den sædvanlige 12-tone skala, svarende til den såkaldt veltempererede stemning. Lad f_i betegne frevensen af den i'te tone. For den veltempererede stemning, som har været nærmest enerådende i den vestlige verden siden slutningen af det 19. århundrede, gælder at

$$f_i = f_1 \cdot 2^{(i-1)/12},$$

d.v.s. at frekvensforholdet mellem to på hinanden følgende tonetrin er lig med $2^{\frac{1}{12}}$. Heraf fås bl. a., at $f_8 = f_1 \cdot 2^{\frac{7}{12}} = f_1 \cdot 1,4983$, hvilket er frekvensen for kvinten over den første tone i skalaen. Tonen med frekvensen $f_8 = f_1 \cdot \frac{3}{2}$ kaldes for den rene kvint over skalaens første tone, og den rene kvint over grundfrekvensen af svingningen på en udspændt streng fås i øvrigt naturligt ved at afkorte strengen til $\frac{2}{3}$ af den oprindelige længde under bevarelse af den samme spænding i strengen. I lighed hermed opfatter det menneskelige øre naturligt den rene kvint som den mest iørefaldende af de to, og misforholdet mellem frekvenserne er en af årsagerne til, at der kræves nogen erfaring i klaverstemning. Alle kvintintervaller i den sædvanlige 12 toneskala er således en smule klemte i forhold til den rene kvint. Den rette størrelse af kvinten på et klaver finder en klaverstemmer ved at måle hastigheden af de langsomme tonestød eller svævninger, som hørbart opstår netop ved interferens mellem den klemte kvint og overtonerne på den udvalgte grundtone.

I stedet for at arbejde med frekvenser (målt i herz) arbejder man ofte med måleenheden cent, som fremkommer ved en logaritmisk omsætning efter følgende formel:

$$F_i = (1200 \cdot \log \frac{f_i}{f_1}) / \log 2,$$

hvor F_i betegner tonehøjden af den i'te tone målt i cent. For den veltempererede stemning ses, at $F_i = 100(i-1)$. Specielt bemærkes, at den veltempererede kvint over grundtonen har $F_8 = 700$, hvorimod den rene kvint har $F_8 = 702$, altså en afvigelse på 2 cent.

3 Vellyd og løsning af et ligningssystem

Lad os som et eksempel prøve at stemme de første 3 toner over grundtonen på en sådan måde, at vellyd maksimeres ved at visse nøjere specificerede kvintintervaller gøres så rene som muligt, d.v.s. med en cent-difference tæt på 702. Mulighederne for konstruktion af skalaer (historiske og fremtidige) er således mangfoldige, men vi vil her lægge ud med at fastlægge det store tertsinterval til 400 cent, i øvrigt i overensstemmelse med den veltempererede stemning. Da en lille terts og en stor terts tilsammen er lig med en kvint, må derfor gælde at

$$F_4 + 400 = 702. \tag{1}$$

Endvidere, da summen af to store tertser minus en lille sekund også er lig med en kvint, fås

$$400 + 400 - (F_4 - F_3) = 702$$

eller omskrevet

$$F_4 - F_3 = 98. \tag{2}$$

Tilsvarende fås

$$F_3 - F_2 = 98 \tag{3}$$

og

$$F_2 - 0 = 98. \tag{4}$$

Ligningssystemet (1) – (4) er lineært uafhængigt med færre variable end ligninger og har her ingen fælles løsning. Enhvert løsningsforslag vil således medføre en afvigelse mellem venstre- og højresiderne i ligningssystemet. Vi er derfor nødsaget til at acceptere løsninger med afvigelser. Flere muligheder for valg af acceptable løsninger står åbne, men vi vil her søge af finde en løsning, således at den maksimale afvigelse bliver så lille som muligt. Det svarer, omend enkelt fortalt, til at finde en løsning, hvor den største afvigelse fra vellyd bliver så lille som muligt.

4 Vellyd og lineær programmering

Til dette formål vil vi benytte lineær programmering, der går ud på at minimere (eller maksimere) en lineær funktion i flere variable, som samtidig skal tilfredsstille et system af ligninger og/eller uligheder. Mere om lineær programmering findes i adskillige lærebøger på flere niveauer. Her henvises til Hillier og Lieberman [3], som er meget udbredt i den introducerende undervisning på universitetsniveau jorden rundt.

Vi indfører hjælpevariablen s og betragter i stedet for ligning (2) følgende to uligheder:

$$\begin{aligned} s - F_4 + F_3 &\geq -98 \qquad (5)\\ s - F_3 + F_4 &\geq 98. \qquad (6) \end{aligned}$$

De variable F_3 og F_4 er løsninger til ligning (2), hvis og kun hvis de også er løsninger i ulighederne (5) og (6) med $s = 0$. Endvidere ses, at for givne værdier af F_3 og F_4 angiver det mindste s, som tilfredsstiller ulighederne, tillige den numeriske størrelse af en afvigelse mellem siderne i ligning (2). Den variable s vil således angive manglen på vellyd af kvintintervallet beskrevet i ligning (2). Denne tankegang gentages for de øvrige ligninger/kvinter, hvorved vi får følgende supplerende system af uligheder:

$$\begin{aligned} s - F_3 + F_2 &\geq -98 \qquad (7)\\ s - F_2 + F_3 &\geq 98 \qquad (8)\\ s - F_2 &\geq -98 \qquad (9)\\ s + F_2 &\geq 98 \qquad (10)\\ s - F_4 &\geq -302 \qquad (11)\\ s + F_4 &\geq 302. \qquad (12) \end{aligned}$$

For givne centværdier af de variable F vil den mindste værdi for s, som tilfredsstiller ulighederne (5) – (12) angive den største afvigelse fra vellyd blandt de studerede kvintintervaller. Vi ønsker derfor at minimere s, således at s samtidig indgår i en løsning af ulighederne (5) – (12). En optimal løsning findes f. eks. ved at bruge en programpakke til løsning af lineære programmeringsproblemer. Se f. eks.[1]. Vi får her

$$s = 2 \text{ og } (F_2, F_3, F_4) = (100, 200, 300),$$

hvilket i øvrigt svarer til den tempererede stemning. Det er således umuligt at komme under et centdifference på 2 i den største afvigelse fra vellyd af de opstillede kvinter.

5 Afsluttende bemærkninger

Mange vil sikkert opfatte ovenstående sammenhæng mellem tonefrembringelse og lineær programmering som lidt af et kuriosum, og Goldstein understreger da også i sin artikel [2], at emnet tages op for tillige at kunne fornøje læseren.

Det er endvidere begrænset, hvad der findes af yderligere litteratur om emnet. Her skal afslutningsvis nævnes anvendelsen af lineær programmering til stemning af kirkeklokker. Den interesserede læser henvises til artikel af Richard Graham John Mills [4].

Litteratur

[1] General Algebraic Modeling System (GAMS), www.gams.com.

[2] Goldstein, A. A., "Optimal Temperament", *SIAM Review* 19 (1977) 554 – 562.

[3] Hillier, F. S. and G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, McGraw-Hill, 2004.

[4] Mills, R. G. J., "Tuning of bells by a linear programming method", *Journal of Acoustical Society of America* 85 (1989) 2630 – 2633.

Stor matematik mellem Prado og Escorial

Personlige indtryk fra ICM 2006, Madrid

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Roskilde Universitet Center
email: booss@ruc.dk

Matematikkongresser er mærkelige. Den Internationale Matematikerkongres (International Congress of Mathematicians - ICM) løber af stablen hvert 4. år og i august 2006 var det Madrids tur. Jeg har været med til næsten alle ICM i min matematiske levetid, men matematisk set var ICM 2006 for mig den største begivenhed af dem alle. Hvorfor denne superlativ? Det skal jeg nok forklare.

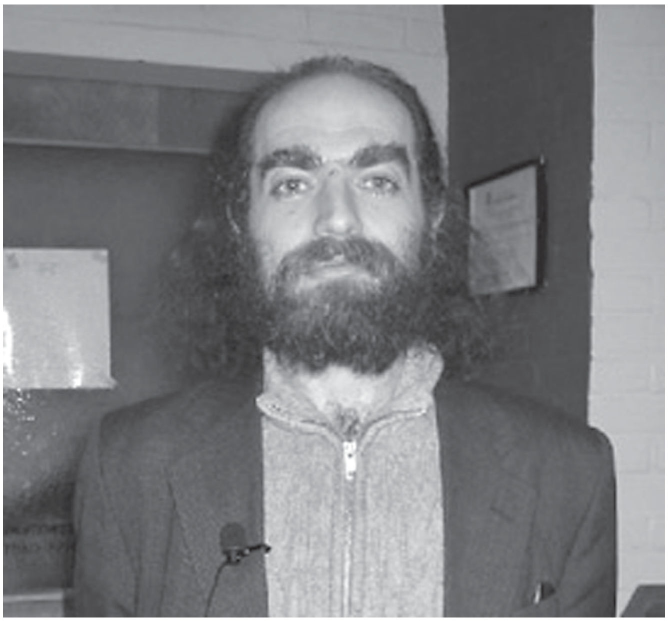
Men en smule mærkelige var alle disse ICMs: de er jo små kongresser med 3-4.000 deltagere. Lægekongresser, som Diabeteskongressen i København i september 2006, samler let det tredobbelte. Og de matematiske seminarer, workshops og fagkonferencer jeg ellers deltager i, ligger i Oberwolfach-størrelsen og samler således sjældent mere end 20, 30, 40 eller maks. 100 deltagere, ofte koncentreret på en weekend eller 5 dage og normalt med et overpakket program i hæsblæsende tempo.

ICMs er anderledes: de går over 10 dage. Der er to, højst tre 60-minutters plenarforedrag om formiddagen, hvor alle møder alle, og alle får en fælles referenceramme og en chance for at lære noget nyt eller at se eget arbejde i et nyt lys. Om eftermiddagen fortsættes der så måske med et enkelt plenarforedrag plus to til tre indbudte 45-minutters forelæsninger parallelt med et gedemarked af 20-minutters pligtpræsentationer for 5-10 venner, tilfældige forbigående - og som dokumentation over for bevilligende myndigheder. Nogle af dagene bliver afrundet med rundbordssamtaler og æresforelæsninger (her en aften med en pudsig selvbeskuende Mandelbrot). Alt går langsomt. Enormt afslappet. Man møder de samme venner igen og igen og snakker med dem i pauserne eller om aftenen, når man går ud at spise.

Mest mærkeligt er det indbyggede ranglistesystem med priser og fremhævelser gennem indbydelse til foredrag. Vi ved i København, hvor meget Hardy og vores Bohr morede sig med at rangliste andre matematikere og deres resultater. Det var matematik-politisk ikke korrekt. Men selvfølgelig gør vi det alle. Der er andre felter af menneskelig virksomhed hvor man råder over eksplicitte skalaer over præstationernes hierarki: valgresultater i politik, salgsresultater og aktiekurser i økonomi, atleternes ydelser og klubbernes tabelplacering i sporten. Men det spændende i matematik-hierarkisering er normalt dens ikke-eksplicitte karakter: ikke nødvendigvis antallet af publikationer, citationer, PhD-studerende. Men vi ved om to matematikere, hvem der har rykket mere; og vi kan se det i kropssproget når de to sidder alene sammen eller med andre ved kaffebordet. Intet andet fag er så autoritetsfikseret som matematik - med nødvendighed, fordi en stor tanke, artikel, bog af en anden matematiker kan have forandret vores liv og styret det for årtier eller have givet vores eget arbejde større mening og perspektiv. Men at diskutere det ganske åbent, det gør vi kun ved ICMs uddeling af Fieldsmedaljer og foredragsindbydelser.

Hvad rangerer højst i 2006? Den spanske konge, som kom til kongresåbningen fra sin sommerresidens i Escorial og i øvrigt læste mange ganske fornuftige ord om matematik, kultur og samfund op fra sin ghostwriters manuskript, uddelte fire Fieldsmedaljer (uddelt siden 1936 og givet til personer der ikke var fyldt 40 ved årets begyndelse), Nevanlinnaprisen og den nystiftede Gausspris. Der gives altid mindst to Fieldsmedaljer, nemlig, som hvasse tunger siger, en *Hermann-Weyl-medalje* for matematikken som enhed med stærke tværforbindelser mellem partielle differentialligninger, talteori, geometri, algebra og matematisk fysik; og en *fransk medalje* for en frankofon eller stærkt fransk inspireret matematiker, lige meget på hvilket felt.

Andrei Okounkov



Grigori Perelman

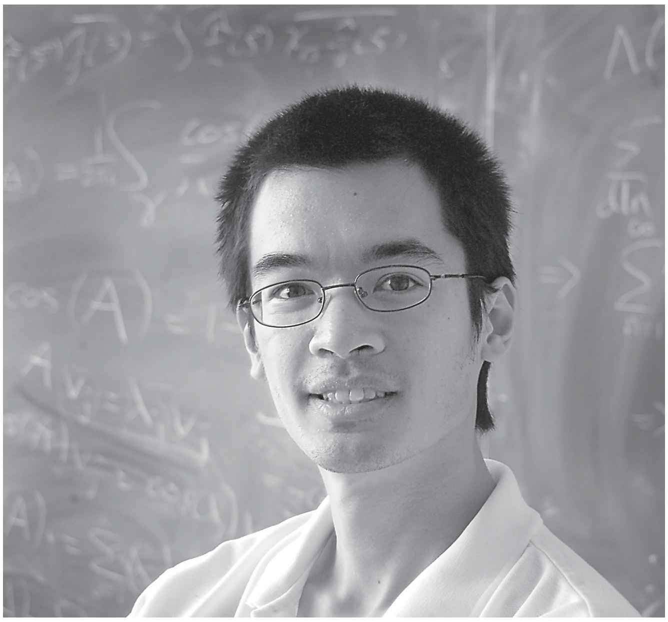
I Madrid blev det til fire Fieldsmedaljer. I alfabetisk rækkefølge: (1) russeren *Andrei Okounkov*, p.t. Princeton og ikke ukendt i Danmark p.g.a. sit samarbejde med vores nye Niels-Bohr professor Nicolai Reshetikhin i Aarhus om probabilistiske repræsentationer i algebraisk geometri, f. eks. tilfældige flader som partikelmodeller i strengteori; nummerering af supersymmetriske gaugeteorier i fire dimensioner; og geometriske og kombinatoriske aspekter ved smeltning af kubiske krystaller.

Hvor rig Okounkovs matematiske verden er, kunne man se, da han efter modtagelsen af Fieldsmedaljen formåede at ændre titlen for sin egen præsentation fra det vilde Random partitions and instanton countings (annonceret i det oprindelige program blandt de tekniske foredrag i sektionen "Probability and Statistics") til det populære Enumerative geometry of curves in threefolds med holdepunkter for enhver i det store auditorium: efter at han mindede os om, at kubiske kurver i planen er givet ved ni parametre, således at dem der møder otte givne punkter danner en 1-parameter familie $F_1(x,y)+tF_2(x,y)=0$ med kendte konsekvenser for polynomial interpolation. Så spurgte han generaliserende: hvor mange kompleks-1-dimensionale kurver af given grad og slægt ("Geschlecht = genus") findes f.eks. i en boks X, når kurverne alle går gennem et system af givne lukkede kurver $\{\gamma_j\}$. Pointen er at han ikke vil tælle i et enkelt tilfælde, men beskrive den overraskende rige struktur i helheden af sådanne kurver.

Simpelt spørgsmål - forholdsvis simpelt svar for $\dim X > 3$, nemlig at antallet vokser med slægten, og selvfølgelig for $\dim X < 3$ at antallet falder med slægten, mens $\dim X = 3$ er kritisk og kræver ganske nye metoder, bl. a. virtuos omgang med stokastiske matricer, fordi antallet viser sig at være uafhængigt af slægten. Det var didaktikeren og teknikeren Okounkov. Men så kom filosoffen med sine visioner, nemlig de to kendte betragtningsmåder på kurver, enten parametriseret, dvs. som afbildning, eller som ligning, dvs. som ideal med tilsvarende dualitet mellem `plot` og `implicitplot` kommandos i computerpakken; tilsvarende dualitet mellem strenge og gaugefelter i kvantum-graviteten; Gromov-Witten og Donaldson-Thomas invarianter i differentialgeometri og to grundlæggende forskellige betragtningsmåder ved degenererede kurver. Gennem Okounkovs mikroskop kan alt på den ene side betragtes organiseret i modulirum af stabile afbildninger, og på den anden side som idealer af polynomer og tredimensionale partitioner med indbydelse til hans formodning om en variabeltransformation som giver en eksakt korrespondance mellem de to tilgange.

Fieldsmedalje (2) skulle gå til en anden russer, *Grigori Perelman* i St. Petersburg for hans bevis af Poincarés Formodning om at alle enkeltsammenhængende kompakte tredimensionale topologiske mangfoldigheder er homeomorfe med sfæren S^3. Som man også kunne læse i danske dagblade hentede Perelman ikke "sine"15.000 canadiske dollar. Matematisk og mediemæssigt stod Perelman alligevel i centrum under hele kongressen. Der var en kort brillant introduktion ved John Lott og to store plenarforedrag om hans arbejde, først en temmelig tør sag ved Richard Hamilton, som sammen med S.-T. Yau havde udviklet hvad der under Perelman blev en succesrig løsningsstrategi, byggende på Ricci flow; den anden ved den gudbenådede topologiformidler John Morgan: meget underholdende og sådan at man næsten kunne tro man havde forstået alt. Her den korte version: topologi i tre dimensioner er for svært. Den duer bedst når der er mange frihedsgrader. Vanskelige problemer kræver differentiale midler. Og det var netop Hamilton og Yaus ide at introducere en ekstra variabel, kald den tid, og lade et ikke-lineært parabolsk system af partielle differentialligninger virke som varmeledningsligning, nemlig sprede krumningen ligeligt over hele mangfoldigheden.

Genialt og simpelt. Men det virkede ikke, fordi der ved spredningsprocessen (skiftevis oppustning og sammentrækning) kan opstå singulariteter og ballonen sprænges før man havde tid til at checke at den var en ballon.



Terence Tao

Wendelin Werner

F. eks. måtte man frygte at glatningsprocessen kunne føre til *cigarsingulariteter*, som vokser til uendelig cigarlængde under deformationen. Men så viste Perelman i 2002 og 2003 med sine tre legendariske ikke-peer-reviewed ultrakorte artikler lagt ud på arXiv og kun for eksperter på højeste niveau, hvordan problemet med glatning af singulariteter kan løses. Fantastisk, men ærgerligt for mig, som troede mere på Heegård-diagrammer og kirurgi (klippe-klistre-metoden) i tre og fire dimensioner og den tilsvarende Floer-Witten-Seiberg-teori (også med en ekstra differentierbar parameter og Dirac-type differentialligninger) som hovedingrediens til at forstå tremangfoldigheder.

I mellemtiden har vi nu fire udarbejdelser af Perelmans bevis for almindelige topologer, differentialgeometere, pdefolk, numerikere, gravitationsfysikere, PhD-studerende og - forhåbentlig også danske andendels studerende, hver på mellem 192 og 473 sider: H.-D. Cao og X.-P. Zhu i Asian J. Math.; J. W. Morgan og G. Tian (kommer som bog, men er tilgængelig på arXiv); B. Kleiner og J. Lott (også på arXiv); og G. Besson (henvisning på http://www.claymath.org/ med mange spændende links). En hadefuld smædeartikel imod S.-T. Yau i *The New Yorker* gav indtryk af at der er prioritetsproblemer, som Hamilton, Yau og begge hans tidligere studerende Cao og Zhu har tilbagevist, dog uden at tidsskriftet vil trykke rettelsen. Hvem der har bevist en stor sætning står altid på skulderen af andre: Atiyah-Singer Indeksteoremet gik tilbage til en formodning af Gelfand og fulgte eksakt Hirzebruchs og Thoms kobordismeide. Det blev først forståeligt for en bredere skare af matematikere, da seminarerne med tilsvarende noter blev afholdt i Bonn, Boston, Moskva, Paris og Princeton. Men beviset var Singers og Atiyahs til trods for kortheden af deres første artikel med beviset. Seminarene fyldte ikke huller i det oprindelige bevis, men hver gang et spørgsmål dukkede op viste det sig, at Singer og Atiyah allerede havde tænkt over det og kendte løsningen. Indtil nu går det med Perelman fuldstændigt den samme vej. Det er utroligt hvor mange kort han tilsyneladende har i ærmet - og hvor svært det alligevel er for tilsyneladende alle andre.

En af gisningerne om, hvorfor Perelman havde afvist Fieldsmedaljen, tror jeg, jeg kan afvise: en matematiker med så overlegent kendskab til alle aspekter af problemet og med sit klart afgørende endelige bidrag til løsningen kan ikke irriteres med smålige prioritetsspørgsmål. Det er en journalistkonstruktion. Det kan ikke være grunden. Til Sir Ball, præsidenten for den Internationale Matematikerunion, der opsøgte Perelman i St. Petersburg og havde to meget behagelige dage sammen med ham, skal Perelman have sagt noget i retning af, at han ikke bryder sig om den måde, den matematiske forskningsverden fungerer på, og slet ikke om prisernes rolle som styreinstrument for unge menneskers liv. Det lyder som om han har tænkt meget, ikke alene over Ricci flow men også om matematikken og dens mening, om offentlighedsdannelsen og livet.

Fieldsmedalje (3) gik til australieren *Terence Tao*, nu UCLA, der med sine 31 år og mange artikler og bøger, spændende over partielle differentialligninger, kombinatorik, harmonisk analyse og additiv talteori allerede er en både virtuos tekniker og en dybt filosofisk ånd på samme måde som Okounkov og Perelman. Ifølge det oprindelige program skulle han tale om *Long arithmetic progressions in the primes*. Og det gjorde han også. Men han ændrede titlen og hele bølgelængden til *The dychotomy between structure and randomness*. Et vidunderligt foredrag hvor enhver i salen måtte spørge sig selv om det samme som Charles Fefferman i sin laudatio for Tao: ”What amazing technical progress? What a grand synthesis? How could anyone not have seen this before? Where do his ideas come from?”Tao skriver næsten så hurtigt som han tænker. Så der er ingen grund til at gengive nogle af hans geniale ideer her. Men ingen har været i tvivl om at mødet med denne beskedne unge mand, enhver svigermors drøm, var mødet med et geni. Sikke en oplevelse!

Fieldsmedalje (4) gik til *Wendelin Werner*, Paris, for hans bidrag til stokastisk Loewner udvikling, geometrien af todimensionale Brownske bevægelser og konforme feltteori. Nu er jeg ikke særlig interesseret i metoder som kun virker i to dimensioner og mangler potentiale til at blive generaliseret til tre dimensioner, især når vi snakker Isingmodeller og perkolation. Men hans (og Oded Schramms) resultater vedrørende tilfældige løkker i planen er ganske fantastiske, må jeg indrømme. Altså, f. eks. at en tilfældig opførelse af fysiske systemer ved faseovergangen kan puttes i ganske bestemte bokse, disse *Stochastic Loewner Evolutions*, og andet kan ikke ske! Imponerende, men efterhånden hørt før ved flere lejligheder.

Stokastik er kommet hjem. Et særdeles vigtigt perspektiv ved alle Fieldsmedaljer (undtagen Perelmans) var anerkendelsen af stokastikken som et matematisk kerneområde. Set fra RUC, Aarhus og Aalborg er der ikke noget omvæltende i det. Men for andre miljøer rundt om må det være ganske nyt og befriende hvad der skete i Madrid efter årtiers udgrænsning eller i hvert fald nedtoning af statistik og sandsynlighedsteori på tidligere ICMs og i matematikken som helhed. Den nystiftede tyskfinansierede Gausspris for "skabelsen af ny matematik som har vist sig af særlig betydning i anvendelser"gik også til stokastik, til *Kiyoshi Itô*, emeritus i Kyoto. Da et foto af Itô i 1942 blev vist, hviskede en fransk ven en smule spidst til mig: aksepris! Nuvel. Ingen fortalte hvad Itô virkeligt lavede under krigen. Og måske har den lethed hvormed den potentielt destabiliserende optionshandel har udbredt sig i finansverdenen (efter at være blevet gjort håndterlig ved at bygge på nogle af Itôs ideer) en mere ødelæggende indflydelse på menneskeheden end hans abstrakte tanker havde for det japanske militærmaskineri under krigen.

Stokastik er tilsyneladende også et vigtigt element i Nevanlinnapristageren *Jon Kleinbergs* (Cornell) arbejde med netværksproblemer som smart strukturering, klassificering og vægtning af hjemmesider for søgemaskiner.

The power and weakness of randomness nytitulerede Avi Wigderson sit plenarforedrag, og andre foredrag fulgte op på hans ideer om et nyt syn på beregningernes kompleksitet, pålidelighed og anvendelighed.

Jo, jeg kunne blive ved at fortælle om de fantastiske matematiske oplevelser vi fik serveret i Madrid. Men jeg ved godt, at det kan være lige så fjernt og uvedkommende for en læser som hvis jeg beskrev alle de fine små tapas og store spanske måltider gastronomien bød på. Jeg må hellere samle op.

Forholdet mellem ren og anvendt matematik. Per definition har de mest matematiserede fagområder som meteorologi, geodæsi, optik, kryptering, kompression, ingeniørfagene, økonometri og genetik, deres egne kongresser og holder sig for det meste langt væk fra ICMs. Orienteringen om nye virkelige anvendelser af kendt matematik og nye matematiske ideer der har været inspireret af virkelige anvendelsesområder har derfor været nedtonet ved tidligere ICMs. Det blev meget anderledes i Madrid: jeg fik en klar fornemmelse af at alle medaljepræmierede, mange af plenarforelæsere og ganske mange indbudte foredragsholdere havde et omfattende kendskab til matematisk fysik (mest i forhold til *Quantum Gravity*), materialevidenskaberne (*kritiske fænomener, perkolation, energidreven mønsterdannelse*), avancerede teknologiske processer (f. eks. *Molecular Beam Epitaxy*) og biologisk-medicinske problemer (fra *hjerte-kar-matematik* over fascinerende nyere matematisk arbejde om kapaciteten og begrænsningerne ved *Molecular Dynamics*, til statistisk analyse af *Hot Spots* ved genetisk nykombination i sædceller og æggene for at forstå arvelige sygdomme - i mangel af lange genetiske anerække-data).

Som C. M. Newman (fra Courant Institute) rammende sagde i sin laudatio for Wendelin Werner og med gyldighed for hele kongressen og måske langt ud i matematikken som den er nu: "vandskellet for sammenstrømning af matematik og fysik er blevet fjernet mange steder; og der hvor før kun stringente beviser gjaldt for noget, har vi taget værdien af ganske nye ideer og forklaringer til os.-Jo vist, men det er nu heller ikke ganske uproblematisk at følge f. eks. en rapport af den unge fysiker Marcos Mariño om *Gromov-Witten invariants and topological strings*, med dens fyrværkeri af ideer og hypoteser - i et matematisk ørkenlandskab, hvor de fleste begreber mangler klare definitioner og næsten ingen hypoteser er bevist eller eksperimentelt bekræftet.

Kongressen sluttede med en velbesøgt rundbordssamtale med nogle af matematikkens klogeste hoveder (Lennart Carleson, Ronald Coifman, Yuri Manin, Helmut Neunzert og Peter Sarnak) om *Are pure and applied mathematics drifting apart?* Mange kloge ord, som da den gamle *Carleson* viste sit hjerte og sin forståelse for unge mennesker og forsvarede deres krav på meningsfuld undervisning, hvor introduktion til nye matematiske ideer skal gå hånd i hånd med nye anvendelser, en smule à la RUC.

Nogle ord var mindre gennemtænkte, f. eks. da *Neunzert*, en rejsende i universiteternes industriorientering, proklamerede den gyldne "Second world of mathematics": *We should all be happy that mathematics has become technology. It helps everybody.* Og: "Industri tilbyder dialog, tilføjer penge og tiltrækker studerende.-Rigtig set, men alt for nærsynet. Eller når *Sarnak* gentog den gamle traver om at alt driver fra hinanden - i en kongres hvor vi alle lige havde set hvordan tværtimod båndene mellem ganske forskellige grene af matematikken er blevet tættere og solidere. Han overdrev måske bevidst kulturforskelle mellem "os-og "anvendelser", med vores hellige gral af beviser - jo længere desto mere værdifulde - imod fysikernes hyldest til enkelthed. Jo, og dog: Faktisk har jeg brugt adskillige teoremer som er indlysende for mig og hvor jeg ved at der eksisterer et bevis uden at jeg først tjekkede beviset - og for det mest anvendte teorem i de sidste 60 år, Cramérs sætning om χ^2-fordeling ved f frihedsgrader, findes mig bekendt kun et bevis i tryk, nemlig Cramérs originale, som ingen lærebogsforfatter nogensinde havde lyst og tid til at gengive til sine studerende og læsere for $f > 1$. Eller Sarnaks rammende karakterisering af vores levetid som en guldalder for ren matematik: det passer, fra afklaring af Kontinuumhypotesen i 1964 over Firefarveproblemet i 1976 og Den Store Fermat i 1993 til Poincarés Formodning i 2003. Og at mange af de bedste nye matematiske ideer har hentet inspiration fra andre fag, det er også rigtigt. Men kan det give grund til også nu at forvente en begyndende guldalder for anvendelser af matematikken, som mange matematikpolitikere gerne postulerer, når de føler at matematikken er i en legitimationskrise eller har vanskeligheder ved at tiltrække studerende i de for selvfinansieringen nødvendige mængder og kvaliteter?

Manins billede var mørkere. Han skelnede mellem tre kendte anvendelsessituationer efter deres status som erkendelsesmæssige værktøjer: (i) *ad-hoc model* (empirisk underbygget black box som Ptolemaios' over 2000 år gamle epicykler og den moderne partikelfysiks standardmodel), (ii) *teori* (de sjældne, noble, aristokratiske modeller, som består af få ligninger der er fuldt ud overbevisende og forklarer en masse observationer) og (iii) *metafor* (når et komplekst område af fænomener menes at være sammenligneligt med en simpel matematisk struktur - kun godt til at skære forkerte antagelser ud).

Manin delte Sarnaks beskrivelse af vores matematiske guldalder, men så intet grundlag for at den konsoliderende kraft indenfor de sidste 50 års matematik skulle genopstå i anvendelserne med deres vilde og vildtvoksende fænomenverden. Med variation af et berømt Hardycitat sluttede Manin aftenen med sin definition: "An applied mathematician is a person who is doing very well on things which never should have been done."

Jean-Pierre *Bourguignon* var ikke tilfreds med diskussionens struktur. Han efterlyste en adskillelse af samfundsniveauet med sigte på samfundsændringer, matematikkens rolle og etiske spørgsmål; professionsniveau med sigte på fremtidige jobs for vore studerende; og det egentlige genstandsområde hvor ren og anvendt slet ikke driver bort fra hinanden. Tja, Jean-Pierre, hvis diskussionerne altid kunne skilles så rent fra hinanden...

Historie og didaktik. Matematikhistorikere og matematikdidaktikere har deres egne kongresser. I Madrid var det venstrehåndsarbejde, men ikke uinteressant. *Historikerne* koncentrerede sig om iberisk og sydamerikansk matematikhistorie, dog uden at tematisere nogle matematikeres rolle i forsvaret af den spanske republik i 1930erne, emigrationen og nybegyndelsen efter Francoregimet - og uden kontroverser omkring rollen af Francos trofaste blandt matematikerne.

Didaktikerne havde også nogle interessante diskussioner, navnlig om kontroversielle emner i den K-12 (dvs. gymnasiale) matematikundervisning med pikant polemik især fra US-amerikanske deltagere. Men ellers var didaktikdiskussionen desværre gennemsyret af reklamesnak à la Neunzert om hvor lykkelig samfundet og vi alle bliver, bare matematikken bliver mere synlig og udbredt. Det frydede mig at jeg fik støtte af Bjørn Engquist der også var bekymret over tendenser til at oversælge matematikkens samfundsmæssige betydning.

Dansk synlighed - storhed eller begyndende senilitet? Det var flot at Mikael Rørdam var en af de indbudte foredragsholdere og Ib Madsen plenarforedragsholder. Hvor var hans foredrag smukt: en stille strøm af fuldstændig naturlige definitioner hvorfra hans nye resultater (med Søren Galatius, Ulrike Tillmann og Michael Weiss - *The Gang of Four*) om topologisk omskrivning af modulirum af komplekse strukturer tilsyneladende fulgte som børneleg med bevis af lange åbne formodninger af Mumford og meget vidtrækkende sideaspekter for Segals konforme feltteori. Kompleks analyse, algebraisk geometri, geometrisk partikelfysik og gruppeteori smeltede sammen på en måde, så at alle i salen troede de kunne følge med. OK. Det kunne jeg nu ikke i alle detaljer, da jeg senere om aftenen gennemgik mine noter i hotellet. Men den tryllekunst, Ib udførte for os, hører nu med til de store matematiske oplevelser.

Så, der var stor dansk synlighed - ikke mindst i lyset af at også den forrige kongres i Beijing 2002 havde en plenartaler fra Danmark (Uffe Haagerup), mens f.eks., tyskerne hverken i Madrid eller i Beijing kunne fremvise en plenartaler.

Men Madrid viste også den rapide aldring i dansk matematik med en gennemsnitsalder på omkring 63 blandt de danske deltagere, dvs. med udløbsdato senest om 7 år. Ingen unge folk fra Danmark til forskel fra de mange unge man ellers kunne se. Men det passer godt til mit generelle indtryk, at ligesom i andre offentlige sektorer har de sidste 10-15 års økonomiske opsving i Danmark forbigået de matematiske institutter. Der har ikke været en lind regn af nye positioner for vore unge, men snarere fortsat fastfrysning og nedskæringer.

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS MADRID 2006

Formidling og synliggørelse af matematik

Af: Iver Ottosen,
Aalborg Universitet
email: ottosen@math.aau.dk

Dansk Matematisk Forening holdt årsmøde på Aalborg Universitet den 19. maj 2006. Dekan Frede Blåbjerg bød velkommen, og herefter holdt Hanne Schultz, ph.d. studerende ved Syddansk Universitet, et foredrag med titlen "The invariant subspace problem". Den næste foredragsholder var årets Abel prisvinder Peter Lax fra Courant instituttet i New York. Han talte om "The numerical solution of hyperbolic systems of conservation laws". Efter frokosten var der foredrag af Snorre H. Christiansen fra Oslo Universitet. Han havde vundet EURYI prisen i 2005 (European Young Investigator award). Hans foredrag drejede sig om "Some homological algebra techniques in numerical analysis".

Sidste punkt på dagsordenen inden den afsluttende generalforsamling var en paneldiskussion om emnet "Formidling og synliggørelse af matematik". Paneldeltagerne var

VLH: Vagn Lundsgaard Hansen, DTU,
CRK: Carsten R. Kjær, Aktuel Naturvidenskab,
NF: Nils Fruensgaard, Vestre Borgerdyd Gymnasium.

Ordstyrer Lisbeth Fajstrup (AAU) bød velkommen. Hun havde ringet rundt til forskellige aviser for at sælge budskabet, at Peter Lax kommer til Aalborg. Det var lykkedes at sælge det til Nordjyske, som havde valgt overskriften "En superstjerne kommer til byen". Lisbeth gav et kort oplæg til diskussionen: Universitetsloven forpligter os til at formidle matematik, og det er vi også selv interesserede i at gøre; men til hvem, hvordan gør vi, og hvem af os skal gøre det?

Hver af paneldeltagerne holdt derefter et indlæg.

VLH: *Hvem skal vi formidle til?* Vi skal simpelthen formidle så bredt som vi overhovedet kan. Vi skal formidle til alle aldersgrupper og professioner. På den måde kan vi få mulighed for at tale med hinanden om matematik på arbejdspladser, i hjemmet og hvor mennesker nu ellers mødes. Matematisk samtale er det, der skal til. At man taler ansigt til ansigt med nogen om, hvad vores fag går ud på, må til syvende og sidst være den ypperste form for formidling.

Vi bliver også nødt til at benytte alle medier. Skolerne er det vigtigste, hvor størstedelen af vores formidling foregår, men vi skal også benytte os af aviser, blade, internettet samt radio og fjernsyn. Hvad kan vi gøre? På skolerne kan vi holde *foredrag*, hvilket mange af os da også gør. Men vi kan også arrangere'*workshops* for særligt talentfulde unge mennesker. Dem har man afholdt en masse af i f.eks. England, og det virker ret godt. Internettet er også udmærket, men det kan ikke stå alene. For aviser, blade, radio og fjernsyn er den generelle konklusion, at det er vi ikke selv herre over.

Lad mig give nogle *eksempler* på formidling, jeg selv har været involveret i. EMS havde nedsat en komite for "World Mathematical Year 2000". Efter år 2000 blev komiteen afløst af et udvalg "Raising Public Awareness of Mathematics", hvor jeg sidder som formand. I år 2000 arrangerede vi en plakat konkurrence. Der kom mange spændende forslag ind. Nogle af dem blev der lavet postkort ud af, og de blev spredt vidt omkring. Jeg lavede en plakat med titlen "Matematik bygger broer i kultur, videnskab og teknik", "Mathematics bridges gaps in culture, science and technology". Den viser Storebæltsbroen. Plakaten er blevet trykt i mange blade og kan også ses på f.eks. Tysk Matematisk Forenings hjemmeside.

Ideen til plakaten kom under et besøg på Science Museum i London. På min tur op gennem museet, blev jeg mere og mere deprimeret. Der er jo ikke mere, man kan finde på, alt er opdaget. Men efterhånden som jeg steg op derinde, gik det op for mig, at der var matematik bag det hele! Så var jeg ovenpå og lavede en plakat ud af det.

I 2003 lavede komiteen en artikel konkurrence. Der kom også mange gode forslag ind. Vinderen blev oversat til flere sprog. Ideen har bredt sig. Så vi må finde på noget nyt.

Hvad skal vi formidle? Den enkelte forsker skal formidle det, vedkommende brænder for, og har lyst til at formidle. Det er godt, hvis man kan trække tråde til sin egen forskning, men det behøver absolut ikke være den allersidste krølle på den, man går i detaljer med. Man skal ikke lade sig slå ud af kolleger, der beklager sig over, at man ikke har sagt det allernyeste. Dog er det spændende at se, at matematik er noget, der stadig foregår. Det er vigtigt at trække de store linjer og få inddraget både ny og gammel matematik. Jeg tror, man får glæde af at lave fortællinger om levende legender. Nye gennembrud og løsning af gamle problemer er noget der fænger, men der skal kød og blod på.

Hvordan skal vi formidle? Hvordan kommer vi i fjernsynet? Hvordan kommer vi i radioen? Disse medier bestemmer selv. De skal selv få ideen. Hvordan kan man så påvirke dem til at få den? Man må skrive artikler og holde foredrag, og så en dag henvender disse medier sig måske. Man skal have noget at byde på, og de skal kunne mærke at man brænder for det. Det er vigtigt at vi hjælper kolleger, der forsøger sig. Det er vi faktisk ikke for gode til. Man kan komme med opmuntringer og konstruktiv kritik, men man skal ikke have for travlt med at påpege at "det der fik du da vidst ikke sagt rigtigt" etc.

Det er virkelig svært at trænge igennem til medierne i Danmark. I udlandet er det noget lettere. Angående kronikker i aviser og blade, vil jeg bemærke, at det ikke er så let. Det er svært at skrive fængende og at fortælle en god historie. Mange af os kan ikke gøre det. Nogle få videnskabsjournalister kan. De behøver ikke selv at forstå emnet. Desværre er der mange journalister, der tror, at de skal forstå det, man siger og så formidle *deres fortolkning* videre. Det kan godt betale sig at oversætte gode artikler fra udlandet, men det er igen ikke en triviel opgave at gøre det.

CRK: Jeg føler mig ikke specielt kompetent til at diskutere formidling af matematik. Min faglige baggrund er geologi. Jeg har dog nogle erfaringer som redaktør af et bredt naturvidenskabeligt blad (Aktuel Naturvidenskab).

En observation er, at *formler går ikke an* i bred formidling af matematik. Dette stiller selvfølgeligt matematikere over for en særlig udfordring. Selv den simpleste formel vil virke som en uoverstigelig forhindring for mange. Det er selve abstraktionen, der er problemet.

Hvordan skal man opfatte bred formidling generelt? Den mest udbredte fortolkning i fagkredse er, at man skal forklare, hvad man laver, så at så mange som muligt kan forstå det. De artikler man skriver, skal bygges pædagogisk op. Vi får mange artikler, der minder om kapitler i lærebøger. Dette dur ikke. Lærebøger er ofte noget, man læser, fordi det er pensum, og ikke fordi man har lyst!

Hvis man skal have fat i den brede kreds, så skal tingene skrives helt anderledes. Vil man have fat i folk fra starten af, skal man have *vakt interessen*, og så handler det om at *fastholde* læseren.'Det er lettere sagt end gjort. Man må låne virkemidlerne fra journalisternes værktøjskasse.

Naturvidenskabsfolk er ikke journalister. Den *gode historie* er i centrum af videnskabsformidling i aviser og et blad som f.eks. Illustreret Videnskab. Forståelsen kommer i anden række. Det handler om at fortælle en god historie og så få sneget noget lærebogsstof ind ad bagvejen.

Hvis vi vil ramme bredt, må vi lære af, hvad journalisterne gør. Man skal prøve at finde et vedkommende, aktuelt og gerne dramatisk udgangspunkt. Dette gælder i særlig grad for matematik, for der er fordomme, der skal overvindes fra start.

Matematikken må sælges på det, den kan bruges til. Man skal ikke bilde sig ind, at selv den mest pædagogisk og velforklarede matematiske artikel kan gøre folk interesserede i matematik som sådan. Men man kan sagtens formidle det budskab, at matematik er utroligt vigtigt og spiller med i en masse sammenhænge, som er relevant for samfundet og direkte relevant for vores hverdag. Så man skal ikke formidle matematik, men *fortælle om* matematik.

I vores eget blad er der dog en del artikler, der har lærebogspræg. Ambitionen er, at det skal kunne forstås af *gymnasieelever*. Desuden er vores politik, at det er fagfolkene selv, der skal føre pennen.

Hvis man gerne vil formidle sit fag til naturvidenskabsfolk fra andre områder, er det i princippet de samme virkemidler, man skal bruge. Læserne kan selvfølgelig kapere mere, men en artikel om f.eks. kvantemekanik er ikke noget, en biolog vil læse, fordi vedkommende har behov for det.

Erfaringen fra vores blad er, at vi ikke svømmer i artikler om matematik. Dette skyldes ikke et fravalg fra vores side, men der går lang tid imellem, at vi modtager den slags artikler.

Hvorvidt matematikere ikke føler behov for at formidle deres fag eller giver op over for vanskelighederne ved at gøre det, ved jeg ikke.

Det er vores opfattelse, at der er et behov for flere artikler om matematik. Vi har for nyligt oprettet et artikel arkiv på vores hjemmeside. På nuværende tidspunkt er matematik den næst mest besøgte kategori! Den mest læste matematik artikel handler om, hvordan matematik kan bruges til at forebygge trafikkaos. Det viser, at hvis man kan finde et *relevant udgangspunkt* for en artikel, er der mange, der er interesseret i at læse den.

Jeg tror blandt andet, at der sidder mange gymnasie- og folkeskolelærere, der leder efter noget, de kan bruge i deres undervisning. Her er der ikke så meget at komme efter. Det er min fornemmelse, at der er mange matematiske emner, der vil kunne vække interesse.

NF: Jeg har været formand for matematiklærerforeningen i flere år og har samlet en del erfaringer og talt med mange mennesker. Gymnasielærere er meget interesserede i at vide, hvad der foregår på universiteterne. De er meget interesserede i at vide noget om, hvad der undervises i på de første år. Hvilke kurser udbydes der? Hvilke emner tager man op? Hvilken didaktisk tilgang har man? Måske er tilgangen meget forskellig fra den, mange lærere selv oplevede for 30 år siden. Der skal være en kanal, hvor de får noget viden fra universiteterne.

Gymnasielærerne er også interesserede i, hvilken brug man gør af IT på universiteterne f.eks. brug af Maple. Vi er også interesserede i at vide noget om projektarbejde på universiteterne. Både på universiteter og i folkeskolen laver man projektarbejde, men på gymnasiet skal vi først i gang med det nu.

Vi vil meget gerne forberede vores elever til universitetet. Lisbeth sagde for et par år siden om de nye studerende: Hver gang vi giver dem et problem, spørger de "Er der ikke en formel, vi kan bruge?" De studerende er simpelthen for bange for at prøve sig frem, når de begynder på universitetet. Det skal vi have lavet om på.

Vi er interesserede i populære forskningsresultater. Vi kan f.eks. vise den BBC video, der er lavet om Wiles vej til at bevise Fermats sætning. Den er spændende og anderledes fra, hvad eleverne plejer at se.

Matematik er svært at formidle. Der er fag, som har nemmere ved at komme i pressen. I morges var hovedhistorien DTU bilen, der kører 600 km. på literen. Det har en anden appel end de seneste matematiske forskningsresultater. Det er et kæmpe arbejde at omsætte matematisk viden til tilgængeligt stof for gymnasiet.

Så er der eleverne på gymnasiet. De er interesserede i at få afveksling i undervisningen. Her er det godt, hvis læren kan tage dem med på ekskursion på matematiske institutter eller ingeniørskoler. De tilbud, I giver med foredrag og besøgstjeneste, er super. Næsten hvert eneste af jeres institutter har øverst på deres hjemmeside et gymnasierelevant link. De allerfleste lærere siger kun godt om de aktiviteter, de og eleverne har deltaget i.

Der kan være'problemer med at lave et niveaurigtigt oplæg til en gymnasieklasse. I ser eleverne for første gang og har ikke fornemmelse for, om det er en god eller en svag klasse. I kan komme til at sige nogle ord, som eleverne ikke rigtig forstår, og så føler de sig koblet af. Alt i alt er det i småtings afdelingen.

Klassisk har passer og lineal haft en central placering for matematikundervisningen. Eleverne har en forventning om PowerPoint og animationer, når de starter på universitetet. Hvor populært skal det serveres? Det er en afvejning mellem det populære og det seriøse.

Efter de tre oplæg var der spørgsmål og kommentarer fra salen.

Mikael Rørdam, SDU: Der er et stort pres på universitetslærerne om, at de skal være mere aktive med formidlingen. Presset kommer blandt andet fra dekanerne. Jeg synes *ikke alle* skal formidle. Jeg mener, at det er en forkert udnyttelse af vore resurser. Nogle er fremragende formidlere, andre er ikke.

VLH: Der er masser af formidlingsopgaver. Det gælder om, at finde det man er god til. Lad dem, der gerne vil, komme til, og giv dem den tid, der skal til. Det tæller måske ikke i opgørelserne, men det må vi arbejde på, at det skal.

Johan P. Hansen, AU: Vi kan reelt ikke forklare matematik på forskningsniveau til det menige publikum. Det ville også være meningsløst, hvis vi kunne. Vi skal være meget målrettede med, hvem der formidler og til hvem der formidles. Jeg mener, at kernemålgruppen er gymnasieelever. Vi skal ikke lade os trænge i defensiven, for vi har et rigtigt godt produkt. Vi må sælge det på det menneskelige engagement.

Poul Hjorth, DTU: Måske skal vi også formidle det, at der er noget, som er *svært*, og at matematik er *svært*. For at citere Kennedy ”Vi gør disse ting, fordi de er svære”. Det kan virke dybt inspirerende på den målgruppe, vi gerne vil have fat i, at der er nogen ting, som er meget svære men også helt unikke. De sidste krøller på forskningen må vi opgive at gøre til avisstof. Samtidig ved vi jo godt, at en af de måder vi får vores penge på, er at bekendtgøre vores relevans, og at vi skal retfærdiggøre vores eksistens.

CRK: I denne enorme videns hype der er opstået, glemmer man nogle gange at tale om, hvad det egentligt er, vi vil opnå med formidlingen. Som jeg ser det, er der tre formål, der er i spil hele tiden. Det ene kunne være, at man er bange for, at der ikke er matematikere nok i fremtiden. Det andet kunne være, at skaffe penge nok til forskningen. Det tredje kunne være, at vi gerne vil dele vores enorme engagement med omverdenen. Det er meget vigtigt at gøre sig klart, hvilken af de tre der er ens bekymring eller motivation. For det er ikke det samme, man skal gøre. Det er ikke den samme målgruppe, man skal tænke i. Man skal gøre sig klart, hvad det er, man vil.

Lars Døvling Andersen, AAU: For nylig hørte jeg om en kollega, der har fået priser for formidling. Sidst han var ude for at holde foredrag for en gymnasieklasse, talte han om fejlkorrigerende koder; illustreret ved anvendelser på Cd’er. Han havde sat sig fuldstændig ind i fremstillingsprocessen for Cd’er. Han havde efter sigende hele klassen i sin hule hånd. De var alle interesserede i, hvad der foregik her. Det var nok varierende hvor meget af matematikken, de forstod. Denne fremgangsmåde‘har den fordel, at det ikke præsenterer matematikeren som *indadvendt og verdensfjern*.

Martin Raussen, AAU: Det er vigtigt at vi over for hinanden værdsætter formidlingsaktiviteterne og at vi siger det til vores kolleger, når de har gjort det godt på den front. For det er vigtigt at føle denne støtte. Ellers gør man det en gang, og så fader det hurtigt ud. Også institutionerne skal værdsætte det. På de allerfleste institutter måles vores arbejde på, hvor meget vi underviser, hvor meget vi forsker etc. Det er alt sammen sat i system. Det er svært at få formidling ind i systemet. Det er vigtigt, at der bliver sat ”kontant” pris på det også.“Så det ikke udelukkende sker i folks fritid.

Jeg mener at formidling af matematik skal opfattes som en kollektiv indsats. Vi bør samlet set opnå det bedste resultat, og ikke at hver enkelt bidrager på lige fod. Jeg kunne godt tænke mig, at DMF kunne fungere som koordinator i denne sammenhæng. Hvis man hører om nogle aktiviteter, så sørger man for, at de ikke kun bliver brugt lokalt. Et simpelt konkret forslag: en webside med kommenterede links til gode formidlingstiltag fra indland og udland.

Søren Eilers, KU: Jeg har tre gange prøvet at formidle overfor pressen. Hver gang var jeg lidt frustreret over journalisternes fokus på personstof. Hver gang har jeg forsøgt at fokusere på en ting f.eks. “ikke kommutativitet er vigtigt”. Det ender så med, at der bliver skrevet en hel masse om Banach og skotske cafeer og sådan noget. Det ved jeg ikke helt, hvordan man skal tackle. Vi har ingen magt overfor disse journalister. De skriver selvfølgeligt det, som de synes, er det relevante. Det er en frustration, at det er relativt nemt at få folk til at skrive om matematikere; men næsten umuligt at få folk til at skrive om matematik.

VLH: Journalister kan ikke lide at skrive om noget, de ikke forstår. Det er meget vigtigt, at de føler, at den der fortæller, er en ekspert. Man skal opbygge en troværdighed og starte i det små. Man får ikke lov til at sige hvad som helst første gang, heller ikke anden gang. Men efterhånden får man opbygget en tillid.

CRK: Der er mange forskellige journalister på aviserne i dag med hver deres ansvarsområde. Men der er næsten ingen deciderede videnskabsjournalister. Det er jo et problem, hvis man gerne vil have fortalt noget fagligt. Det er ganske naturligt, at det er personstoffet, der slipper igennem.

VLH: Derfor er det også vigtigt, at vi har Aktuel Naturvidenskab, som opbygger en høj grad af troværdighed. Så ved de f.eks. på Jyllandsposten, at hvis vi henvender os til Aktuel Naturvidenskab, så kan vi godt regne med, hvad de siger. Det tror jeg er en vigtig funktion.

CRK: Ved formidling til den bredere offentlighed er det altid mysterier og problemer, der er spændende, og ikke så meget løsninger. Matematikkens uløste problemer er måske sjovere end de løste problemer.

Johan P. Hansen: Vi skal afgrænse en målgruppe, f.eks. gymnasielærere. Et konkret forslag: på Århus Universitet har vi lavet en gymnasielærerdag. Sidste år kom der 75. I år kom der 138. Her deltager høj og lav på instituttet i arrangementet. Jeg vil anbefale andre institutter at gøre det samme. Det er den rigtige målgruppe at få fat i.

Lisbeth Fajstrup: Man bliver faktisk ofte bedt om at sælge sig selv. Journalisterne vil gerne have personen på. Jeg har selv været på en halv side i Berlingske. Hvorfor var de interesserede i mig? Det var fordi jeg var en kvindelig matematiker. Det var interessant. Så var det for øvrigt ligegyldigt det med matematikken, men jeg fik da sagt noget. Der er dog alligevel en vis værdi i, at en matematiker kommer i avisen.

Afslutningsvis blev der talt om konkrete forslag til hvad der skulle gøres.

CRK: Det handler om at få matematik ind ad bagvejen. Det er vigtigt at være opmærksom på, hvornår der er noget fremme, som kan bruges i den forbindelse. Det kunne være "matematikken i Da Vinci Mysteriet" eller noget andet, som folk interesserer sig for. Det kunne også være en statistik, man brugte matematik til at kikke efter i sømmene.

VLH: For eksempel kunne man forklare su doku. Her kunne man kommentere påstanden i Politikken forleden om, at su doku absolut ikke bruger matematikken (red. dette er faktisk sket efterfølgende). Robin Wilson har skrevet en bog om su doku. Den er udkommet i 140.000 eksemplarer.

Lisbeth Fajstrup: Vi burde oversætte artikler fra de store udenlandske aviser, hvor de har videnskabsjournalister ansat. Vi kunne sætte det i system, så der var en hjemmeside, hvor disse artikler blev registreret. Det kunne være godt hvis DMF stod for det. Måske kunne man søge om penge til dette formål. Vi kunne så opfordre de danske aviser til at bruge disse oversættelser.

CRK: Jeg synes ikke Abel prisen er blevet markedsført godt nok. Der kom en pressemeddelelse, men den var ikke god nok. Det at en mand får 6 mil. er ikke en nyhed i sig selv. Her kunne matematikerne godt have hjulpet mere til. Hele ideen med prisen var at skabe interesse om matematik. Der er andre der gør mere for at fremme deres fag. Biologerne henvender sig hele tiden.

Lisbeth Fajstrup: Jeg har forsøgt at ringe til en avis, og her var svaret: En norsk pris til en fransk matematiker på hvilken måde skulle det interessere danske avislæsere?

Søren Eilers: Jeg tror i høj grad, det er et spørgsmål om, at vi skal have koordineret vores indsats. Der er ganske vidst enkeltpersoner, der gør noget. Men tit tænker man, at der nok er andre, der tager sig af det. Det ville være oplagt, om DMF stod for en form for beredskab. Det skulle sørge for, at der sker noget, når muligheden er der. Indsatsen skal koordineres, for hvert enkelt universitet vil gerne profilere sig selv. *Vi ved hvem man skal spørge*. Bliver en matematiker nævnt, ved vi hvem her i landet, der ved mest om den slags matematik.

Af: Lisbeth Fajstrup,
Aalborg Universitet
email: fajstrup@math.aau.dk

EWM07:

European Women in Mathematics

3-6 september 2007
Cambridge, UK.

EWM holder "general meeting" hvert andet år. Åbent for både medlemmer og ikke-medlemmer. I år er det på Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge.

Når man er vant til at være en ud af ikke ret mange kvinder ved konferencer, synes det efterhånden helt naturligt. Det er derfor en stor overraskelse og glæde at opleve, hvordan det er at være til en konference med 100 kvinder, som alle finder det ganske naturligt både at være kvinde og at være begejstret for matematik. At sidde til en forelæsning om state-of-the-art matematik sammen med så mange kvinder er meget specielt. EWM-konferencerne har givet ny energi til mange kvindelige matematikere – såvel PhD-studerende som veletablerede professorer.

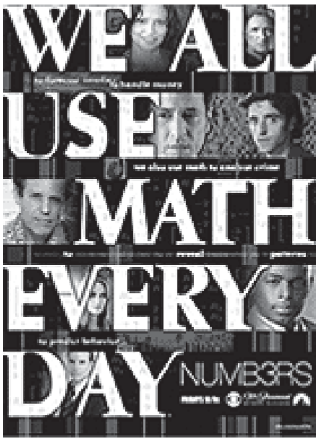
Ved EWM07 er der, som altid, et bredt spektrum af emner. Hovedforelæsere, som har bekræftet, at de kommer, er:

Natalia Berloff, Cambridge, UK, Quantum Fluids.
Lenore Blum, Carnegie Mellon, USA, Teoretisk datalogi.
Simone Gutt, Univ. Libre de Bruxelles, Symplektisk Geometri.
Eleny Ionel, Stanford, USA, Symplektisk Geometri.
Dusa McDuff, Stonybrook, USA, Symplektisk Geometri.
Cheryl Praeger, University of Western Australia, Gruppeteori.
Vera Sos, Budapest, Kombinatorik.
Desuden vil der være en session om Matematikuddannelse/undervisning ledet af Toni Beardon (Cambridge, UK).
Se mere på www.maths.cam.ac.uk/ewm

Af: Lisbeth Fajstrup,
Aalborg Universitet
email: fajstrup@math.aau.dk

Numb3rs

– matematik i fjernsynet!



Hver onsdag aften kl.20 starter Kanal 5's Crime Scene med et afsnit af TV-serien Numb3rs. Serien er amerikansk og kører på tredje sæson i USA på CBS med stor succes. Hovedpersonerne er FBI-agenten Don Eppes og hans bror Charlie Eppes, som er professor i matematik ved "CalSci" (scenerne fra CalSci optages på CalTech). I hvert afsnit indgår der matematik. Charlie hjælper f.eks. med at finde struktur i store datamængder, der bruges billedbehandling, forbryderne vil bryde Public Key systemer, og man får at vide, at det hører sammen med faktorisering af primtal etc. Matematikken er tydeligt til stede, der skrives rigtige formler (der er konsulenter tilknyttet, som holder øje med matematikken) og flere af episoderne bygger på virkelige "cases". Der findes faktisk et "geografisk profiling" værktøj, som bruger bayesiansk statistik til at slutte fra gerningssteder for en serieforbryder tilbage til, hvor han/hun formentlig bor. Man bruger naturligvis noget a priori information om, hvordan den slags forbrydere plejer at opføre sig. Det er brugt med held i USA.

Matematikken i serien bliver selvfølgelig ikke gennemgået i alle detaljer. Så var serien vel ikke blevet et hit. Derfor har vi i Aalborg oprettet en "blog" http://numb3rs.math.aau.dk , hvor meningen er, at man kan finde uddybende information om de enkelte afsnit.

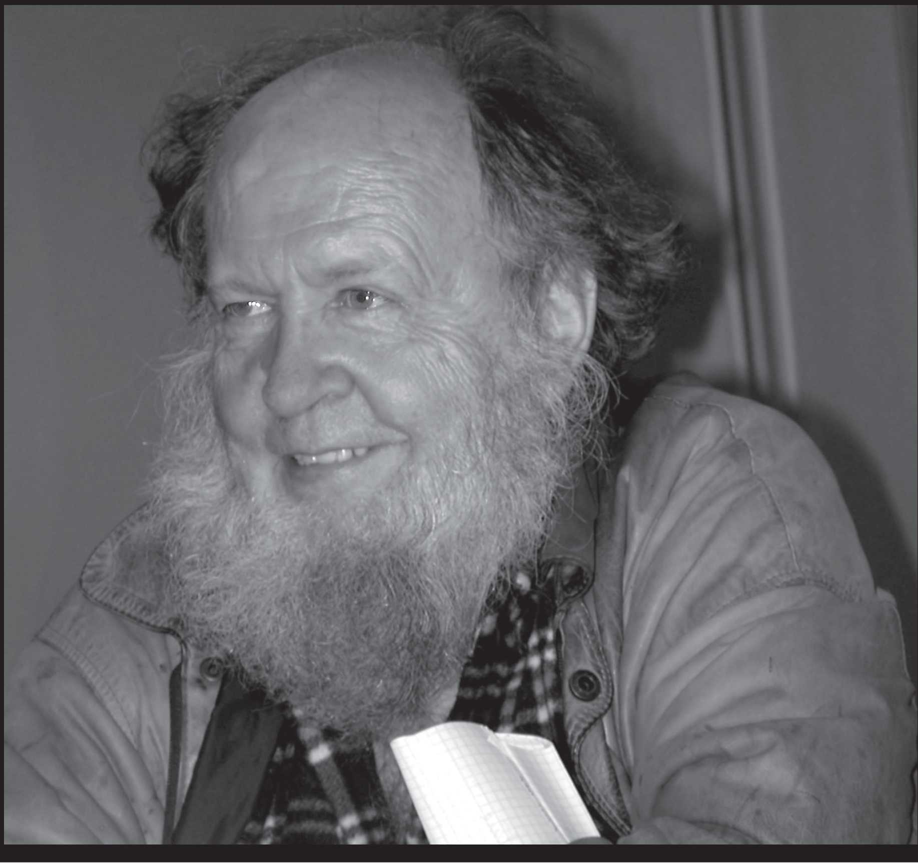
Hver onsdag aften skriver jeg et indlæg på bloggen om hvilken matematik, der indgik, og lidt om, hvad det går ud på. Senere kommer der mere uddybende beskrivelser af matematikken; sædvanligvis ved et link til en pdf-fil – det er ikke nemt at skrive formler direkte på bloggen. De uddybende indlæg kan godt komme noget senere, og jeg vil gerne have indlæg fra andre end matematikerne i Aalborg. Jeg linker til sider på engelsk, men der findes allerede tilbud til Numb3rs fans, der kan læse engelsk, så meningen er, at bloggen skal være et tilbud på dansk. Måske har nogen af Matildes læsere allerede lavet noget materiale, som jeg kan få lov at lægge på bloggen?

Emnerne er mange: Kryptografi, Riemann hypotesen, Guillochémønstre, wavelets, spilteori, geometriske følger, Fibonacci, vindbelastning af bygninger, eksponentiel vækst, Poker. Der står allerede en hel del, og korrektioner er også meget velkomne. Men først og fremmest: Tag og se serien. Det er altså ikke så tit, der er så meget åbenlys matematik på TV.

For mere information: se bloggen, eller skriv Numb3rs i Google – det er meget smart, at det staves, så søgningen ikke giver andet end noget om TV-serien.

I USA har Texas Instruments sponseret undervisningsmateriale om serien under overskriften "We All Use Math Every Day" – så sandt! Måtte budskabet spredes og bringe en regn af forskningsmidler og studerende.

Adrien Douady
(25 september 1935 – 2 november 2006)



Af: Bodil Branner, Carsten Lunde Petersen, Dan Sørensen, Pia Willumsen, Christian Henriksen, Eva Uhre, Kealey Dias.

***Ingen videnskab uden lidenskab*, var et motto som den franske matematiker Adrien Douady ikke bare selv havde formuleret, men som han som få eksemplificerede. Han brændte for at udbrede og udvikle matematikken.**

Adrien havde en stor international matematikerfamilie, som han holdt kontakt med. Han var den samlende person der gennem sin kreativitet, generøsitet og livsglæde prægede os alle. Vær åben og samarbejd, var det budskab han i så høj grad selv praktiserede. Han ragede højt op i det matematiske landskab, men var god til at skabe og give plads til andre og værdsætte alles bidrag. For nylig gav han udtryk for, at han troede mindre og mindre på individets betydning. Det er et stærkt udsagn, når det ses på baggrund af den store rolle, han selv spillede, og af hvor højt han værdsatte hvert enkelt individ. Men det passer godt sammen med den atmosfære han skabte. Matematiske møder, konferencer og workshops hvor han var med, var særligt festlige. Der var sang og latter og masser af matematiske diskussioner.

I juni 1983 deltog Adrien i en workshop, *Chaos*, som Predrag Cvitanovic arrangerede på Niels Bohr Institutet. Plakaten for workshoppen var illustreret med den udfyldte Julia-mængde, der er kendt som *Douady's kanin*. Adrien blev fra da af en hyppig gæst i Danmark og fik hyppige besøg i Paris af os der studerer holomorf dynamik.

For et år siden havde Adrien et hjertetilfælde. Han gennemgik en operation og kom til kræfter igen. Hans sidste år blev intensivt og meget vellykket. Han så den plan bærer frugt, som han siden begyndelsen af 1990erne havde arbejdet på, sammen med skiftende Ph.D.-studerende. Planen var at vise, at der findes komplekse kvadratiske polynomier der har en Julia-mængde med positivt mål. Xavier Buff og Arnaud Chéritat (de sidste to af Adriens Ph.D.-studerende) fuldendte planen i efteråret 2005. Både den workshop der blev holdt i marts i år ved Fields Institute i Toronto som 75-års fødselsdagskonference for John Milnor og den 70-års fødselselsdagskonference for Adrien der blev holdt i maj i år i Paris var i høj grad domineret af en række foredrag, der forklarede forskellige skridt i beviset.

Den 2. november besøgte Adrien sammen med tre yngre amerikanske matematikere sin yndlings kyststrækning ved Middelhavet: Esterel. Som så ofte før sprang han ud i vandet fra klipperne. Han fik et ildebefindende, blev reddet i land, men kunne ikke genoplives. Det sidste billede af ham og hans kone Regine er taget samme morgen.

Adrien hyldede det princip, at man skulle lære et sprog gennem dets ypperligste litteratur. I 1990 – 1991 var Carsten Lunde Petersen med familie, Dan Sørensen og Pia Willumsen på studieophold i Paris. Adrien holdt ugentlige litteraturaftener med dem alle for at delagtiggøre dem i sin kærlighed til udvalgte franske digte og det franske sprog og for selv at lære dansk ved sammen med dem at gendigte på dansk. Om dagen gjaldt det matematikken og om aftenen litteraturen. Ud over matematiske artikler blev resultatet preprintet *Fra Poincaré til Baudelaire* på fransk med dansk gendigtning. Teksten kan hentes fra hjemmesiden
http://www2.mat.dtu.dk/people/Christian.Henriksen/
under Thoughts on Adrien Douady. Det indledende citat af Henri Poincaré (Bruxelles, 1909) lyder:

La Liberté est pour la science ce que l'air est pour l'animal:
privée de liberté, elle meurt d'asphyxie comme un oiseau
privée d'oxygène. Et cette liberté doit être sans limite.

I dansk oversættelse:

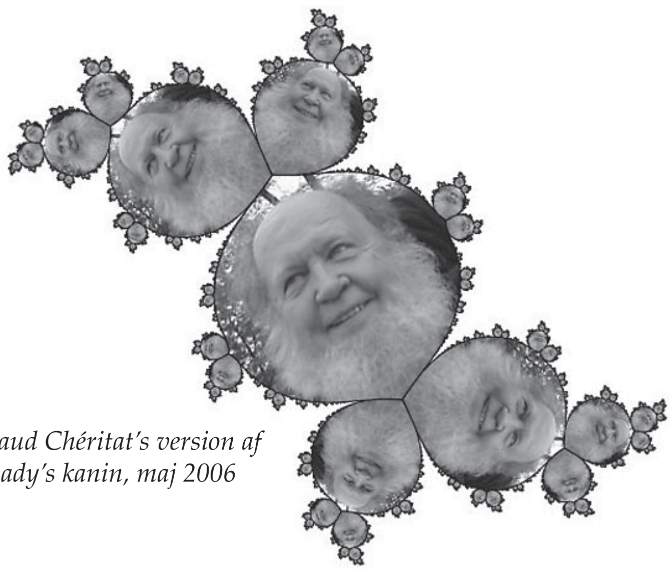
Frihed er for videnskaben hvad luft er for dyr:
frataget frihed, dør den ved kvælning som en fugl
frataget ilt. Og denne frihed må være uden grænser.

Adrien værdsatte frihed, frihed for sig selv, frihed for alle, og han forstod betydningen af frihed som forudsætning for kreativitet. I efteråret 2003 under det specielle trimester i holomorf dynamik ved Institut Henri Poincaré genoptog Adrien de franske litteraturaftener for de yngre deltagere. Blandt dem var Eva Uhre.

Adrien lærte sig dansk fra *Babettes Gæstebud*, som han kunne citere fra ende til anden. Blandt H. C. Andersens eventyr var hans favorit *Prinsessen på Ærten*, og han sang nogle af *Svantes viser* for blot at nævne en del af hans repertoire. Han havde en forunderlig evne til at bedømme et sprogs kvaliteter og mestrede at digte og at lave ordlege på de mange forskellige sprog han kendte, herunder dansk som *Ingen videnskab uden lidenskab* er et eksempel på.

Adrien var medlem af Dansk Matematisk Forening. Han læste i Matilde og løste opgaverne. I Matilde nr. 25 fra 2005 blev hans indlæg på dansk om Riemann summer bragt. I dette nummer bringes hans opgave, inspireret af Bibelens værdi af pi og skrevet til Matilde.

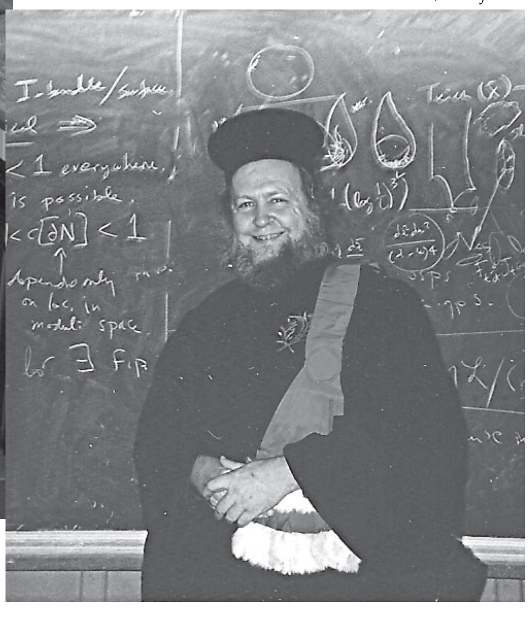
Vi er en gruppe i Danmark der havde det privilegium at være en del af hans matematikerfamilie. Vi værner med stor glæde om hans minde ved fortsat at udbrede åbenhed og samarbejde.

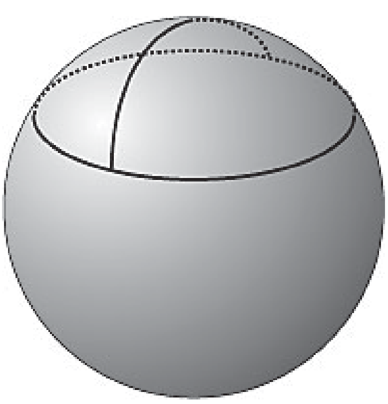


Arnaud Chéritat's version af Douady's kanin, maj 2006

Regine og Adrien 2. november 2006

Institut Henri Poincaré, maj 1988





Adriens opgave:

I Bibelen (1. Kongebog, 7.23) læser man:

> "Så støbte han [Salomo] Havet,
> ti alen fra kant til kant,
> cirkelrundt,
> det var fem alen højt, og det målte
> tredive alen i omkreds."

Måske kendte de gamle hebræere ikke den nøjagtige værdi af pi.

Det kan imidlertid også tænkes at de var klar over at havets overflade ligesom jordklodens overflade danner en sfære, og måske tænkte de på havet som en sfærisk kalot omkring en pol.

Hver breddegrad svarer da til en formindsket værdi af 'pi' defineret som forholdet mellem breddegradens omkreds og dens diameter (målt langs en storcirkel gennem polen).

The Juliadrien :

a Julia set with positive measure!

Spørgsmål:

(1) Hvordan afhænger disse formindskede værdier for 'pi' af breddegraden?

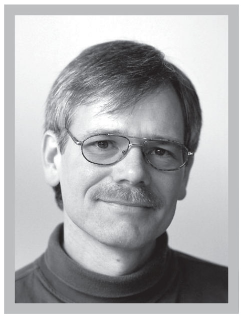
(2) For hvilken breddegrad får man netop 'pi' = 3 ?

(3) Ligger denne breddegrad nord eller syd for polarcirklen? Går den (omtrent) gennem nogen stor by?

(4) Kunne den kalot som breddegraden afgrænser transporteres rundt i Stillehavet uden at røre noget kontinent?

Let revideret af Poul Hjorth

Interview with Abel Prize recipient Lennart Carleson



Af: Martin Raussen
(Aalborg, Denmark)

og Christian Skau
(Trondheim, Norway)

(Interviewet blev tidligere trykt i EMS-Newsletter 61, s. 31-36.)

The interview was conducted in Oslo on May 22nd prior to the Abel prize celebration and was later shown on Norwegian TV. The first two questions and their answers were originally phrased in the three Scandinavian languages: Norwegian, Danish and Swedish. They are reproduced here translated into English.

Introduction

On behalf of the Norwegian and Danish mathematical societies, we want to congratulate you on winning the Abel prize for 2006.

This year we commemorate the 100th centenary of the death of the Norwegian dramatist and poet Henrik Ibsen. He passed away on the 23rd of May just a stone's throw away from this place. The longest poem he ever wrote is called "Balloon letter to a Swedish lady" and it contains a verse which reads as follows:

> *"— aldri svulmer der en løftning*
> *av et regnestykkes drøftning*
> *—- ti mot skjønnhet hungrer tiden —"*
> *Translated into English this becomes:*
> *"— never arises elation*
> *from the analysis of an equation*
> *— for our age craves beauty—"*

Without drawing too far-reaching conclusions, Ibsen seems to express a feeling shared by many people, i.e. that mathematics and beauty or art are opposed to each other, that they belong to different spheres. What are your comments to this view?

I do not think that Ibsen was very well-oriented about beauty in mathematics, which you certainly can find and enjoy. And I would even maintain that the beauty of many mathematical arguments can be easier to comprehend than many modern paintings. But a lot of mathematics is void of beauty. Maybe particularly in modern mathematics, where problem areas have often gotten extremely complex and complicated, with the result that the solution can only be formulated on several hundreds of pages. And that can scarcely be called beautiful. But in classical mathematics you find many striking theorems and arguments that hit you as something really original. It is reasonable to use the term beauty for those.

Mathematicians all over Scandinavia are proud of counting one of their own among the very first recipients of the Abel Prize. How would you characterize and evaluate Scandi-

navian, and particularly Swedish, mathematics in an international perspective?

I think that Scandinavia does quite well in this respect. In Sweden, we have a fine new generation of young mathematicians. And I think it looks very much alike in the other Scandinavian countries. It is difficult to perceive a new Abel on the horizon, but that is probably too much to hope for.

Could you please characterize the unique contribution that the Finnish/Swedish school of Lindelöf, M.Riesz, Carleman, R.Nevanlinna, Phragmen, Beurling and Ahlfors brought to analysis in the first half of the 20th century, which was formative and decisive for your own contribution to hard analysis?

In your list, you miss another Scandinavian mathematician: J. L. Jensen. The importance of "Jensen's inequality" can hardly be exaggerated. He and Lindelöf started the Scandinavian school, building of course on Riemann's approach to complex analysis rather than that of Cauchy-Weierstrass; Nevanlinna and Carleman continued, followed by Ahlfors and Beurling, a remarkable concentration of talent in Scandinavia. My lecture tomorrow will give more details.

Mathematical achievements in context

Abel first thought that he had solved the general quintic by radicals. Then he found a mistake and subsequently he proved that it was impossible to solve the quintic algebraically. The famous and notoriously difficult problem about the pointwise convergence almost everywhere of L^2-functions, that Lusin formulated in 1913 and actually goes back to Fourier in 1807, was solved by you in the mid-1960's. We understand that the prehistory of that result was converse to that of Abel's, in the sense that you first tried to disprove it. Could you comment on that story?

Yes, of course. I met the problem already as a student when I bought Zygmund's book on trigonometric series. Then I had the opportunity to meet Zygmund. He was at Harvard in 50 or 51. I was at that time working on Blaschke products and I said maybe one could use those to produce a counterexample. Zygmund was very positive and said "of course, you should do that". I tried for some years and then I forgot about it before it again came back to me. Then, in the beginning of the 60's, I suddenly realized that I knew exactly why there had to be a counterexample and how one should construct one. Somehow, the trigonometric system is the type of system where it is easiest to provide counterexamples. Then I could prove that my approach was impossible. I found out that this idea would never work; I mean that it couldn't work. If there were a counterexample for the trigonometric system, it would be an exception to the rule.

Then I decided that maybe no one had really tried to prove the converse. From then on it only took two years or so. But it is an interesting example of to prove something hard, it is extremely important to be convinced of what is right and what is wrong'. You could never do it by alternating between the one and the other because the conviction somehow has to be there.

Could we move to another problem, the so-called Corona problem that you solved in 1962? In this connection, you introduced the so-called Carleson measure, which was used extensively by other mathematicians afterwards. Could you try to explain why the notion of the Carleson measure is such a fruitful and useful notion?

Well, I guess because it occurs in problems related to the general theory of BMO and H^1-spaces. I wish this class of measures had been given a more neutral name. In my original proof of the Corona problem, the measures were arc lengths on the special curves needed there. Beurling suggested that I should formulate the inequality for general measures. The proof was the same and quite awkward. Stein soon gave a natural and simple proof and only then the class deserved a special name.

I'll move to another one of your achievements. Hardy once said that mathematics is a young mans game. But you seem to be a counterexample; after you passed sixty years of age, you and Michael Benedicks managed to prove that the so called Hénon map has strange attractors exhibiting chaotic behaviour. The proof is extremely complicated. It's a tour de force that took many years to do. With this as a background, what is your comment on mathematical creativity and age?

I guess and hope that you don't get more stupid when you get older.

But I think your stamina is less, your perseverance weakens (keeping lots of facts in your mind at the same time). Probably this has to do with the circulation of the blood or something like that. So I find it now much harder to concentrate for a long period. And if you really want to solve complicated problems, you have to keep many facts available at the same time.

Mathematical Problems

You seem to have focused exclusively on the most difficult and profound problems of mathematical analysis. As soon as you have solved any one of these, you leave the further exploration and elaboration to others, while you move on to other difficult and seemingly intractable problems. Is this a fair assessment of your mathematical career and of your mathematical driving urge?

Yes, I think so. Problem solving is my game, rather than to develop theories. Certainly the development of mathematical theories and systems is very important but it is of a very different character. I enjoy starting on something new, where the background is not so complicated. If you take the Hénon case, any schoolboy can understand the problem. The tools also are not really sophisticated in any way; we do not use a lot of theory.

The Fourier series problem of course used more machinery that you had to know.

But that was somehow my background. In the circles of dynamical systems people, I always consider myself an amateur. I am not educated as an expert on dynamical systems.

Have there been mathematical problems in analysis that you have worked on seriously, but at which you have not been able *to succeed? Or are there any particular problems in analysis that you especially would have liked to solve?*

Yes, definitely. There is one in dynamical systems, which is called the standard map. This is like the Hénon map but in the area preserving case. I spent several years working on it, collaborating with Spencer for example, but we never got anywhere.

If you want to survive as a mathematician, you have to know when to give up also. And I am sure that there have been many other cases also. But I haven't spent any time on the Riemann hypothesis and it wouldn't have worked either.

Characterization of great mathematicians

What are the most important features, besides having a good intellectual capacity of course, that characterize a great mathematician?

I don't think they are the same for everybody. They are not well defined really. If you want to solve problems, as in my case, the most important property is to be very, very stubborn. And also to select problems which are within reach. That needs some kind of intuition, I believe, which is a little closer to what we talked about initially, about beauty. You must somehow have a feeling for mathematics: What is right, what is wrong and what is feasible. But, of course, there are many other mathematicians who create theories and they combine results into new buildings and keep other people working. It is a different kind of a mathematician. I don't think you should try to find a simple formula for people.

For several decades, you have worked hard on problems that were known to be exceptionally difficult. What drove you and what kept you going for years, with no success guaranteed? What drives a person to devote so much energy to an arcane subject that may only be appreciated by a handful of other mathematicians?

Yes, that's a big issue. Stubbornness is important; you don't want to give up. But as I said before, you have to know when to give up also. If you want to succeed you have to be very persistent. And I think it's a drive not to be beaten by stupid problems.

Your main research contribution has been within mathematical analysis. What about your interest in algebra and topology/geometry?

Geometry is of course very much part of the analysis. But I have no feeling for algebra or topology, I would say. I have never tried to... I should have learned more!

Mathematics of the future

What do you consider to be the most challenging and exciting area of mathematics that will be explored in the 21st century? Do you have any thoughts on the future development of mathematics?

Yes, of course I have had thoughts. Most of the influence comes from the outside. I think we are still lacking a good understanding of which kind of methods we should use in relation to computers and computer science. And also in relation to problems depending on a medium sized number of variables. We have the machinery for a small number of variables and we have probability for a large number of variables. But we don't even know which questions to ask, much less which methods to use, when we have ten variables or twenty variables.

This leads to the next question. What is the significance of computers in mathematics? Is it mainly checking experimentally certain conjectures? Or is it completing proofs by checking an enormous amount of special cases? What are your thoughts on computers in mathematics?

There are a few instances that I have been involved with. I had a student, Warwick Tucker, who proved that the Lorenz attractor exists. The proof was based on explicit computations of orbits. And in that case you could get away with a finite number of orbits. This is very different from the Hénon map, where you could never succeed in that way. You could never decide whether a parameter was good or bad. But for the Lorenz attractor he actually proved it for the specific values that Lorenz had prescribed. Because it is uniformly expanding, there is room for small changes in the parameter. So this is an example of an actual proof by computer.

Of course then you could insist on interval arithmetics. That's the fine part of the game so to say, in order to make it rigorous for the people who have very formal requirements.

But what about computers used, for instance, for the four colour problem, checking all these cases?

Probably unavoidable, but that's okay. I wouldn't like to do it myself. But it's the same with group structures, the classification of simple groups, I guess. We have to accept that.

The solution of the 350 year old Fermat conjecture, by Andrew Wiles in 1994, uses deep results from algebraic number theory.

Do you think that this will be a trend in the future, that proofs of results which are simple to state will require a strong dose of theory and machinery?

I don't know.

The striking part in the proof of the Fermat theorem is the connection between the number theory problem and the modular functions. And once you have been able to prove that, you have moved the problem away from what looked like an impossible question about integers, into an area where there exists machinery.

Career. Teachers.

Your CV shows that you started your university education already at the age of 17 and that you took your PhD at Uppsala University when you were 22 years old. Were you sort of a wunderkind?

No, I didn't feel like a wunderkind.

Can you elaborate about what aroused your mathematical interests? And when did you become aware that you had an exceptional mathematical talent?

During high school I inherited some books on calculus from my sister. I read those but otherwise I didn't really study mathematics in any systematic way. When I went to university it was natural for me to start with mathematics. Then it just kept going somehow. But I was not born a mathematician.

You already told us about your PhD advisor, Arne Beurling, an exceptional Swedish mathematician, who is probably not as well known as he deserves.

Could you characterize him as a person and as a researcher in a few sentences? Did he have a lasting influence on your own work?

Yes, definitely. He was the one who set me on track. We worked on the same type of problems but we had a different attitude towards mathematics. He was one of the few people about whom I would use the word genius. Mathematics was part of his personality somehow. He looked at mathematics as a piece of art.

Ibsen would have profited from meeting him. He also considered his papers as pieces of art. They were not used for education and they were not used to guide future researches. But they were used as you would use a painting. He liked to hide how he found his ideas. If you would ask him how he found his result, he would say a wizard doesn't explain his tricks. So that was a rather unusual education. But of course I learned a lot from him. As you said, he has never been really recognized in a way which he deserves.

Apart from Arne Beurling, which other mathematicians have played an important part in your development as a mathematician?

I have learnt from many others, in particular from the people I collaborated with and in particular from Peter Jones. I feel a special debt to Michel Herman. His thesis, where he proved the global Arnold conjecture on diffeomorphisms of the circle, gave me a new aspect on analysis and was my introduction to dynamical systems.

You have concentrated your research efforts mainly on topics in hard analysis, with some spices from geometry and combinatorics. Is there a specific background for this choice of area?

I don't think so. There is a combinatorial part in all of the three problems we have discussed here. And all of them are based on stopping time arguments. You make some construction and then you stop the construction, and you start all over again.

This is what is called renormalization?

Yes, renormalization. That was something I didn't learn. Probability was not a part of the Uppsala school. And similarly for coverings, which is also part of the combinatorics.

Which mathematical area and what kind of mathematical problems are you currently the most interested in?

Well, I like to think about complexity.

I would like to prove that it's harder to multiply than to add.

That seems to be notoriously difficult, I understand.

Well, I am not so sure. It's too hard for me so far.

You have a reputation as a particularly skilful advisor and mentor for young mathematicians; 26 mathematicians were granted a PhD under your supervision. Do you have particular secrets on how to encourage, to advise and to educate young promising mathematicians?

The crucial point, I think, is to suggest an interesting topic for the thesis. This is quite hard since you have to be reasonably sure that the topic fits the student and that it leads to results. And you should do this without actually solving the problem! A good strategy is to have several layers of the problem. But then many students have their own ideas. I remember one student who wanted to work on orthogonal polynomials. I suggested that he could start by reading Szegö's book. "Oh, no!" he said, "I don't want to have any preconceived ideas".

Publishing mathematics

I would like to move to the organization of research. Let's start with the journal Acta Mathematica. It is a world famous journal founded by Gösta Mittag-Leffler back in 1882 in Stockholm as a one-man enterprise at that time. It rose very quickly to be one of the most important mathematical journals. You were its editor in chief for a long period of time. Is there a particular recipe for maintaining Acta as a top mathematical journal? Is very arduous refereeing most important?

It is the initial period that is crucial, when you build up a reputation so that people find it attractive to have a paper published there. Then you have to be very serious in your refereeing and in your decisions. You have to reject a lot of papers. You have to accept being unpopular.

Scientific publication at large is about to undergo big changes. The number of scientific journals is exploding and many papers and research results are sometimes available on the internet many years before they are published in print. How will the organization of scientific publication develop in the future? Will printed journals survive? Will peer review survive as today for the next decades?

I've been predicting the death of the system of mathematical journals within ten years for at least 25 years.

And it dies slowly, but it will only die in the form we know it today. If I can have a wish for the future, I would wish that we had, say, 100 journals or so in mathematics, which would be very selective in what they publish and which wouldn't accept anything that isn't really finalized, somehow. In the current situation, people tend to publish half-baked results in order to get better promotions or to get a raise in their salary.

The printing press was invented by Gutenberg 500 years ago in order to let information spread from one person to many others. But we have completely different systems today which are much more efficient than going through the printing process and we haven't really used that enough.

I think that refereeing is exaggerated. Let people publish wrong results and let other people criticize. As long as it's available on the net it won't be any great problem. Moreover, referees aren't very reliable; it doesn't really work anyway. I am predicting a great change, but it's extremely slow in coming. And in the meantime the printers make lots of money.

Research Institutions

I've just returned from a nice stay at the Institute Mittag-Leffler, which is situated in Djursholm, north of Stockholm; one of the leading research institutes of our times. This institute was, when you stepped in as its director in 1968, something that I would characterize as a sleeping beauty. But you turned it into something very much different, very active within a few years. By now around thirty mathematicians work together there at any given time but there is almost no permanent staff. What was the inspiration for the concept of the Institute Mittag-Leffler as it looks like today? And how was it possible to get the necessary funds for this institute? Finally, how would you judge the present activities of the institute?

To answer the last question first, I have to be satisfied with the way it worked out and the way it continues also. I just hope that it can stay on the same course.

In the 60's, there was a period when the Swedish government (and maybe also other governments) was willing to invest in science. There was a discussion about people moving to the United States. Hörmander had already moved and the question was whether I was going to move as well. In this situation, you could make a bargain with them. So we got some money, which was of course the important part. But there was a rather amusing connection with the Acta, which is not so well known. From Mittag-Leffler's days, there was almost no money in the funds of the academy for the Mittag-Leffler institute. But we were able to accumulate rather large sums of money by selling old volumes of the Acta. Mittag-Leffler had printed large stocks of the old Acta journals which he never sold at the time. They were stored in the basement of the institute. During the 50's and early 60's one could sell the complete set of volumes. I don't remember what a set could be sold for, maybe 1000 dollars or so. He had printed several hundred extra copies, and there were several hundred new universities. If you multiply these figures together you get a large amount of money. And that is still the foundation of the economy of the institute.

A bit later, you became the president of the International Mathematical Union, an organization that promotes international cooperation within mathematics. This happened during the cold war and I know that you were specifically concerned with integrating Chinese mathematics at the time. Could you share some of your memories from your presidency?

Well, I considered my main concern to be the relation to the Soviet Union. The Chinese question had only started. I went to China and talked to people in Taiwan, and to people in mainland China. But it didn't work out until the next presidential period and it simply ripened. The main issue was always whether there was to be a comma in a certain place, or not, in the statutes.

It was somehow much more serious with the Russians. You know, they threatened to withdraw from international cooperation altogether. The IMU committee and I considered that the relation between the West and the East was the most important issue of the International Mathematical Union. So that was exciting. Negotiations with Pontryagin and Vinogradov were kind of special.

Did these two express some anti-semitic views also?

No, not officially. Well they did, of course, in private conversation. I remember Vinogradov being very upset about a certain Fields Medal being given to somebody, probably Jewish, and he didn't like that. He said this is going to ruin the Fields Prize forever. Then I asked him if he knew who received the first Nobel Prize in literature. Do you? It was a French poet called Sully Prudhomme; and that was during a period when Tolstoy, Ibsen and Strindberg were available to get the prize. Well, the Nobel Prize survived.

Mathematics for our times

You wrote a book, "Matematik för vår tid" or "Mathematics for our times", which was published in Sweden in 1968. In that book, you took part in the debate on so-called New Mathematics, but you also described concrete mathematical problems and their solutions. Among other things you talked about the separation between pure and applied mathematics. You described it as being harmful for mathematics and harmful for contact with other scientists. How do you see recent developments in this direction? What are the chances of cross-fertilization between mathematics on the one side and, say, physics, biology or computer science on the other side? Isn't computer science somehow presently drifting away from mathematics?

Yes, but I think we should blame ourselves; mathematics hasn't really produced what we should, i.e. enough new tools. I think this is, as we talked about before, really one of the challenges. We still have lots of input from physics, statistical physics, string theory, and I don't know what. I stand by my statement from the sixties.

But that book was written mostly as a way to encourage the teachers to stay with established values. That was during the Bourbaki and New Math period and mathematics was really going to pieces, I think. The teachers were very worried and they had very little backing. And that was somehow the main reason for the book.

If you compare the sixties with today, mathematics at a relatively elevated level is taught to many more people and other parts of the subject are emphasized. For example the use of computers is now at a much higher state then at that time, where it almost didn't exist. What are your main points of view concerning the curriculum of mathematics at, say, high school level and the early years of university? Are we at the right terms? Are we teaching in the right way?

No, I don't think so. Again, something predictable happens very slowly. How do you incorporate the fact that you can do many computations with these hand-computers into mathematics teaching?

But in the meantime, one has also expelled many things from the classroom which are related to the very basis of mathematics, for example proofs and definitions and logical thinking in general. I think it is dangerous to throw out all computational aspects; one needs to be able to do calculations in order to have any feeling for mathematics.

You have to find a new balance somehow. I don't think anybody has seriously gotten there. They talk a lot about didactics, but I've never understood that there is any progress here.

There is a very strong feeling in school, certainly, that mathematics is a God-given subject. That it is once and for all fixed. And of course that gets boring.

Public awareness

Let us move to public awareness of mathematics: It seems very hard to explain your own mathematics to the man on the street; we experience that right now. In general pure mathematicians have a hard time when they try to justify their business. Today there is an emphasis on immediate relevance and it's quite hard to explain what mathematicians do to the public, to people in politics, and even to our colleagues from other sciences. Do you have any particular hints on how mathematicians should convey what they are doing in a better way?

Well, we should at least work on it; it's important. But it is also very difficult. A comment which may sound kind of stupid is that physicists have been able to sell their terms much more effectively. I mean who knows what an electron is? And who knows what a quark is? But they have been able to sell these words. The first thing we should try to do is to sell the words so that people get used to the idea of a derivative, or an integral, or whatever.

As something mysterious and interesting, right?

Yes, it should be something mysterious and interesting.

And that could be one step in that direction, because once you start to talk about something you have a feeling about what it is. But we haven't been able to really sell these terms. Which I think is too bad.

Thank you very much for this interview on behalf of the Norwegian, the Danish and the European Mathematical Societies!

Finländska lärares matematikutbildning

Af: Lisen Häggblom
Ped. dr och lärarutbildare i matematikens didaktik vid Åbo Akademi i Vasa, Finland

Den finländska skolan har karakteriserats som en kunskapsskola. Det är ett resultat av Finlands väg att bygga upp ett kvalitativt och livskraftigt samhälle där utbildningssystemet har stor prioritet. Bildning och kunnande är således en grund för det finländska samhället. Barnen inleder sin skolgång det år de fyller 7 år. Utbildningssystemet består av tre delar: grundläggande utbildning, utbildning på andra stadiet och högre utbildning. Barnen erbjuds förskoleundervisning året innan de inleder sin skolgång. Den grundläggande utbildningen omfattar årskurserna 1-9. Utbildningen på andra stadiet utgörs av allmänbildande gymnasieutbildning eller yrkesutbildning. Ungefär hälften av eleverna väljer det allmänbildande gymnasiet efter årskurs 9. Högre utbildning sker vid yrkeshögskolor och universitet. Det är möjligt att få en utbildning antingen i finskspråkiga skolor (94 % av befolkningen) eller på svenska (6 %).

Lärarutbildning vid universitet

Läraryrket har relativt hög status i Finland, vilket bl.a. beror på att alla lärare inom den grundläggande utbildningen och utbildningen på andra stadiet har avlagt magisterexamen med en utbildningstid på minst fem år. Lärarutbildningen har varit knuten till universitet sedan början av 1970-talet och ordnas dels som klasslärarutbildning dels som ämneslärarutbildning. Dessutom utbildas speciallärare inom ett eget utbildningsprogram. Även förskollärarnas utbildning är knuten till universitet med en kandidatexamen på ca tre år med möjlighet till magisterexamen. Lärarutbildningssystemet är indelat så att en del av utbildningsansvaret handhas av pedagogiska fakulteter och en annan del i samarbete med olika ämnesfakulteter med undervisning i något av skolans läroämnen. Lärarutbildningen sker vid tretton lärarutbildningsenheter varav endast en är svenskspråkig (Åbo Akademi).

De lärare som undervisar i matematik är antingen klasslärare och undervisar då i årskurserna 1-6 eller har studerat till ämneslärare med studier i matematik och fysik, kemi eller datateknik. Ämneslärarsystemet tillämpas i årskurs 7-9 samt inom gymnasie- och yrkesutbildning. Detta innebär att alla lärare som undervisar i matematik inom den grundläggande utbildningen har läst matematik under sin gymnasietid och läser matematikdidaktik och/eller matematik inom sin lärarutbildning. Studiemängden varierar beroende på vilket stadium de undervisar.

Kraven på lärarnas ämnesmässiga och pedagogiska kompetens är överlag höga och man bemödar sig om att anställa högt kvalificerade lärare vid skolorna. Det finns klart angivna nationella behörighetskriterier för lärare. Klassläraryrket är mest populärt och vi har möjlighet att välja motiverade och duktiga studerande till utbildningen med urval från många sökande. Alla studerande som antas till någon form av lärarutbildning genomgår ett lämplighetstest där den sökandes motivation för läraryrket, självuppfattning och lärarens roll i skola och samhälle analyseras. Varje universitet utformar egna antagningskriterier.

Klasslärarutbildningen

Klasslärarutbildningen leder till magisterexamen i pedagogik och genomförs inom en pedagogisk fakultet. Genom de pedagogiska studierna får de studerande insikter i grunderna för en lärares arbete som t.ex. människosyn, kunskapssyn och syn på lärande. De studerande ska tillägna sig vetenskaplig teori om pedagogik och lärande. De teoretiska studierna varvas med tillämpningar i undervisningspraktik. Alla som studerar till klasslärare läser även alla ämnen och ämneshelheter som undervisas i årskurs 1-6. Magisterexamen för en klasslärare omfattar totalt 300 sp (studiepoäng) fördelat på fem år. Varje universitet har själv möjlighet att utforma innehållet i dessa studier utifrån vissa rekommendationer. Inom Åbo Akademi i Vasa, som ansvarar för den svenskspråkiga lärarutbildningen i Finland, omfattar t.ex. studierna i grundskolans ämnen och ämneshelheter 70 sp, varav matematikens andel är 8 sp. Utöver detta kan matematiken väljas som biämnesstudier på 25 sp. Studierna i matematik har en didaktisk inriktning och syftet är att hos de studerande utveckla förståelse för den matematiska kunskapens särart, kunskaper om matematiskt tänkande, matematiska begreppsstrukturer samt kunskaper om räknemetoder som undervisas i årskurs 1-6. De studerande ska även lära sig att planera och strukturera undervisningssituationer utgående från didaktiska teorier och olika arbetssätt. Klasslärarnas breda kompetens och didaktiska kunnande bildar en stabil plattform för skolans utveckling och elevernas lärande.

Ämneslärarutbildningen

Ämneslärarutbildningen i matematik omfattar studier i matematik samt studier i ett eller två biämnen, ofta fysik, kemi och/eller datateknik. Studerande kan välja matematik som huvudämne på 120 sp eller som biämne på 60 sp av totalt 300 sp. Utöver dessa ämnesstudier ingår studier i pedagogik och ämnesdidaktik på 60 sp vilket motsvarar ett biämne inom examen som ger lärarbehörighet. Denna pedagogiska utbildning kan vara särskilt inriktad på undervisning såväl inom den grundläggande utbildningen i årskurs 7-9 och gymnasiet som inom yrkes- och vuxenutbildningen. Syftet med ämnesdidaktiken är bl.a. att den studerande skall lära sig grundfärdigheter i fråga om undervisning i matematik och påbörja en personlig mognadsprocess som lärare. Vidare skall den studerande förvärva en helhetssyn på elevens inlärningsprocess i matematik, vad det innebär att undervisa i matematik och de egna möjligheterna att fungera professionellt i samhället. I utbildningen ingår även undervisningspraktik förlagd till övningsskolor.

Undervisningspraktik

En viktig del av lärarutbildningen är praktikperioderna som till en stor del handhas av lärarutbildningarnas övningsskolor. De statliga övningsskolorna är en del av de pedagogiska fakulteterna vid universiteten. Genom professionell handledd praktik, såväl av övningsskolans lärare som didaktiklektorer från lärarutbildningen lär sig studerande att observera och undervisa elever i ett inlärningssammanhang där även ämnesdidaktiken har en viktig plats. I den finländska lärarutbildningen betonas en kreativ inlärningsmiljö där lärarens kunskaper, intresse och engagemang har stor betydelse för elevers lärande i matematik.

Några karakteristiska drag i den finländska matematikundervisningen

Undervisningen styrs av en inlärningssyn som betonar betydelsen av elevens egen aktivitet och växelverkan med läraren och eleverna. Matematikundervisningen sker inom heterogena grupper med gemensamma genomgångar och diskussioner. Man jobbar inom samma kunskapshelhet men differentierar med uppgifter enligt behov. Elever med svaga inlärningsresultat ges extra stöd. Följden blir ett mera homogent resultat med färre låg- och högpresterande elever, vilket PISA resultatet visar. Elevernas förståelse för matematiska begrepp och strukturer försöker man utveckla genom mångsidiga modeller och en aktiv dialog mellan lärare och elever. Genom att sätta fokus på det matematiska innehållet får eleverna en god grund för att senare kunna tillämpa sina kunskaper i olika problemlösningar. En klar struktur gör det lättare för eleverna att utvärdera sina framsteg – kunskapen blir tydligare och medvetenheten om det egna lärandet ökar. Tydliga inlärningshelheter med fokus på begreppsbildning är viktiga i matematikundervisningen.

Arbejdssituation fra matematiktime i Finland

Elevernas lärande utvärderas kontinuerligt. Målet med utvärderingen är att den ska ge information som hjälper både skolor och elever att utvecklas. Därför betonas en utvärdering som ska vara sporrande och uppmuntrande. Men det ställs också krav på eleverna. Läxor ges och görs. Utvärderingssystemet är traditionellt. Skriftliga utlåtanden i matematik ges redan från det första skolåret och i slutet av det fjärde skolåret får de flesta elever sitt första sifferbetyg. Genom regelbundna diagnoser och prov får elever och föräldrar information om hur skolarbetet fortlöper. Läroplanen förnyas vart tionde år och den senaste utkom 2004. Denna läroplan kan laddas ner på svenska under adressen www.oph.fi/svenska. Utmärkande för denna läroplan i matematik är bl.a. ett ännu större fokus på vilka kunskaper och färdigheter som motsvarar en viss kravnivå eller ett visst betyg.

MatematikerNyt

ved Mikael Rørdam

Søren Kold Hansen er pr. 1. juni (2006) ansat som Lektor ved Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet.

Søren Kold Hansen er uddannet ved Århus Universitet (Cand. Scient 1997 og Ph.D. 1999). Efter Ph.D. graden var han først kortvarigt ansat som instruktor ved Institut for Matematiske Fag, Århus Universitet, hvorefter han var Post.doc. først ved Universite Louis Pasteur 2000-2002, dernæst ved University of Edinburgh 2002-2003 og endelig ved Max-Planck-Institut für Mathematik i Bonn 2003-2004. Fra 2004-2006 var Søren tenure-track assistant professor ved Kansas State University.

Sørens forskningsområde ligger inden for lavdimensional topologi nærmere bestemt indenfor den såkaldte kvantetopologi. Hovedmålet er at opnå en dybere topologisk/geometrisk forståelse for bestemte invarianter af knuder, linker og 3-dimensionale mangfoldigheder. Bl.a. ønskes en dybere forståelse af Jones polynomiet for derigennem at bestemme denne knudeinvariants evne til at se hvornår to givne knuder er topologisk forskellige. Som navnet antyder er der stærke relationer mellem kvantetopologi og teoretisk fysik. Der er også interesse for stærke knudeinvarianter i forskellige studier af makromolekyler, f.eks. i forbindelse med forskning i DNA og vira.

Fritiden bliver hovedsagelig brugt på familie og venner.

Mathias Stolpe er pr. 1. november 2006 ansat som adjunkt ved Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet (DTU).

Mathias Stolpe er civilingeniør fra Kungliga Tekniska Högskolan (KTH) i Stockholm, Sverige (1997) og Teknologie Doktor i Optimeringslära og Systemteori samme sted (2003).

I de følgende tre år arbejdede Mathias som forskningsadjunkt på Institut for Matematik, DTU.

Stolpes forskning er inden for modeller og optimeringsmetoder i optimal design og mere specifikt inden for metoder for global optimering.

I sin fritid spiller Mathias bordtennis

Jens Starke began April 2006 at the Department of Mathematics of the Technical University of Denmark as associate professor. Starke obtained in 1994 a diploma in physics and 1997 a diploma in mathematics both from the University of Stuttgart, Germany. In 1997 he obtained a PhD in theoretical physics also from the University of Stuttgart and moved afterwards to the Interdisciplinary Center for Scientific Computing and the Department of Mathematics at the

University of Heidelberg, Germany. He was a visiting scholar and lecturer at various international research institutions, amongst others Nagoya University, Japan, University of California at Berkeley, USA and Princeton University, USA. From 2001 to 2006 he was head of a junior research group financed from Toyota CRDL and the Heidelberg Academy of Science and Humanities and from 2002 to 2006 assistant lecturer at the University of Heidelberg.

Starke works interdisciplinary in the field of dynamics in his international cooperations and industrial projects. His research interests include mathematical modeling, applied analysis and theory of dynamical systems, stochastic systems, optimization and simulations with applications in complex systems in physics, chemistry, biology, medicine and engineering.

Besides science, Jens enjoys playing Lego with his son, biking tours and cooking, in particular Japanese food.

Rettelse til Matilde 28

Hjemmesiden med musikekesemplerne til artiklen af Peter Brask og Jørn Olsson i Matilde 28 er blevet rettet, således at det skulle være nemmere at
downloade musikeksemplerne.
http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M28/Musik/index.html

Begivenheder

ved Poul Hjorth

May 23 2007 - 26, 2007, Zacatecas, Mexico

Universidad Autónoma de Zacatecas
Seventh Joint International Meeting of the AMS and the Sociedad Matematica Mexicana
Associate secretary: Matthew Miller

July 31 2007 - August 3, 2007, Warsaw, Poland

University of Warsaw
First Joint International Meeting between the AMS and the Polish Mathematical Society
Associate secretary: Susan J. Friedlander

Please visit the website maintained by the local organizers for this meeting at http://www.ams.ptm.org.pl/.

Aug 9 2007 - Aug 12 2007 Sandbjerg Slot

AUIMF Summer School:
Satellite Summer School on "Lévy Processes: Theory and Applications"
Se: http://www.math.ku.dk/conf/levy2007/summerschool.htm
Organized by Eva Vedel

Aug 13 2007 - Aug 17 2007 MCI/SDU Sønderborg

60th European Study Group with Industry
Den Klassiske 1-uges industri-tænketank ligger i år 2007 i grænselandet!
Kan for studerende udvides til ECTS pointgivende ph.d. kursus. Se: http://www.mat.dtu.dk/ESGI

The Center for the Topology and Quantization of Moduli Spaces (CTQM)

CTQM is situated at the Department of Mathematical Sciences (IMF) at the Faculty of Science, the University of Aarhus. The center is directed by Assoc. Prof. Jørgen Ellegaard Andersen. There are currently 6 permanent members, 8 associated permanent members (attached through the Niels Bohr Visiting Professorship initiative), 5 visiting members, 5 Post Doc's, 11 PhD students, 4 visiting PhD students and 19 associated international collaborators.

The center was created January 1 2006 based on a grant from the Danish Natural Science Research Council.

The center focuses on the investigation of the topology and quantization of moduli spaces associated with two-dimensional surfaces and their mapping class groups.

It is a collaborative project involving algebraic topology, algebraic geometry, Riemann surface theory, gauge theory, and Berezin-Toeplitz quantization.

The center will pursue the significant new research opportunities arising from three recent important developments:

The Madsen-Weiss proof of the famous conjecture of Mumford on the stable cohomology of the moduli space of curves.

Chas and Sullivan's discovery of the new structures on the topology of loop spaces of manifolds.

The Andersen-programme which uses the theory of Toeplitz operators on the moduli space of bundles to study topological quantum field theory, and which has resulted in a proof of Turaev's asymptotic faithfulness conjecture.

It is the long-term vision of the researchers in moduli problems to fuse and apply the emerging mathematical frameworks of the above three developments to the mathematical study of quantum field theory and string theory. The center endeavours also to assist in this process, in particular in collaboration and interaction with the Center for Theory in the Natural Sciences at the Faculty of Science, the University of Aarhus.

An active international PhD and postdoc programme is an absolute top priority for the center. The center's activities also include a weekly seminar and an extensive visiting programme for its associated international collaborators and their PhD students and postdocs.

August 1 2006 the center considerably extended its activities through the Niels Bohr Visiting Professorship initiative of the Danish National Research Foundation. Professor Nicolai Reshetikhin from University of California has been attached to the center as Visiting Niels Bohr Professor. The initiative involves besides the premanent researchers at CTQM a further 4 researcher from IMF and 4 researchers from IFA. These have been attached to the center as associated permanent members.

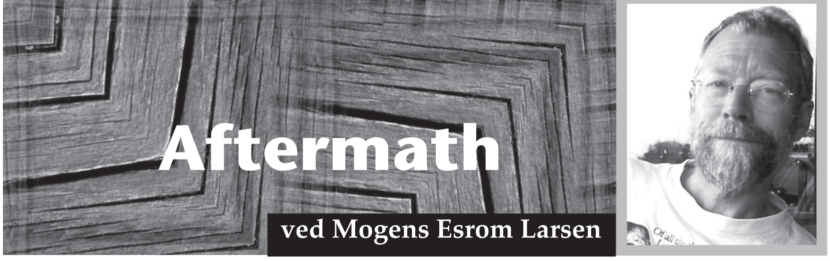
The coordination committee for the Niels Bohr Visiting Professorship Initiative consist of Assoc. Prof. Jørgen Ellegaard Andersen, Director of CTQM and Researcher in Charge of the Niels Bohr InitiativeNiels Bohr Visiting Professor, Nicolai Reshetikhin Prof. Henning Haahr Andersen, Director of AALT and Nodecoordinator of LIEGRITS Prof. Klaus Mølmer, Director of CTN and AU-coordinator of QUANTOP The coordination committee will condinate all events under the initiative.

The scientific cooperation behind the Niels Bohr initiative is within the fields of Mathematics and Theoretical Physics. It involves quantum topology and quantization of moduli spaces, quantum algebras and their representations, statistical mechaniques related to quantum gauge theory and string theory, cosmological aspects of string theory together with the relation between quantum information theory, quantum optics and topological quantum field theory. For more information see the description of the planned research cooperation.

There is an intense visiting program planned for the comming year, which includes the 2007 CTQM Nielsen Lecture, five master classes, three workshops and a weekly short term visitor program.

For more information see the Center's webpage:
http://www.ctqm.au.dk/

For information about vacant positions (post-docs), see http://www.ctqm.au.dk/news/vacancies.html



LØSNINGER

Alle opgaver er løst af problemgruppen "Con Amore" (CA).

Fra børnehaven 1

Lille Peter Dummkopf sidder og leger med sine klodser. Han har 9 klodser, og på dem står tallene fra 1 til 9. Stiller han nogle af dem på række, danner de jo et tal. Nogle af tallene er primtal.

Hvad er det største primtal, han kan få frem på denne måde?

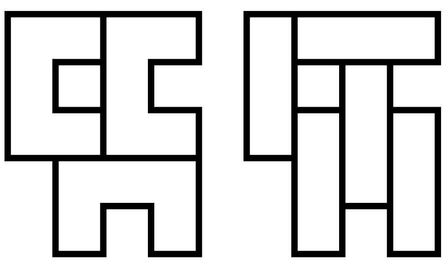
Vi må nøjes med at bruge 8 klodser, da alle tal af cifrene 1 til 9 er delelige med 3. Det største 8-cifrede er lige, men det næststørste er heldigvis et primtal:

98765431

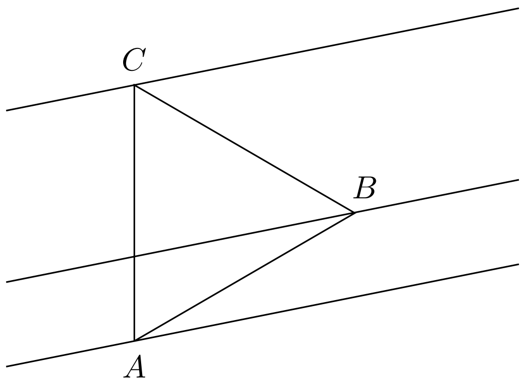
Fra børnehaven 2

Lille Peter sidder med sine puslebrikke, han har 3 u-formede og 5 i-formede:

Han prøver nu på, om han kan dække de 3 U-er med de 5 I-er uden at lade de ens brikker lappe over hinanden. Vil det lykkes for ham?



Et trekantet problem



Der er givet tre parallelle linier. Man skal så i al sin enkelhed konstruere en ligesidet trekant, der har et hjørne på hver af de tre parallelle linier.

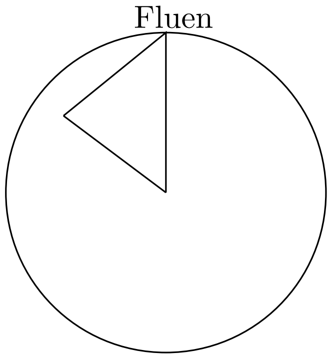
Denne opgave er løst af Henrik Meyer.

Drejes figuren om A 60^o går B over i C og den midterste linie over i en linie gennem C. Punktet findes derfor som skæringen mellem de to linier.

Fluen i flasken

På bunden af en flaske ligger en tændstik, der er 4 cm lang. Den ligger sådan, at svovlet netop er i centrum af flaskens bund, som for resten er 10 cm i diameter.

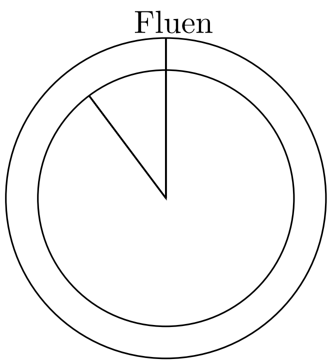
2



Nu går der en flue rundt på flasken langs kanten. Fluen ser med 1000 øjne på tændstikken, og den bemærker, at nogle steder fra syner tændstikken længere end andre steder fra. Der er endda to steder, hvorfra tændstikken nærmest ligner et punkt.

Når fluen befinder sig der, hvorfra tændstikken syner størst, hvor langt er fluen så fra tændstikkens anden ende end svovlenden?

Denne opgave er løst af Henrik Meyer.



3 cm. Hvis vi lader fluen sidde, og blot roterer tændstikken om svovlet, så er det klart, at den syner størst, når sigtelinien fra flue til tændstikende er tangent til den cirkel, tændstikken beskriver. Så afstanden bliver den ene katete i en retvinklet trekant med hypotenuse 5 cm og den anden katete 4 cm.

Skovturen

CA's løsning er ikke den her givne.

Jeg har denne opgave fra Peter Winckler.

Arrangøren af institutskovturen, Jörg Trinkwasser, var fanatisk afholdsmand. Han ville derfor forsøge at lokke deltagerne til at miste chancen for en snaps til frokosten. Han foreslog derfor følgende julileg:

Han stillede 50 lukkede kasser på række, og i hver kasse lagde han navnet på en af de 50 deltagere, så hvert navn lå i en og kun en kasse. Nu foreslog han deltagerne at gå ind til kasserne en ad gangen og åbne 25 kasser. Hvis nu det lykkedes for samtlige deltager at finde sit eget navn i en af de åbnede kasser, så skulle der serveres snaps til frokost.

Deltagerne drøftede om det ikke var lidt for chanceløst. Hvis hver deltager valgte 25 tilfældigt ud, så var chancen for en snaps jo $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, et ikke så stor tal igen.

Er der et godt forslag til forbedring af sandsynligheden?

Ja, sandsynligheden kan øges betydeligt, til ca. 31%. Vi aftaler en nummerorden af kasserne og af deltagerne. Hver deltager går nu hen til kassen med hans nummer og åbner den. Derefter går han til nummeret på den i kassen nævnte etc. Til sidst når han jo sit eget nummer, spørgsmålet er kun om det sker før eller efter det 25. forsøg. Det er tilfældet, hvis den tilfældigt valgte permutation har alle cykler af længde højst 25. Nu er sandsynligheden for, at der er en cykel af længde $k > \frac{n}{2}$ jo

$$\frac{\binom{n}{k}(k-1)!}{n!} = \frac{1}{k}$$

så sandsynligheden for at alle er så lange er

$$\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \log 2 \simeq 0,69$$

De glemte byttepenge

Der var udsalg hos den lokale matematiker. Man kunne købe 100 formler for 5 kr. stykket, så det var ikke underligt, at ved udsalgets start kl. 7 om morgenen var der allerede en kø på 100 begejstrede amatører.

I sin distraktion havde matematikeren glemt at få byttepengene med, men det kunne måske lade sig gøre at få solgt de 100 formler alligevel. Faktisk havde 50 af personerne i køen lige penge, mens de øvrige 50 kun havde en 10 krone. Så hvis vi var så heldige, at de 50 med femmerne stod forrest, så kunne det jo sagtens gå.

Selvfølgelig kunne man også tænke sig, at folk snakkede sammen og så videre. Men egentlig kunne matematikeren ikke lide at indrømme, at han ikke havde husket byttepengene.

Problemet er, hvor stor er sandsynligheden for, at ingen opdager, at der mangler byttepenge? Altså, hvad er sandsynligheden for, at for hver 10–er i køen er der en 5–er, der kommer før 10–eren til kassen?

Sandsynligheden er $\frac{1}{51}$.

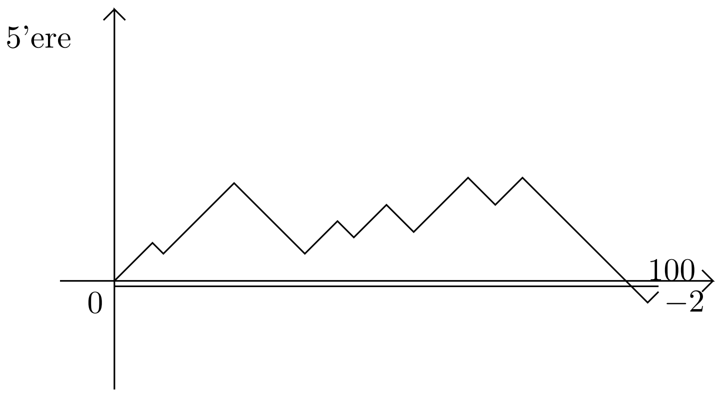
Lad os først tænke os, at vi har byttepenge nok. Vi tegner nu et diagram over antallet af femmere i kassen. Deres antal begynder og ender med det samme antal, der kommer 50 ind og går 50 ud. Og hver ekspedition giver en forandring, enten én ind eller én ud. På figuren er tegnet et typisk forløb.

Et gunstigt forløb er et forløb, hvor antallet aldrig når under startniveauet. Hvis vi tillader gæld, er spørgsmålet, hvor mange sådanne knækfunktioner er aldrig negative, og hvor mange knækfunktioner er der ialt, som begynder og ender med 0?

Antallet af funktioner er let at beregne, det er antallet af måder, vi kan placere de 50 femmere på de 100 pladser, altså

$$\binom{100}{50} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 51}{50!}$$

I stedet for at beregne antallet af gunstige, beregner vi antallet af ugunstige. Vi betragter derfor en funktion, der på et tidspunkt bliver -1. Fra det sted spejler vi funktionen i linien $y = -1$, og derved fås en funktion, der ender i -2



Og det kan vi jo gøre med enhver ugunstig. Så antallet af ugunstige er det samme som antallet af funktioner, der starter i 0 og ender i -2. Men det må jo være dem, der kun får 49 femmere ind, men 51 ud, altså

$$\binom{100}{49} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 52}{49!}$$

Sandsynligheden for et ugunstigt forløb er derfor

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 52 \cdot 50!}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 51 \cdot 49!} = \frac{50}{51}$$

NYE OPGAVER

Polynomielt

Vis, at rødderne i et 5–te grads polynomium med reelle koefficienter,

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

der opfylder betingelsen $2a^2 < 5b$, ikke alle er reelle.

Systematisk

Løs ligningerne

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$

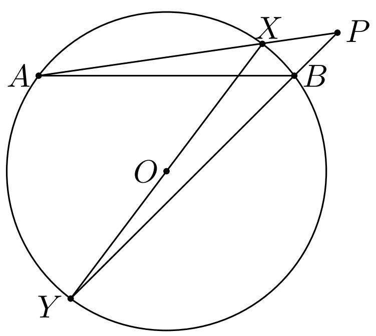
Diophantisk

Find samtlige heltallige løsninger til

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2$$

Geometrisk

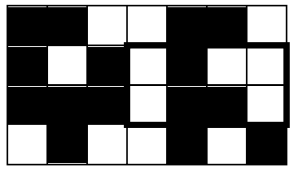
Lad A og B være to punkter på en cirkel. Lad XY være en diameter, og lad P være skæringspunktet mellem linierne gennem A og X og B og Y hhv.



Bestem det geometriske sted for skæringspunkterne P, når XY gennemløber diametrene.

Skuffende

Antag, at hvert felt af et 4×7 skakbræt er farvet enten hvidt eller sort.

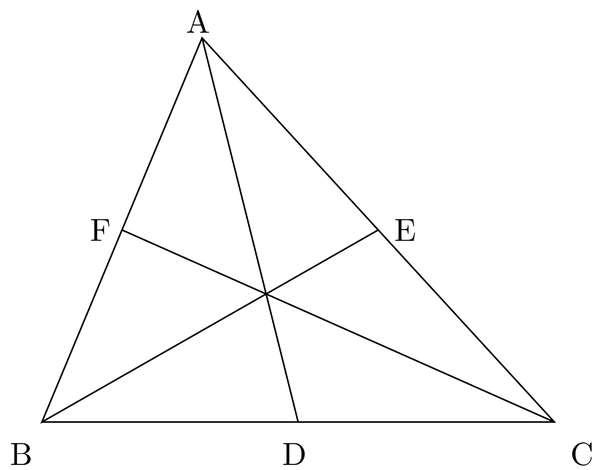


Vis, at for enhver sådan farvelægning findes et rektangel med akseparallelle sider og de fire hjørner af samme farve.

Babylonisk

Ni matematikere mødes til en international konference og opdager, at blandt hver tripel er der to, som taler et fælles sprog. Hvis vi yderligere ved, at hver matematiker højst taler tre sprog, så skal man vise, at der er tre matematikere, der taler et fælles sprog.

Noget om medianerne



I en trekant, $\triangle ABC$, er tegnet de tre medianer, dvs. at f. eks. D er midtpunktet af liniestykket BC. Trekanten $\triangle DEF$ er ligedannet med $\triangle ABC$, og da siderne er halvt så lange, er dens areal en fjerdedel. Også hver af de tre trekanter, $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, og $\triangle CDE$ er ligedannede med den oprindelige i halv størrelse og derfor af areal en fjerdedel.

Man kan nu tegne en trekant med siderne af længde som de tre medianer, AD, BE og CF. Opgaven går ud på at vise, at denne mediantrekants areal er $\frac{3}{4}$ af trekantens, $\triangle ABC$.

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C