mat
MATILDE

TEMA: Musik og Matematik

NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR 28 SEPTEMBER 2006

Leder

Af: Søren Eilers (Ny formand for DMF)

Da det blev klart at den afgående bestyrelse ville pege på mig som formandskandidat brugte jeg lidt tid på at grundigt genlæse Kurt Ramskovs højst anbefalelsesværdige skrift i Historia Mathematica [vol. 27 (2000), 223-242] om foreningens tidlige år. Det slog mig at selv om vores fag ubestrideligt har udviklet sig eksplosivt i de år der er gået siden foreningens grundlæggelse, så er ændringerne i de ARBEJDSFORHOLD vi har som matematikere næsten mere fundamentale. I det 19. århundrede måtte DMF gå ind og løfte opgaver som vi i dag tager for givet fra læreanstalternes side - fx biblioteker, foredragsmuligheder etc. - men til gengæld var matematikmiljøet så lille og lokaliseret at mange af de opgaver vi lægger vægt på i dagens DMF om at skabe sammenhæng hen over land og institutioner var stort set redundante.

Det er naturligvis af den yderste betydning for DMF at vi bliver ved med at tilpasse os til de ændrede forhold vores fags udfoldelse betinger. Vi har heldigvis stadigvæk stort set alle landets fastansatte forskningsmatematikere som medlemmer, og et svagt voksende medlemsskab udenfor denne kreds, men jeg kan godt blive lidt bekymret af at vi rekrutterer så relativt dårligt blandt ph.d-studerende. Hvis ikke vores forening synes relevant for dem, så er det noget galt!

Men hvis jeg må starte med at pege på et par områder hvor jeg mener at vi gør det godt uden de store behov for tilpasninger, så vil jeg starte med vores PUBLIKATIONS-AKTIVITET. Nærværende blad, Matilde, har defineret en vigtig rolle for sig selv som det uformelle organ for matematikere i landet og vedbliver at publicere vedkommende og inspirerende temanumre, og vore to tidsskrifter i samarbejde med de øvrige nordiske foreninger - Math. Scand. og NORMAT - løfter også flot de to forskellige opgaver de har. Og vi stiller flere vigtige ELEKTRONISKE VÆRKTØJER til rådighed for danske matematikere, som e-matnytkalenderen, medlemsdatabasen. preprintserveren og jobdatabasen.

Vi er også, synes jeg, effektive INTERNATIONALT i samspil med vore søsterforeninger og med EMS. Men jeg synes det er værd at se nærmere på om vi kan blive bedre til at skabe sammenhæng i vort fag NATIONALT. Der skal ikke herske tvivl om at dette er en opgave som DMF har taget meget alvorligt i mange år, og med såvel årsmøderne som sommerskolerne yder vi et mærkbart bidrag til at matematikere fra forskellige institutioner lærer hinanden at kende. Men jeg tror at der er behov for at vi gør mere, også for at skabe kontakter til de af vore medlemmer der ikke arbejder på universiteterne, og til matematikvenlige kolleger i vores nabofag. Jeg vil arbejde for at vi finder nye måder at bygge broer i det danske matematiklandskab på, for det er af stor betydning i lyset af de krav der stilles til os fra politisk hold hvad enten det drejer sig om indbyrdes konkurrence, om kontakt til erhvervslivet eller om tværfaglighed. Vi er i gang med genoplive en tidligere serie af dobbeltforedrag med nogle af vore søsterforeninger, men der skal nok også helt nye ideer til. Forslag er meget velkomne, især fra medlemmer ansat udenfor universiteterne.

Ved årsmødet diskuterede vi FORMIDLING af matematik overfor den bredere offentlighed. Jeg er lidt usikker på hvor aktivt foreningen skal forholde sig i dette område, for universiteterne gør også meget hver for sig, og der er jo ikke nogen grund til at gå i konkurrence med vore arbejdspladser om mediernes opmærksomhed. På den anden side kom det klart frem under årsmødet at god formidling ikke altid behøver at være dybt original, sådan at vi med fordel kan dele og udveksle emner. Det kom også frem at visse oplagte formidlingsmuligheder af og til blev forpasset fordi der ikke var nogen af universiteterne der agerede på dem, så jeg tror at vi skal se på at lave en slags formidlingsberedskab i foreningens regi.

Man kan også spørge hvor aktive vi skal være som INTERESSEORGANISATION. I den forrige bestyrelses tid var vi meget forsigtige med ikke at gå ud med en politisk melding uden at være helt enige. Jeg tror at det er en sund strategi at når vi tager ordet, fx overfor politikerne, så har vi sikret os at vi kan tale for hele foreningen, men det kan jo også være farligt ikke at mene noget om vigtige sager.

Lad mig slutte af med at pege på et par helt nye veje jeg synes foreningen skal overveje at bevæge sig ud ad. For det første mener jeg at vi bør påtage os opgaven at være en SPROGBÆRENDE organisation, der kan fortælle alle der måtte ønske det hvordan man kommunikerer matematik på dansk. Jeg mener det er vigtigt og naturligt at undervise på engelsk af og til for at sikre internationalisering (også for de dansktalende studerendes skyld), men det har jo den pris at vi ikke hver gang får videreformidlet hvad tingene hedder. Vi risikerer at det bliver glemt og at vores fagsprog bliver ramt af det lingvisterne kalder domænetab.

Den anden nye vej er FUNDRAISING. Jeg ved fra min tid som kasserer at foreningens økonomi er meget sund, men der er ikke megen plads i den til større projekter og nyskabelser. Vi kommer selvfølgelig aldrig til at have et råderum som vore søsterorganisationer i fx USA og Storbritannien, men måske vi alligevel kan lære noget af deres metoder? Jeg synes vi skal prøve at være lidt mere aggressive på denne front for at kunne få råd til at sætte ting i værk der koster noget, og som et første forsøg i denne retning er jeg ved at prøve at finde sponsorer til en specialepris.

Det er altid værd at tage en diskussion om hvad foreningen skal (og ikke skal) beskæftige sig med, og vi kommer til at arbejde med flere af disse spørgsmål i bestyrelsen i løbet af efteråret. Jeg håber at mange af medlemmerne vil have lyst til at bidrage til videre diskussion på den ny "Formandens side" jeg har fået sat op på foreningens hjemmeside www.mathematics.dk, eller ved blot at kontakte mig på eilers@math.ku.dk.

mat

Matilde – Nyhedsbrev for Dansk Matematisk Forening medlem af European Mathematical Society

Nummer 28 – September 2006

Adresse:

Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø

Fax: 3532 0704
e-post:
matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Matilde udkommer 4 gange om året

Indlæg til næste nummer skal være redaktionen i hænde senest 24. november 2006

Tema: Matematik i Norden: Finland

Indhold:

TEMA: Musik og Matematik

Billede på forsiden:
Eustache Le Sueur: The Muses -Ê Clio, Euterpe and Thalia
(Musée du Louvre, Paris)

Introduktion til temaet:

For tre år siden havde Matilde et temanummer om Kunst og arkitektur, og her var forbindelsen til matematikken og dens anvendelser åbenlys. Med det nuværende tema om musik er forbindelsen måske ikke helt så klar.
Leibniz' aforisme siger godt nok, at glæden ved at høre musik er som glæden ved at tælle uden at vide det, men som i de fleste aforismer er udsagnet kun en lille del af sandheden.

"Music is the pleasure the human mind experiences from counting without being aware that it is counting"

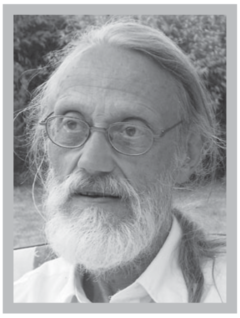
G. Wilhelm Leibniz

Der findes faktisk en meget righoldig litteratur på området: Det kan man eksempelvis forvisse sig om ved bare at se på den kommenterede bibliografi i den engelske algebraiker Dave Benson's nye bog om emnet, Music: a Mathematical Offering. Web-versionen af denne enestående bog, som må siges at være skrevet for matematikere, kan hentes på forfatterens hjemmeside og den illustrerer en overvældende mangfoldighed af samspil mellem musik og matematik. Den indeholder også en lang liste over litteratur om emnet på nettet.

Dave Benson er en af bidragyderne til dette nummer. Hans artikel har berøringspunkter med en anden artikel af den norske matematiker Liza Lorentzen om musik og kædebrøker. Vi har også modtaget en meget længere artikel om samme emne på engelsk fra Liza, som vi måske bringer ved en senere lejlighed. Dette nummer indeholder også afslutningen på Eystein Raudes lange generelle artikel "Om musikk og matematikk" hvis første del blev bragt i sidste temanummer. (Den kan også læses i Matildes arkiv). Som det vil ses, har den ligeledes væsentlige berøringspunkter med de andre artikler. Endelig har en af temaredaktørerne skrevet en artikel med Peter Brask (komponist og emeriteret litteraturprofessor) om elementær gruppeteori og tolvtonemetoden. Forfatterne har i mange år arbejdet på en bog om emnet. Den matematiske side af teorien har budt på en del lidt "skæve" men interessante spørgsmål.

Temaredaktørerne har haft rigeligt med materiale at vælge imellem til dette nummer, således at der i senere udgaver kan komme yderligere bidrag. Vi håber fx. at kunne bringe artikler af Thor Bak (om komponisten Per Nørgårds uendelighedssekvens) og af Jørgen Tind.

Det matematiske grundlag for den udvidede tolvtonemetode



Af: Peter Brask *og* Jørn B. Olsson
Bjørnsonsvej 22, 2500 Valby
email: peter-brask-valby@post.tele.dk
Institut for Matemtiske Fag, KU,
email: olsson @math.ku.dk

Musikeksempler til denne artikel (i mp3-format) kan downloades på internetadressen
http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M28/Musik

1 Indledning

Tolvtonemetoden er et grundlag for musikalsk komposition, som blev skabt af østrigeren Arnold Schönberg (1874-1951) i 1920-erne. Det udvikledes videre af bl.a. Alban Berg, Anton Webern, Nikolas Skalkottas, Ernst Krenek, Luigi Dallapiccola - og Igor Stravinsky.

Musik baseret på denne metode kaldes tolvtonemusik eller dodekafon musik. Schönbergs idé var at bygge hver komposition på transpositionerne af en valgt 'tolvtonerække' og tre kontrapunktiske varianter af den, - ialt 48 rækker. Metoden leverer rækkerne uden at sige, hvordan der kan komponeres med dem. Men komponisten kan vælge sit materiale med særlige hensigter - og opdukkende egenskaber i et valgt materiale kan give ideer til brugen. - Metoden stammer fra den gamle kontrapunktiske teknik, hvis største monument er J.S.Bachs komposition "Fuga-Kunsten". Den angik melodier (temaer) - og grundtanken var at udvikle dem ved transformation af intervalkæder. Gennem andre komponisters kompositoriske praksis blev Schönbergs fire grundformer efterhånden til 32 - og hans 12 transpositioner til 144 'transrotationer', så de 48 rækkeformer blev til 4608. Men det skete spredt og uden overordnet forståelse af sammenhængen. Den kan etableres via gruppeteori - og når den strukturelle helhed formuleres, åbnes der mange nye perspektiver, både musikteoretisk og kompositorisk. - Afsnit 2 opstiller den gruppeteoretiske baggrund. Afsnit 3 giver det musiktekniske grundlag. Og i 4 fremlægges begyndelsen af en matematisk udarbejdelse af ideens konsekvenser.

2 Gruppeteoretisk baggrund

Vi får brug for nogle elementære uddrag af teorien for endelige grupper, specielt permutationsgrupper og gruppeoperationer, som kort præsenteres her. En mere udførlig fremstilling kan for eksempel findes i [5].

En gruppe er en mængde G med en *"multiplikation"* $*$, som til ethvert par g og h af elementer i G tilordner et element $g * h \in G$; dette element kaldes sædvanligvis "produktet" af g og h. Multiplikationen skal opfylde tre krav.

(1) For ethvert valg af $g, h, k \in G$ skal gælde $(g * h) * k = g * (h * k)$.
(2) G skal indeholde et element e, som opfylder $g * e = e * g = g$ for ethvert valg af $g \in G$. Man kalder e for gruppens *neutralelement*.
(3) Til ethvert element $g \in G$ findes et element g^{-1}, der opfylder $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$. Man kalder g og g^{-1} for *modsatte* elementer.

Vi vil her antage at G har et endeligt antal elementer $|G|$, som vi kalder gruppens *orden*. En (ægte) *undergruppe* af G er en (ægte) delmængde af af G, som med $*$ selv danner en gruppe. I det følgende vil vi betegne produktet af g og h i en gruppe med gh.

En afbildning r mellem to grupper G og H kaldes en *homomorfi*, hvis $r(gh) = r(g)r(h)$ for alle $g, h \in G$. Hvis homomorfien også er en bijektion kaldes den en *isomorfi*. Vi kalder i så fald G og H *isomorfe* og skriver $G \simeq H$. Hvis homomorfien kun er surjektiv, kaldes H en *faktorgruppe* af G.

Potenserne af et element g er de endelige produkter $g^k = gg \cdots g$ (k gange, $k \geq 0$) af g med sig selv (inklusivt et "tomt" produkt $g^0 = e$). Potenserne danner en *cyklisk* undergruppe $gp(g)$, hvis orden også kaldes ordenen af g og betegnes $|g|$. Hvis $|g| = n$, så er $gp(g) = \{g^0 = e, g = g^1, ..., g^{n-1}\}$, (og den er isomorf med den additive gruppe af restklasser modulo n.) Mere generelt skal for $g_1, \cdots, g_n \in G$ $gp(g_1, .., g_n)$ være den mindste undergruppe af G, som indeholder $g_1, ..., g_n$. Vi kalder $g_1, ..., g_n$ for *frembringende elementer* for $gp(g_1, .., g_n)$.

Vi får også brug for at kunne definere en abstrakt gruppe X ved hjælp af *frembringere og definerende relationer*:

$$X = gp(g_1, ...g_n | R_1, ..., R_k)$$

hvor g_i'erne er frembringere og R_j'erne er relationer, der beskriver sammenhænge mellem frembringerne og gør det muligt at "forenkle" produkter af dem. Vi vil her kun bruge en sådan "præsentation" af en gruppe til at genkende/identificere den i andre sammenhænge: Hvis man i en konkret gruppe G finder frembringende elementer $g_1, ...g_n$, der opfylder alle relationerne, så er den en faktorgruppe af X og hvis de har samme orden, så er de isomorfe.

Vi nøjes her med to eksempler, den cykliske gruppe $\mathcal{C}_n$ af orden n og diedergruppen $\mathcal{D}_{2n}$ af orden $2n$:

$$\mathcal{C}_n = gp(g | g^n = e)$$

$$\mathcal{D}_n = gp(g, h|g^2 = e, h^2 = e, (gh)^n = e).$$

(For læsere, der kender den geometriske realisering af diedergruppen, nævnes, at gh svarer til en "drejning" og g til en "spejling" af en regulær n-kant.)

To elementer g, h i en gruppe G kaldes *konjugerede*, hvis der findes et $a \in G$ således at $a^{-1}ga = h$. Vi siger at a konjugerer g til h. Elementerne g, h *kommuterer* hvis $gh = hg$. De elementer $z \in G$ der kommuterer med *alle* elementer i G, danner en undergruppe i G, gruppens *centrum* $Z(G)$. Hvis H er en undergruppe, så består *normalisatoren* $N_G(H)$, af H i G af de elementer i G, der konjugerer ethvert element i H til et andet element i H. Det er igen en undergruppe i G.

Vi vil være særligt interessede i grupper af permutationer. Hvis M er en endelig mængde, så er en *permutation* af M en bijektiv afbildning af M på sig selv. Mængden af permutationer $\mathfrak{S}(M)$ af M danner en gruppe med sammensætning af afbildninger som produkt, den *symmetriske gruppe* på M. Vi må her præcisere, at når P og Q er permutationer, skal PQ betyde den permutation, man får ved først at bruge P og dernæst Q på resultatet.

(Vi følger her Coxeter og Mosers praksis i "Generators and Relations for Discrete Groups"(1980), som er en hovedkilde til vore strukturbeskrivelser. De skriver: "Opinions seem to be evenly divided as to whether products of group elements should be read from the left to right or from right to left. We choose the former convention, so that, if A and B are transformations, AB signifies the transformation A followed by B.")

Hvis $|M| = n$, så er $|\mathfrak{S}(M)| = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. En *permutationsgruppe* (på M) er en undergruppe H af $\mathfrak{S}(M)$. Vi siger at H opererer på M og kalder elementerne i $\mathfrak{S}(M)$ for operatorer. Sædvanligvis fremstilles permutationer i gruppeteoretiske sammenhænge som produkt af disjunkte cykler.

En cykel ef elementer i M noteret $(a, b, c, ..., k)$ betyder at a afbildes i b, b i c, og så videre til k, som afbildes i a. Alle andre elementer i M afbildes i sig selv. Cyklens længde er dens elementantal. En permutation af M er så et produkt af disjunkte cykler, som tilsammen indeholder alle elementer fra M. Typen for en permutation er en liste over dens antal af cykler for hver længde. En cykel læst baglæns giver den modsatte cykel. Den modsatte permutation P^{-1} til en permutation P består af de modsatte cykler til cyklerne i P. Det er klart at en permutation og dens modsatte har samme type. To cykler er konjugerede netop når de har samme længde og mere generelt er to elementer i $\mathfrak{S}(M)$ konjugerede netop når de har samme type. Man kan altid finde et element af orden 2 (en *inverskonjugator*), som konjugerer et element P i dets modsatte. Elementet og inverskonjugatoren frembringer så en diedergruppe isomorf til $\mathcal{D}_{|P|}$, hvis $|P| > 2$.

Det er velkendt, at en (endelig) gruppe G kan opfattes som en permutationsgruppe på mængden af dens elementer. Dette kan gøres med højre- eller venstremultiplikation. Hvis $r \in G$ defineres $\mathfrak{r}(r), \mathfrak{l}(r) : G \to G$ ved

$$\mathfrak{r}(r)(g) = gr \ , \ \mathfrak{l}(r)(g) = r^{-1}g.$$

Det ses let, at $\mathfrak{r}(r), \mathfrak{l}(r) \in \mathfrak{S}(G)$ og at $\mathfrak{r}(rs) = \mathfrak{r}(r)\mathfrak{r}(s)$, $\mathfrak{l}(rs) = \mathfrak{l}(r)\mathfrak{l}(s)$ for alle $r, s \in G$. $\mathfrak{r}(r), \mathfrak{l}(r)$ kaldes henholdsvis *højreoperatoren/venstreoperatoren med basis* r. Lad endelig $\mathfrak{b} : G \to G$ være operatoren på G defineret ved $\mathfrak{b}(g) = g^{-1}$. Vi har at $\mathfrak{b} \in \mathfrak{S}(G)$ opfylder $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{-1}$. For $g \in G$ gælder $\mathfrak{b}\mathfrak{l}(g)\mathfrak{b} = \mathfrak{r}(g)$ og vi kalder $\mathfrak{l}(g)$ og $\mathfrak{r}(g)$ for *sideanaloge*.

Vi vil nu antage, at $Z(G) = \{e\}$ for at undgå sammenfald af operatorer. (Senere vil vi kun anvende det følgende på $G = \mathcal{S}_{12}$, som har $Z(G) = \{e\}$.) Hvis H er en undergruppe af G kan vi betragte $\mathfrak{R}_H = \{\mathfrak{r}(h)|h \in H\}$ og $\mathfrak{L}_H = \{\mathfrak{l}(h)|h \in H\}$. De er undergrupper af $\mathfrak{S}(G)$ og har kun neutralelementet fælles. Homomorfierne $\mathfrak{r}, \mathfrak{l}$ viser at begge grupper er isomorfe med H. Elementerne i $\mathfrak{R}_H$ og i $\mathfrak{L}_H$ kommuterer og vi kan derfor også opfatte det kartesiske produkt $\mathcal{O}_H^* = \mathfrak{L}_H \times \mathfrak{R}_H$ som undergruppe i $\mathfrak{S}(G)$ af orden $|H|^2$. Operatoren $\mathfrak{b}$ konjugerer specielt $\mathfrak{L}_H$ i $\mathfrak{R}_H$ (og omvendt) og normaliserer undergruppen $\mathfrak{L}_H \times \mathfrak{R}_H$. Mængden af alle produkter af et element fra $\mathfrak{L}_H \times \mathfrak{R}_H$ med et element fra $gp(\mathfrak{b})$ danner derfor en gruppe af orden $2|H|^2$, der opererer på G. Det er

$$\mathcal{O}_H = (\mathfrak{L}_H \times \mathfrak{R}_H) \rtimes gp(\mathfrak{b}) \ \ (\simeq (H \times H) \rtimes \mathcal{C}_2)$$

som vi kalder *hovedgruppen med basis* H (i $\mathfrak{S}(G)$). (Den er et eksempel på et såkaldt kransprodukt, wreath product). Skrivemåden $H \rtimes K$ betyder generelt, at der er tale om et *semidirekte produkt*. Grupperne har så kun neutralelementet fælles og K normaliserer H. Gruppen K kaldes et *komplement* til H.

Af særlig interesse er for os mængden $\mathcal{T}_n = \{1, 2, ..., n\}$ og den tilhørende symmetriske gruppe $\mathcal{S}_n = \mathfrak{S}(\mathcal{T}_n)$. Her har vi diedergruppen $D = \mathcal{D}_n = gp(c, d|c^2 = e, d^2 = e, (cd)^n = e)$ som undergruppe, hvis vi fx. vælger cd som en n-cykel og c som dens inverskonjugator. Den tilsvarende hovedgruppe $\mathcal{O}_D$ af orden $8n^2$ kan frembringes af $p = \mathfrak{r}(c), g = \mathfrak{l}(d)$ og $b = \mathfrak{b}$. De opfylder relationerne

$$p^2 = b^2 = g^2 = (pb)^4 = (bg)^4 = (pg)^2 = (pbgb)^n = e \qquad (1)$$

Den hermed isomorfe abstrakte gruppe T^{44n} er beskrevet af Coxeter 1939 og 1980; (se [3]:109-112 og [4]: 47 og 104f). Relationerne

$$p^2 = b^2 = g^2 = (pb)^4 = (bg)^4 = (pg)^2 = e \qquad (1^*)$$

definerer den uendelige 'krystallografiske' gruppe **p4m**. Undergruppeforholdene for p4m er beskrevet i Coxeter-Moser [4] hvilket er belejligt for os fordi $\mathcal{O}_D$ spiller en hovedrolle i den følgende musikteori. (Faktisk er $\mathcal{O}_D \simeq T^{44n}$ jo en faktorgruppe af **p4m**.) Ydermere giver denne geometriske forbindelse os adgang til at tegne grafer for vore musikgrupper.

Fremstillinger af tapetgrupperne eller de to-dimensionale krystallografiske grupper er kendt fra mosaikker i Alhambra og muslimske pragtbygninger verden over. Fundamentalt bygger de på netop sytten mønstre som dannes ved flytninger af visse trekanter og firkanter. Hvert mønster svarer til en gruppe, og de sytten grupper er undergrupper i to af de sytten, kaldet **p4m** og **p6m**. Mønstergrupperne er uendelige, men kan afgrænses ved tilføjelse af bestemte relationer som for eksempel $(pbgb)^n = e$ ovenfor, der giver p4m-mønstre med $8n^2$ forbundne punkter. Disse mønstre fås ved fortsatte spejlinger af en retvinklet, ligebenet trekant om dens sider (svarende til p, b og g); punkterne markerer de steder, trekanten flyttes til, og linjerne mellem dem angiver spejlingerne. Resultatet er det mønster, man f.eks. ser på gulvet i Københavns Hovedbanegard. Som vi skal se, kan det også være model for relationerne i en mængde af tolvtonerækker - og derfor bruges til at lægge køreplaner for stemmeforløb i tolvtonemusik. Også mønstrene for p6m har dodekafone tolkninger. Læs eventuelt mere herom i Brask [1].

En permutation $P \in \mathcal{S}_n$ skrives udførligt

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix},$$

som betyder at i ved P afbildes i $s_i,\ i = 1, 2, ..., n$. Her kan den nederste række ses som en ordning af $1, ..., n$ og vi kalder en sådan ordning en n-række og betegner den

$$R =< s_1 s_2 ... s_n > .$$

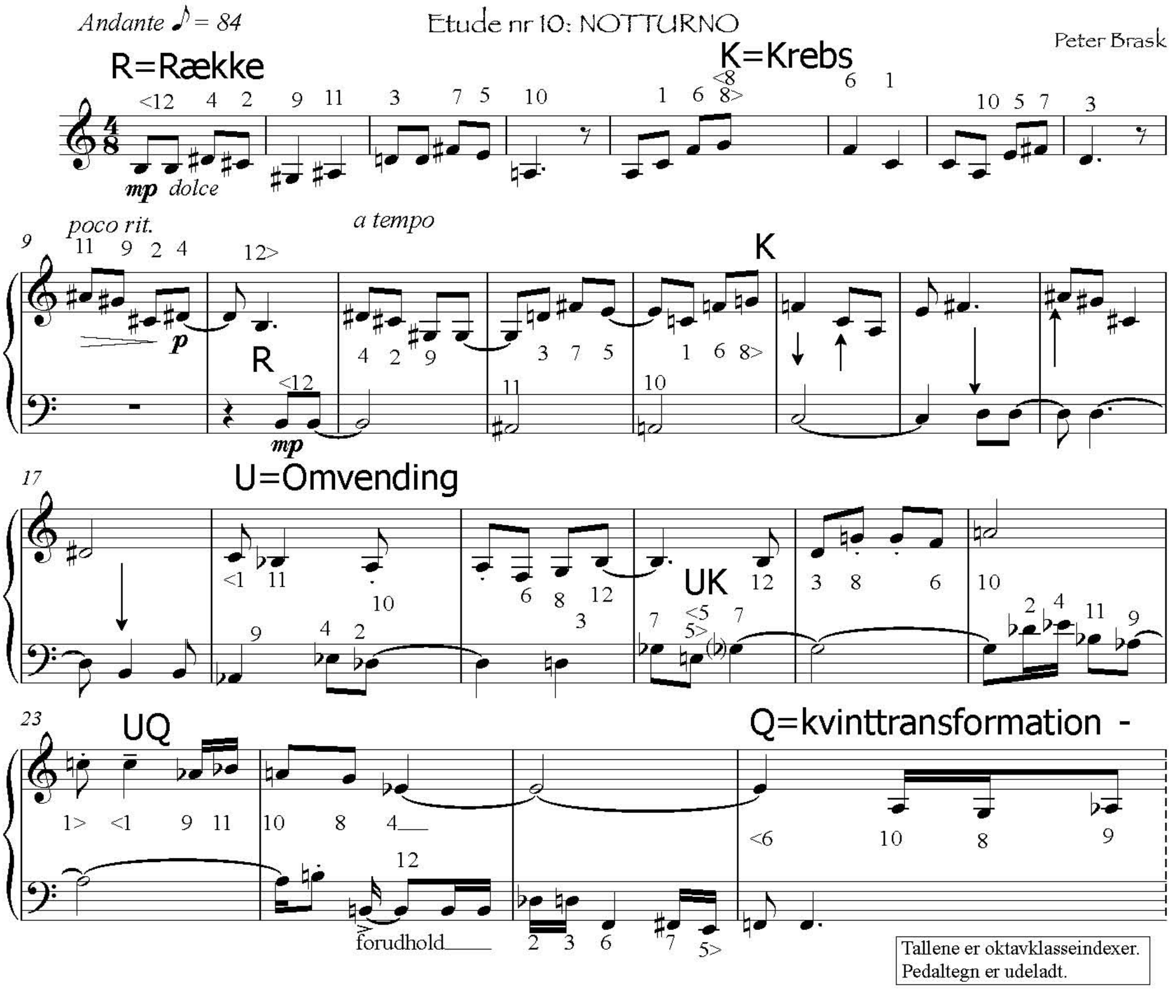
Mængden af n-rækker betegnes $\mathcal{R}_n$. Hvis R er en n-række, betegner κ_R den tilhørende permutation og hvis P er en permutation af $\{1, ..., n\}$ betegner $\rho(P)$ den tilhørende n-række. Afbildningerne κ og ρ er altså til hinanden inverse bijektioner mellem $\mathcal{R}_n$ og $\mathcal{S}_n$. Vi laver denne (matematisk set banale og notationelt besværlige) skelnen mellem rækker og permutationer, fordi det er rækkerne, der har vores primære interesse, mens vi stadig har brug for permutationerne til at beskrive relationer mellem dem.

I de senere afsnit indskrænkes begrebet *operator* til at være en permutation af rækkemængden $\mathcal{R}_{12}$. For enhver undergruppe H i $\mathcal{S}_{12}$ har vi hovedgruppen med basis H i $\mathfrak{S}(\mathcal{S}_n)$, som med κ og ρ kan flyttes over i en isomorf hovedoperatorgruppe $\hat{\mathcal{O}}_H$ i $\mathfrak{S}(\mathcal{R}_{12})$. Hvis $R \in \mathcal{R}_{12}$ er en række, $\mathfrak{y} \in \mathcal{O}_H$ sættes $y(R) = \rho(\mathfrak{y}(\kappa_R))$. Så er $\mathfrak{y} \mapsto y$ den ønskede isomorfi $\mathcal{O}_H \simeq \hat{\mathcal{O}}_H$.

Nyttige permutationer i $\mathcal{S}_{12}$.
For at lave musikalske grupper, må vi kende nogle få permutationer i $\mathcal{S}_{12}$. Først $\alpha_1 = (1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7)$ hvis cykel fås ved fortsat multiplikation med 2 modulo 13. Og for det andet $\varphi_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ hvis cykel fås ved fortsat addition af 1 modulo 12. Der gælder at $gp(\alpha_1, \varphi_1) = \mathcal{S}_{12}$. William Burnside viste i 1897 generelt at $\mathcal{S}_{12} = gp((1, 2), \varphi_1)$. Vi lader $\alpha_i = (\alpha_1)^i$ og tilsvarende for φ_i og for ξ_i, hvor

$$\xi_1 = \alpha_{11}\varphi_1\alpha_1 = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 3, 5, 7, 9, 11).$$

Så er $\varphi_{10}\xi_1 = (1, 2)$ og $\mathcal{S}_{12} = gp(\xi_1, \varphi_1) = gp(\alpha_1, \varphi_1)$. Lad os notere at $\xi_6 = (1, 2)(3, 4)...(11, 12)$. De to cykler i φ_2 er da $\xi_6\varphi_1 = (1, 3, 5, 7, 9, 11)$ og $\varphi_1\xi_6 = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$. Endvidere er $\alpha_6 = (\alpha_1)^6 = (1, 12)(2, 11)(3, 10)(4, 9)(5, 8)(6, 7)$. Og så er $\alpha_6\varphi_1\alpha_6 = \varphi_{11} = (\varphi_1)^{-1}$. Det viser, at $gp(\alpha_6, \varphi_1) \simeq \mathcal{D}_{12}$ af orden 24.



Starten på Brasks dodekafone Notturno for klaver, med rækkeformer og tonetal indsat. Permutationen for R er $\omega\alpha_2\omega\alpha_8$. Stykket kan høres i Erik Skjoldans indspilning på http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M28/Musik

Enhver 12-cykel δ i $\mathcal{S}_{12}$ opfylder, at $gp(\delta) \simeq \mathcal{C}_{12}$ og danner med en inverskonjugator $\mathcal{D}_{12}$. Men der er andre 12-cykler i $gp(\delta)$ end δ og dens modsatte δ^{11}, nemlig δ^5 og dens modsatte δ^7. Dette er fordi 1,5,7 og 11 er primiske med 12, hvilket har musikteoretisk betydning. Det viser også at $|N_{\mathcal{S}_{12}}(gp(\delta))| = 4 \cdot 12 = 48$. Specielt er gruppen $F = N_{\mathcal{S}_{12}}(gp(\varphi_1))$ af orden 48 væsentlig for vores dodekafone matematik... Sluttelig får vi brug for $\omega = (\varphi_1\xi_6)^3 = (2,8)(4,10)(6,12)$.

3 Musikteknisk grundlag

Lidt fortrolig med de hvide og sorte Tangenters tilsyneladende Hemmelighedskræmmeri vil man en Dag føle sig fristet til at "transponere". (Jacob Paludan)

Tolvtonemusik er oftest polyfon, men vor artikel angår kun musikkens enstemmige grundlag. Virkelige toner har mange egenskaber, men for os nu er en tone blot et par (h, s_h) hvor s_h henviser til en frekvens med et startpunkt i forløbet angivet ved h. Vi inddrager altså kun en lille - men nødvendig! - del af tolvtonemusikkens egenskaber. Tolvtonemusik bruger klaverets tonespektrum, hvor man kommer fra en tone til naboen over ved at gange frekvensen af den første med $\sqrt[12]{2}$. Den tolvte efterfølger har så dobbelt frekvens af starttonen - og samme tonenavn. Intervallet mellem dem kaldes en oktav. Oktavklassen for frekvensen s Hz er frekvensmængden $s2^m$ Hz for $m = 0, \pm1, \pm2, ...$; klassens toner har samme navn: der en klasse med C-toner, en med $C^\sharp$-toner, etc. I alt tolv klasser, som vi indexerer således:

$tonenavn(oktavklasse)$	C	$C^\sharp$	D	$D^\sharp$	E	F
$skalapladsnr(klasseindex)$	1	2	3	4	5	6
$tonenavn(oktavklasse)$	$F^\sharp$	G	$G^\sharp$	A	$A^\sharp$	H
$skalapladsnr(klasseindex)$	7	8	9	10	11	12

Frekvenserne fixeres ved at vælge 440 Hz til den A-tone (med index 10), der ligger lige til højre for midten af flygelklaviaturet. Oktavklasse 10 er altså frekvenserne $440 \cdot 2^m$ Hz, $m = 0, \pm1, \pm2, ...$, så langt øret rækker, op og ned. Oktavklasseindexerne kaldes fremover blot for 'toner' - hvis oktavbeliggenhed altså ikke er inddraget. Tonen A eller 10 henviser til oktavklasse nr 10 og kan realiseres som enhver af dennes frekvenser. Indexmængden for oktavklasser er $\mathcal{T}_{12} = \{1, 2, ..., 12\}$. En ordning af $\mathcal{T}_{12} = \{1, 2, ..., 12\}$ kaldes en tolvtonerække. Det er altså en 12-række i notationen fra forrige afsnit og når vi i det følgende siger 'række' skal det betyde det en tolvtonerække. En generel række R ser altså således ud:

$$R =< s_1\ s_2\ ...\ s_h\ ...\ s_{12} >,$$

hvor $\{s_1, s_2, ..., s_{12}\} = \mathcal{T}_{12}$. Her er en række fra Alban Bergs opera "Lulu":

Lulu-R= <1 5 6 3 8 10 7 9 12 11 4 2 > $=< c\ e\ f\ ...\ a^\sharp\ d^\sharp\ c^\sharp >$.

Man kunne skrive

$$\text{Lulu} - R = \{(1,1), (2,5), ...(h, s_h), ..., (12,2)\}.$$

Værdien h er *pladsindex* for tonen (oktavklasseindexet) s_h. Klaverets skalarække S_1 =<1 2 3 . . . 10 11 12> har den unikke egenskab at $h = s_h$. Ved intervallet fra rækketonen s_x til rækketonen s_y forstås differensen $i_{x,y} = s_y - s_x$. Da oktavniveauet er er frit , er række-intervaller ikke orienterede og må regnes modulo 12. Vi noterer dem positivt. Intervallet $-i \equiv (12 - i)$ kaldes det modsatte interval til i . Intervallerne fra tone til tone hen gennem R kaldes rækkens hovedintervaller, og den ordnede mængde af dem er intervalfølgen $I(R)$ for R, altså differenserne $i_h = s_{h+1} - s_h$ for $h = 1, 2, ..., 12$:

$$I(R) = [s_2 - s_1, s_3 - s_2, ..., s_1 - s_{12}] = [i_1, i_2, ..., i_{12}].$$

Bemærk at det tolvte hovedinterval $i_{12} = i_{12,1}$ går fra sidste til første tone i R. For eksempel fås

$$I(\text{Lulu}-R) = [4, 1, 9, 5, 2, 9, 2, 3, 11, 5, 10, 11]$$

og $I(S_1) = [1, 1, ..., 1]$. Intervallet $i_{x,y}$ er lig det antal pladser, man skal gå frem i skalarækken S_1 for at komme fra index s_x til index s_y. Analogt kan vi tale om afstanden $d_{x,y}$ som det antal pladser, man skal gå frem i rækken R for at komme fra en valgt S_1-tone x til en valgt anden S_1-tone y. Betragt begyndelsen af Lulu-R =< 1 5 6 3...> . Her ses at $d_{1,5} = d_{5,6} = d_{6,3} = 1; d_{1,6} = d_{5,3} = 2; d_{1,3} = 3$. Afstandene $d_{1,2}, d_{2,3}, .., d_{11,12}, d_{12,1}$ kaldes hovedafstandene for R og skrives kort som $d_1, d_2...d_{11}, d_{12}$. Den ordnede mængde af dem er afstandsfølgen $D(R)$ for R. For eksempel fås $D(\text{Lulu}-R) = [11, 4, 8, ..., 4, 11]$. For R og dens *modsatte* række $B = b(R) = \rho((\kappa_R)^{-1})$, gælder $I(R) = D(B)$ og $I(B) = D(R)$.

Formen B er den første af forskellige rækkeformer, vi nu vil beskrive. Man får en *form* af en række ved at anvende en operator på den, i dette tilfælde modsætteroperatoren b. Hvis vi rykker hver tone i Lulu-R en plads mod højre og flytter s_{12} til plads nr 1, fås en ny række, som bliver R' =< 2 1 5 6 ... 11 4 >. Gentages proceduren, får vi i alt tolv rækker, som kaldes rækkens *rotationer*. Rotationen n pladser frem af en vilkårlig R bliver $m_n(R) =< s_{1-n}\ s_{2-n}\ ...\ s_{h-n}\ ...\ s_{12-n} >$. Bemærk at addition og subtraktion i $\mathcal{T}_{12}$ foregår modulo 12. Rotationerne af R har fælles afstandsfølge $D(R)$, men deres intervalfølger er indbyrdes rotationer; det første hovedinterval for $m_n(R)$ er i_{13-n}. Hvis vi rykker alle toner i Lulu$-R$ en plads op i S_1, får vi R' =< 2 6 7 ... 12 5 3 >. Ved gentagelse fas i alt tolv rækker, som kaldes rækkens *transpositioner*. Transpositionen n skalapladser op af en vilkårlig R bliver $t_n(R) =< n + s_1\ n + s_2\ ...\ n + s_h ... n + s_{12} >$. Transpositionerne af R har fælles intervalfølge $I(R)$, men deres afstandsfølger er indbyrdes rotationer; den første hovedafstand for $t_n(R)$ er d_{13-n}. Enhver R kan transponeres og roteres til $12^2 = 144$ *transrotationer* $m_it_j(R)$ der normalt er forskellige. Men visse rækker er identiske med en eller flere af rækkens transrotationer ('formsammenfald'). Specielt findes der netop 48 såkaldt ækvidistante rækker med konstant interval. De fås for de fire intervaller (1,5,7,11), som er primiske med 12.

Med starttone 1 får vi skalarækkerne

S_1 =<1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12>
S_5 =<1 6 11 4 9 2 7 12 5 10 3 8>
S_7 =<1 8 3 10 5 12 7 2 9 4 11 6>
S_{11} =<1 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2> .

Hver af dem har kun tolv transrotationer idet S_j =

$m_it_{ij}(S_j)$ for $j = 1,5,7,11$ og alle i. (Her regnes ij atter modulo 12.) Disse 48 ækvidistante rækker er tolvtoneteoriens udgangsmateriale. Da musikfolk stadig kalder intervallet 5 for en "kvart"og intervallet 7 for en "kvint", kaldes 5-skalaen gerne for en kvartskala og 7-skalaen for en kvintskala, selvom det er mere nostalgisk end praktisk.

I enhver række R ligger tonerne s_h og s_{13-h} (spejl)symmetrisk om rækkemidten. Ombytter vi dem får vi rækkens *krebs*:
$K = k(R) =< s_{12}\ s_{11} ... s_1 >=< s_{13-h} | h = 1, 2, ..., 12 >$
Hvis vi ombytter hver R-tone med dens spejltone i skalarækken S_1 får vi rækkens *omvending*:
$U = u(R) =< 13 - s_h | h = 1, 2, ..., 12 >$.
U kan krebses og K omvendes til formen $UK = KU$, kaldet *omvendingskrebsen*. For Lulu-R fås:
R =<1 5 6 3 8 10 7 9 12 11 4 2>
med $I(R) =< 4, 1, 9, 4, 2, 9, 2, 3, 11, 5, 10, 11 >$
U =<12 8 7 10 5 3 6 4 1 2 9 11>
med $I(U) =< 8, 11, 3, 7, 10, 3, 10, 9, 1, 7, 2, 1 >$
K =<2 4 11 12 9 7 10 8 3 6 5 1>
med $I(K) =< 2, 7, 1, 9, 10, 3, 10, 7, 3, 11, 8, 1 >$
UK =<11 9 2 1 4 6 3 5 10 7 8 12>
med $I(UK)$ =<10,5,11,3,2,9,2,5,9,1,4,11>

Intervallerne for R, U, K og UK hænger sammen som følger:

$$\begin{array}{ll} I(R) =< i_h > & I(U) =< 12 - i_h >, \\ I(UK) =< i_{12-h} > & I(K) =< 12 - i_{12-h} > \end{array}$$

R og U har modsatte intervaller, og tilsvarende gælder UK og K. Ved transrotation af R, U, K og UK får vi $4 \cdot 144 = 576$ former, som normalt er forskellige. K-, U- og UK-formerne af disse findes så allerede blandt de 576. Schönberg har brugt rotationen, men så sjældent at han kun taler om de 48 transpositioner af R, K, U og UK. Men med Schönbergmetodens historiske udspring i kontrapunkt-kunsten ligger de 576 transrotationer jo lige for.

Vi udledte K og U af midtsymmetrien for R, som er en spejling. Man kan også lave en forskydning, hvor $< s_1 ... s_6 >$ ombyttes med $< s_7 ... s_{12} >$, dvs. rækkehalvdelene ombyttes. Så får vi rotationen $m_6(R)$, som altså har en unik rolle blandt rotationerne. Blandt transpositionerne gælder det samme da for 'tritonus'- transpositionen $t_6(R)$ som erstatter toneindex s med $6 + s$. Eftersom der kun findes to ækvidistante skalaer, nemlig den kromatiske op og ned, og kvint/kvart-skalaen op og ned, er det oplagt at bruge S_7 analogt med S_1. Det er da også gjort forlængst, af Berg i "Lulu". Det kan appliceres dels på rækkeordningen, dels på skalagrundlaget. Rækkens Kvintskalaform bliver da $W = w(R) =< s_1\ s_8\ s_3 ... s_{11}\ s_6 >$ og rækkens Kvinttransformation $Q = q(R)$ fås ved at erstatte rækkens kromatiske indexer fra S_1 med værdierne på de samme pladser i kvintrækken S_7, altså bytte: (2,8)(4,10)(6,12). Således er

$$\text{Lulu}-Q =< 1\ 5\ 12\ 3\ 2\ 4\ 7\ 9\ 6\ 11\ 10\ 8 > .$$

De to former kan sammensættes til formen $QW = WQ$. Det viser sig at når Q, W og QW føjes til de 576 fra før, bliver der $16 \cdot 144 = 2304$ former. Forklaring følger om lidt! Man får W ved at "tage hver 7.tone."Det førte Berg videre til den idé at tage hver n'te men springe videre til næste når der blev gentagelser. Med "hveranden"af S_1 fås H =<2 4 6 8 10 12 1 3 5 7 9 11> som består af to heltoneskala-rækker. Den får en vigtig systematisk plads om lidt. Et andet fif blev brugt med kompositorisk gevinst af Ernst Krenek: at bytte nabotonerne så man får $R' =< s_2\ s_1\ s_4\ s_3 ... s_{12}\ s_{11} >$. Og John Cage fandt en ny rækkeform ved at udskifte hver R-tone (h, s_h) med tonen (s_h, h). Som læseren vil se, er det formen $b(R) = B$. Via den bringes vi op på 4608 former. Alle formerne er blevet til i kompositorisk praksis, men uden samlet teoretisk forståelse. Det forunderlige er at de passer fint sammen, når de betragtes matematisk.

4 Dodekafon matematik

Ingenious specialization of trivialities can occasionally lead to interesting results. (N.G.de Bruijn [2])

Det er klart at $\mathcal{R}_{12}$ er mængden af alle tolvtonerækker. Neutralelementet i $\mathcal{S}_{12}$ er permutationen for rækken S_1 =<1 2 ... 12>. Permutationen for vor eksempelrække Lulu-$R =< 1\ 5\ 6\ 3\ 8\ 10\ 7\ 9\ 12\ 11\ 4\ 2 >$ er $\kappa_{\text{Lulu}-R} = (2, 5, 8, 9, 12)(3, 6, 10, 11, 4)(1)(7)$. Og for Lulu-$B$ fås $(\kappa_{\text{Lulu}-R})^{-1} = (2, 12, 9, 8, 5)(3, 4, 11, 10, 6)(1)(7)$.

Sådanne rækkeoperationer som transposition, rotation, krebs og omvending, som vi netop har beskrevet for $\mathcal{R}_{12}$, svarer til operatorer på $\mathcal{S}_{12}$ som alle viser sig at være sammensat af højre- eller venstre-operatorer med basis i de "nyttige" permutationer, der blev præsenteret i slutningen af afsnit 2. Vi bevæger os altså ikke i det gigantiske univers af alle operatorer på $\mathcal{R}_{12}$, hvis antal jo er (12!)!, men i et meget mindre og meget mere overskueligt, nemlig en operatorgruppe med basis $\mathcal{S}_{12}$ af orden $2(12!)^2$.

Den mest elementære musikalske operation (kendt af enhver sangfugl!) er transposition +1 som erstatter hver tone med den næste opad i S_1. Den tilsvarende operator, transponatoren t_1 på $\mathcal{R}_{12}$ viser sig at svare til højreoperatoren $\mathfrak{r}(\varphi_1)$ med basis i permutationen φ_1, altså $t_1(R) = \rho(\kappa_R \varphi_1)$. Rotatoren m_1 (som rykker hele rækken en plads frem (mod højre), så sidste tone flyttes hen forrest) viser sig at svare til *venstre*operatoren $\mathfrak{l}(\varphi_1)$ med basis i φ_1, altså $m_1(R) = \rho(\varphi_{11} \kappa_R)$. (Bemærk, at $\varphi_{11} = (\varphi_1)^{11} = (\varphi_1)^{-1}$.) Transrotatorerne $m_i t_j$ (som rykker de i sidste toner hen foran og transponerer resultatet $+j$ trin), danner så en operatorgruppe svarende til $\mathcal{O}^*_H = \mathfrak{L}_H \times \mathfrak{R}_H$ med $H = gp(\varphi_1) \simeq \mathcal{C}_{12}$. Derfor er

$$gp(t_1, m_1) \simeq gp(t_1) \times gp(m_1) \simeq \mathcal{O}^*_H \simeq \mathcal{C}_{12} \times \mathcal{C}_{12}.$$

Ovenfor strejfede vi Alban Bergs idé med at få en rækkeform ud af "hveranden"tone af rækken. Bruges dette på S_1 fås $H = \rho(\alpha_1)$ =<2 4 6 8 10 12 1 3 5 7 9 11>. Lad u_1 svare til højreoperatoren med basis α_1 og lad k_1 være dens sideanalog, svarende til venstreoperatoren med basis α_1. Så er $k_1(R) =< s_2\ s_4\ s_6\ s_8\ s_{10}\ s_{12}\ s_1\ s_3\ s_5\ s_7\ s_9\ s_{11} >$. Lulu-$R$ har $u_1(R)$ =<2 10 12 6 3 7 1 5 11 9 8 4>. Igen er $gp(u_1) \times gp(k_1) \simeq \mathcal{C}_{12} \times \mathcal{C}_{12}$. Men kun fire af disse 144 former er alment kendte: omvendingen $u_6(R) = U$ og krebsen $k_6(R) = K$ samt UK og R. Fremover skrives blot u og k for de to operatorer med basis $\alpha_6 = (1, 12)(2, 11)(3, 10)(4, 9)(5, 8)(6, 7)$. Lad os en passant minde om at $\xi_6 = (1, 2)(3, 4) ... (11, 12)$. Så Kreneks førnævnte nabobytnings-rækker svarer til $\rho(\xi_6\kappa_R) =< s_2\ s_1\ s_4\ s_3 ... s_{12} s_{11} >$, altså venstreoperatoren med basis ξ_6.

Vi har også krebsoperatoren hvor $k(R) = \rho(\alpha_6\kappa_R) = K$; omvendingsoperatoren hvor $u(R) = \rho(\kappa_R\alpha_6) = U$ og deres sammensætning hvor $uk(R) = \rho(\alpha_6\kappa_R\alpha_6) = UK$. Vi har set at $D = gp(\alpha_6, \varphi_1) \simeq \mathcal{D}_{12}$. Samlet får vi nu

$$gp(t_1, m_1, u, k) \simeq gp(t_1, u) \times gp(m_1, k) \simeq \mathcal{O}_D^* \simeq \mathcal{D}_{12} \times \mathcal{D}_{12}.$$

Den har orden $24^2 = 576$. Som undergruppe heri har vi Schönbergs metodegruppe af orden 48: $gp(k) \times gp(u, t_1) \simeq \mathcal{C}_2 \times \mathcal{D}_{12}$.

Vi vil nu udvide vores gruppe af orden 576 via en allerede nævnt opfindelse af Alban Berg. Ideen er at bruge 'kvintskalaen' S_7 =<1 8 3 10 ... 11 6> ligesom S_1. Det kan vi ikke helt, for $S_1 = \rho(e)$. Men vi har $\omega = \kappa_{S_7} = (2, 8)(4, 10)(6, 12)$. Med ω som operatorbasis får vi kvintskalaformen

$$W = w(R) = \rho(\omega\kappa_R) = < s_1\ s_8\ s_3\ s_{10} ... s_{11}\ s_6 >$$

som klart nok er efter recepten 'hver 7. tone'. Berg brugte denne form til personen Alwa i Lulu - deraf vort W. På højre fås kvinttransformationen $Q = q(R) = \rho(\kappa_R\omega)$. Den erstatter hver skalatone fra S_1 med S_7-tonen på samme skalaplads. Så for eksempel $q(\mathrm{Lulu} - R)$ =<1 5 12 3 2 ... 10 8>.

Vor operatorbasis er da nu gruppen

$$F =< \varphi_1, \omega, \alpha_6 >=< \alpha_6\varphi_1, \omega, \alpha_6 >;$$

de sidste tre frembringere er alle af orden 2. Det viser sig at $F \simeq < \omega, \varphi_3 > \times < \varphi_4, \omega\alpha_6\varphi_1 > \simeq \mathcal{D}_4 \times \mathcal{D}_3$ er den i afsnit 2 nævnte normalisator i $\mathcal{S}_{12}$ af gruppen $gp(\varphi_1) \simeq \mathcal{C}_{12}$. Så skal vi se på, hvad der kommer ud af at bruge hele F som operatorbasis. Vi får venstreoperatorgruppen $gp(m_1, k, w)$ og højregruppen $gp(t_1, u, q)$, begge isomorfe med F. Deres produkt af orden $48^2 = 2304$ er

$$gp(t_1, m_1, u, k, w, q) \simeq gp(m_1, k, w) \times gp(t_1, u, q) \simeq F \times F$$

Hvis vi endelig tilføjer modsætteroperatoren b som frembringer, får vi hovedoperatorgruppen med basis F, som er et kransprodukt af orden 4608:

$$gp(t_1, m_1, u, k, w, q, b) \simeq (gp(m_1, k, w) \times gp(t_1, u, q)) \rtimes gp(b)$$

$$= \hat{\mathcal{O}}_F \simeq \mathcal{O}_F = (\mathfrak{L}_F \times \mathfrak{R}_F) \rtimes gp(\mathfrak{b}) \simeq (F \times F) \rtimes \mathcal{C}_2. \quad (2)$$

Transrotationerne $m_i t_j(R)$ er musikalsk de mest trivielle rækkeformer. Vi søger derfor en mere interessant operatorhovedgruppe C, hvor $\hat{\mathcal{O}}_F = gp(m_1, t_1) \rtimes C$. Vi kalder C en *formgruppe*. Da $|C| = 32$, har dens basisgruppe orden 4 og da C skal levere operatorerne med b, q, w, u og k må basisgruppen rumme α_6 og ω. Vi finder at F har 24 firegrupper $\{e, \alpha_6\varphi_n, \omega\varphi_p, \omega\alpha_6\varphi_{n-p}\}$ som undergrupper som fås for $p = 3, 9$ med n lige, samt $p = 0, 6$ med n ulige. Der bliver da 24 formgrupper:

$$C_{n,p} = (gp(km_n, wm_p) \times gp(ut_n, qt_p)) \rtimes gp(b) \quad (3)$$

I afsnit 2 så vi at en hovedgruppe med diederbasis $\mathcal{D}_n$ er isomorf med $T^{4\ 4\ n}$ af orden $8n^2$. Vi får

$$C_{n,p} = gp(qt_p, b, qut_{n-p}) \simeq T^{4\ 4\ 2} \qquad (4)$$

som tilfredstiller de definerende relationer som fås af (1) i afsnit 2. Og så er

$$\hat{\mathcal{O}}_F = gp(m_1, t_1) \rtimes Cn, p \simeq (\mathcal{C}_{12} \times \mathcal{C}_{12}) \rtimes T^{442}. \quad (5)$$

Schönbergs gruppe var $gp(k) \times gp(u, t_1)$. Den mindste systematiske helhed i $\hat{\mathcal{O}}_F$ som rummer den, er hovedgruppen

$$\mathcal{P}_{12} = gp(u, b, km_1) \simeq (\mathcal{D}_{12} \times \mathcal{D}_{12}) \rtimes \mathcal{C}_2 \simeq T^{4\ 4\ 12} \quad (6)$$

af orden 1152 med basisgruppe $gp(\varphi_1, \alpha_6) \simeq \mathcal{D}_{12}$. For hver faktorisering af $12 = qr,\ q, r \in \mathbb{N}$, har vi en diederundergruppe af orden $2q$ i $\mathcal{D}_{12}$. Heraf fås for $i = 0, ..., r-1$ hovedgrupperne

$$\mathcal{P}_q^i = gp(ut_i, b, km_{r+i}) \quad (7).$$

For $q < 12$ fås yderligere varianter af hver hovedgruppe idet vi bruger $bm_{12-j}t_j$ hvor $j = 0, 1, ..., r-1$. Ialt bliver der således 210 grupper:

$$\mathcal{P}_q^{i,j} = gp(ut_{i+j}, bm_{12-j}t_j, km_{r+i-j}) \quad (8)$$

af orden $8q^2$. Gruppen kan opsplittes som vist her.

$$\mathcal{P}_q^{i,j} = gp(m_r, t_r) \rtimes gp(ut_{i+j}, bm_{12-j}t_j) \simeq (\mathcal{C}_q \times \mathcal{C}_q) \rtimes \mathcal{D}_4.$$

Vi husker at $T^{4\ 4\ q}$ er en faktorgruppe af **p4m**, der frembringer et mønster ved fortsat spejling af en trekant i dens sider. Hvis vi tegner selve spejlingsoperationen som et linjestykke vinkelret på trekantsiden, får vi et dualt mønster. Hver spejling svarer til en af frembringerne i formel (4) henholdsvis (8). Nettet af spejlingslinjer kan da bruges som en graf for $C_{n,p}$, hhv. $\mathcal{P}_q^{i,j}$. På bagsiden af dette nummer af Matilde vises grafen for $\mathcal{P}_2^{i,j}$. Den kan læses som en plan over hvordan operatorerne forbinder 32 rækkeformer af en vilkårligt valgt række R, som vi lader svare til gruppens neutralelement. For hvert gruppeelement g fås en rækkeform $g(R)$. En valgt 'tur' gennem grafen kan da realiseres musikalsk som en følge af former af R. Den dodekafone matematik kan altså anvendes direkte ved praktisk komposition!

Litteratur:

[1] Peter Brask: Nogle visuelle og musikalske mønstre algebraisk beskrevet. I: Sissel Furuseth (ed): Kunstens rytmer i tid og rom, Trondheim 2005, pp. 175-204.

[2] N.G.de Bruijn: A Survey of Generalizations of Polya's Enumeration Theorem, Nieuw Archief voor Wiskunde (2), XIX, 1971

[3] H. S. M. Coxeter: The Abstract Groups $G^{m\ n\ p}$, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 45 (1939) pp. 73-150.

[4] H. S. M. Coxeter and W. O. J.Moser: Generators and Relations for Discrete Groups. 4th.ed. 1980 (1st.ed.1957). 169 pp. Springer-Verlag. Berlin etc.

[5] Anders Thorup: Algebra. Matematik 2AL. Noter. http://www.math.ku.dk/noter/2al.pdf

Musikk og kjedebrøker
5-toners, 12-toners og 41-toners skala

Af: Lisa Lorentzen
Institutt for matematiske fag
NTNU, Trondheim, Norge
email: lisa@math.ntnu.no

Vi skal (rent teoretisk) bygge et musikkinstrument med følgende spesifikasjoner:

1. Instrumentet skal ha et visst antall toner som ligger fast (etter at instrumentet er stemt). Tenk for eksempel på et piano.
2. Toner som klinger godt sammen, skal finnes på instrumentet, slik at vi kan spille vakker musikk på det.
3. En gitt melodi skal kunne spilles i ulike tonehøyder (ulike tonearter) uten at den endrer karakter.

Hvilke toner vil vi ha med?

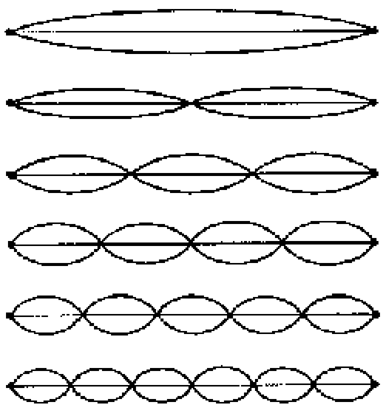
2/1 oktav

3/2 kvint

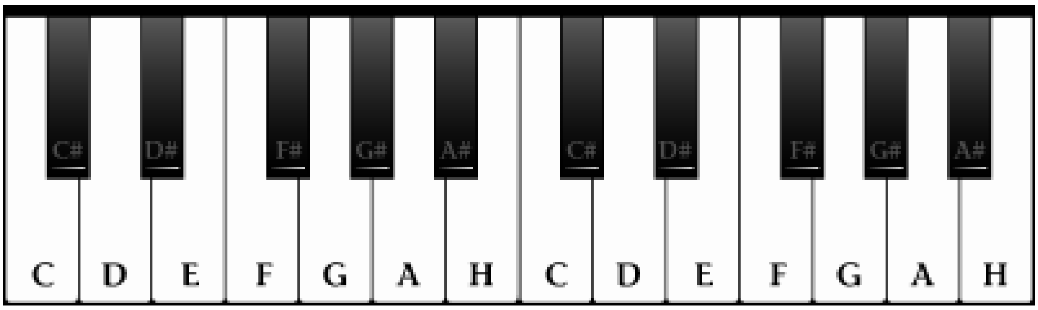
4/3 kvart

5/4 dur ters

6/5 moll ters



La f_1 og f_2 være frekvensene til to gitte toner. Allerede Pythagoras (ca 570-490 f.Kr.) fant at dersom brøken f_1 / f_2 kan skrives som et helt tall dividert på et helt tall, der tallene ikke er så store, så klinger tonene bra sammen. Figuren til venstre viser noen slike "gode" toneintervaller. Derfor vil vi ha med toner med slik frekvens-avstand på vårt instrument. Det kan være at vi må fylle opp med toner mellom disse også. Figuren nedenfor viser et forsøk på å planlegge et slikt instrument.



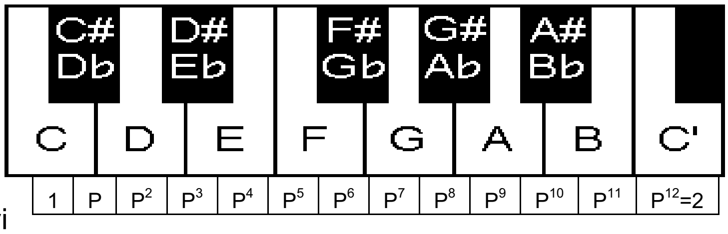
1	16/15	9/8	6/5	5/4	4/3	7/5	3/2	8/5	5/3	9/5	15/8	2	32/15	18/8	12/5	4/10	8/3	14/5	6/2	16/5	10/3	18/5	30/8

Hvis man spiller C – G, får man en kvint, siden frekvensene danner forholdet 3/2. Og tonene C – E danner en ters siden frekvensene danner forholdet 5/4.

Men hva om man starter på tonen D? En kvint burde svare til 7 tonetrinn, slik som i sted. Altså D – A. Men da blir forholdet (5/3) / (9/8) = 40/27, og *ikke* 3/2. Og forsøker vi en ters, D - Fiss, blir ikke den heller riktig, for forholdet mellom frekvensene er (7/5) / (9/8) = 56/45 på vårt instrument, og *ikke* 5/4 som vi gjerne skulle ha hatt. Vi kan altså ikke transponere musikken, slik at vi starter på D, uten at musikken endrer karakter. Ja, selv om vi spiller i C-dur, får vi ikke rene kvintsprang overalt.

Likesvevende temperering

Vi trenger en ny plan. Vi skal nå velge den strategien som brukes på moderne instrumenter, nemlig det som kalles likesvevende temperering. Den er basert på følgende ide: for å kunne spille en melodi, uten at melodien forandres ved transponering, holder vi forholdet mellom to nabotoners frekvenser konstant, uansett hvor de befinner seg på instrumentet. Som figuren viser, er forholdet mellom frekvensen til to nabotoner alltid lik en konstant P. Siden tonene skal rekke over en oktav fra C til C, vil vi ha $P^{12} = 2$. Men da går det fint an å transponere. En kvint C – G er nå et sprang på P^7, og det samme gjelder for kvinten D – A. Faktisk, en kvint er en kvint, uansett hvor vi velger å starte på pianoet. Det eneste som trengs er at på $P^7 = 3/2$. På samme måte er en dur ters C – E et sprang på P^4, og det er også dur tersen F – A, og så videre. Vi trenger bare at $P^4 = 5/4$.



Intervall	Eksakt	Tilnærming	Avvik
Moll ters	6/5=1.200	$2^{3/12}$ = 1.189...	0.9%
Dur ters	5/4=1.250	$2^{4/12}$ = 1.260...	0.8%
Kvart	4/3=1.333...	$2^{5/12}$ = 1.335...	0.1%
Kvint	3/2=1.500	$2^{7/12}$ = 1.498...	0.1%
Moll sekst	8/5=1.600	$2^{8/12}$ = 1.587...	0.8%
Dur sekst	5/3=1.666...	$2^{9/12}$ = 1.682...	0.9%
Septim	9/5=1.800	$2^{10/12}$ = 1.782...	1.0%

Dessverre finnes det ingen slik P. Kravet $P^{12} = 2$ betyr at $P= 2^{1/12}$. P er altså nødt til å være tolvte roten av 2, et irrasjonalt tall. Derved er $P^7 = 2^{7/12} = 1.4983\ldots$ som *ikke* er det samme som 3/2. Og er $P^4 = 2^{4/12} = 1.2599\ldots$ som *ikke* er det samme som 5/4. Men avviket er forbløffende lite --- ikke verre enn at vi venner oss til det.

Antall tonetrinn i en oktav

Alt dette har naturligvis vært gjort før. Det er bakgrunnen for vår vestlige kunstmusikk, som deler oktaven i 12 like store trinn (og er godt eksemplifisert med J.S. Bachs ”Das Wohltemperierte Klavier”). Men hvorfor skal man holde seg innenfor en skala med 12 toner? Fra et matematisk synspunkt er dette en unødvendig begrensning. Faktisk burde man bruke et antall toner som gir best mulig approksimasjon av de tonene som skal klinge vakkert sammen. Det vil si, vi deler oktaven i et foreløpig ukjent antall trinn n. Faktoren vår P må da være slik at

$$P^n = 2, \quad \text{altså} \quad P= 2^{1/n}$$

Det vi ønsker oss, er at $P^r = 2^{r/n} = 3/2 = 1.500\ldots$ så nært som mulig for et heltall r. Så hvordan kan man velge n og r slik at dette blir best mulig? Her er det kjedebrøken kommer inn. Den er et ypperlig verktøy for å finne beste approksimasjon i en slik situasjon.

Regulære kjedebrøker gir svar

Vi søker hele tall r og n slik at $2^{r/n} = 3/2$, sånn omtrent. Da må $r/n = \log_2 3/2$, sånn omtrent. Tallet $\log_2 3/2$ er irrasjonalt. Vi søker et rasjonalt tall (brøk med heltalls teller og nevner) r/n slik at det er mest mulig likt $\log_2 3/2$. Vi skal se hvordan dette kan gjøres ved hjelp av kjedebrøk.

Trinn 1: Vi utvikler tallet $\log_2 3/2$ i en regulær kjedebrøk. For å gjøre det, skal vi gjentatte ganger bruke at et tall T alltid kan skrives som en brøk med teller 1:

$$T=\frac{1}{1/T}; \quad \text{for eksempel} \quad 0.7=\frac{1}{1/0.7}\approx\frac{1}{1.428571\ldots}$$

Vi ser at dersom T er mindre enn 1, blir nevneren større enn 1.Ved bruk av dette knepet får vi

$$\log_2\frac{3}{2}\approx 0.5849625007=\frac{1}{1/0.5849625007}\approx\frac{1}{1.709511291}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1/0.709511291}}$$

$$\approx\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1.40942084}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1/0.40942084}}}\approx\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2.442474596}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1/0.442474596}}}}\approx\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1/0.260016754}}}}}$$

Og så videre. Jo flere desimaler vi startet med, jo lenger kan vi holde på. Resultatet kalles en regulær kjedebrøk.

Trinn 2: Starten på kjedebrøken vi får, er gjengitt nedenfor. Når vi tillater oss å skrive likhet mellom kjedebrøken og $\log_2 3/2$, er det fordi det ville være korrekt om vi ikke hadde foretatt avrundinger på noe punkt.

$$\log_2\frac{3}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}}}}}$$

Det vi nå skal gjøre er å kutte kjedebrøken etter et visst antall ledd. For eksempel, hvis vi kutter Etter det første 2-tallet, får vi

$$\log_2\frac{3}{2}\approx\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

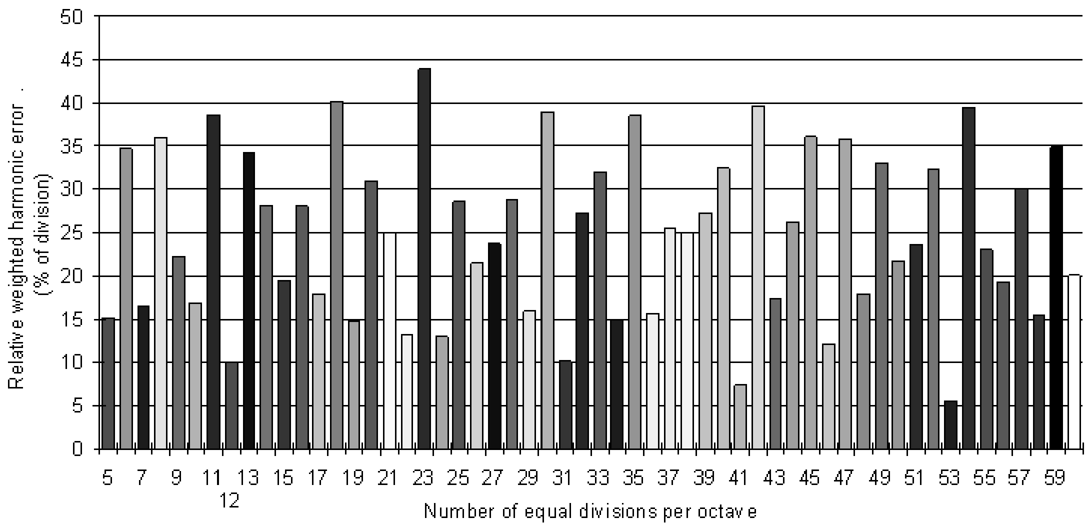
Dette betyr at $\log_2 3/2$ er omtrent lik $r/n = 3/5$. Ja, men da kan vi velge antall toner i skalaen lik $n=5$. Spranget mellom den første og den tredje tonen vil da være en tilnærmet kvint.

5 toner er kanskje litt lite… For å få forslag til skalaer med flere toner, tar vi med litt mer av kjedebrøken. Brøkene nedenfor viser hva vi får om vi kutter etter det andre 2-tallet eller etter 3-tallet i kjedebrøken.

$$\log_2\frac{3}{2}\approx\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{7}{12} \qquad \log_2\frac{3}{2}\approx\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}=\frac{24}{41}$$

Kjedebrøken sier altså at 12 toner eller 41 toner i en oktav er de beste valgene i en viss forstand. Hadde vi tatt med enda et ledd fra kjedebrøken, ville vi fått brøken 31/53, slik at 53 toner i skalaen også vil være et godt valg ut fra våre kriterier.

I forkant av foredraget, gikk jeg inn på nettet for å se om det var andre som tenkte i de samme baner som jeg. Det viste seg å være mange som prøvde ut forskjellige tempererte skalaer, selv om de ikke anvendte kjedebrøkteori. Spesielt morsomt var søylediagrammet nedenfor, utarbeidet av David C. Keenan [1], i et forsøk på å finne et gunstig antall toner i oktaven. Søylene viser hva han kaller ”harmonic error”, relativt til antall toner. Det er slående hvordan kjedebrøkens forslag også peker seg ut i hans analyser.



Hvorfor virker regulære kjedebrøker slik?

Vi har utnyttet følgende teorem fra kjedebrøkteorien [2]:

La T>0 være et gitt tall med regulær kjedebrøk

$$T = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \dots}}}$$

La videre A_n / B_n *være brøken du får ved å kutte kjedebrøken rett etter leddet* b_n. Da er A_n / B_n *den beste rasjonale tilnærmingen til T i den forstand at hvis P/Q er et annet rasjonalt tall med heltallig positiv teller og nevner og* $Q \le B_n$, *så er feilen*

$$\left| T - \frac{A_n}{B_n} \right| < \left| T - \frac{P}{Q} \right|.$$

Referanse

1. http://users.bigpond.net.au/d.keenan/Music/EqualTemperedMusicalScales.htm
2. Oskar Perron: ”Die Lehre von den Kettenbrüchen”, bind 1. Teubner 1957.

Musical scales and the Baker's Dozen

Dave Benson
Department of Mathematical Sciences, University of Aberdeen, Scotland, UK
email: bensondj@maths.abdn.ac.uk

What is so special about the octave? Why do we dissect it into twelve equal semitones? We'll investigate what happens when you try to throw out these basic rules, and move to a larger fundamental interval than the octave, and a Baker's Dozen,[1] or *Nadir de Boulanger*[2] of smaller intervals.

To cut a very long story excruciatingly short, our stringed and wind instruments produce sounds which contain not only a basic "fundamental" frequency, but also the *integer multiples* of this frequency in varying proportions. So a special role is played by integer multiples of frequencies, and what is so special about the octave is that the simplest multiple, namely doubling the frequency, makes a difference of an octave in the pitch. There is absolutely no intrinsic property of the *ear* that gives the octave a special role.[3]

If we increase the frequency of a note threefold, we increase the pitch by an octave and a fifth, so that a musical fifth (seven semitones) represents multiplying the frequency by $\frac{3}{2}$. Actually, this isn't quite true, because the modern scale uses twelve *equal* semitones to the octave, and seven of them give a frequency ratio of $2^{\frac{7}{12}}$:1, or roughly 1.4983:1. So the way we obtained *twelve* equal semitones to an octave was to notice that $\frac{7}{12}$ gives a good rational approximation to the irrational number $\log_2(\frac{3}{2})$. Yes, surely even the most primitive of civilisations can make such a leap. Using this approximation gives a note that is only one fiftieth of a semitone shy of a perfect fifth. A good way to make such approximations systematically is by the use of continued fractions; the continued fraction for $\log_2(\frac{3}{2})$ is $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{23+}\cdots$, and truncating after the first four terms gives the fraction $\frac{7}{12}$.

Actually, our music is based around more than just octaves and fifths; we also use the *third* as a consonant interval, which is taken in its pure form to be the frequency ratio $\frac{5}{4}$. If we use a scale with twelve equal semitones to the octave, a passable approximation to $\frac{5}{4}$ is given by the fourth semitone of the scale: $2^{\frac{4}{12}}$:1 is roughly 1.2599:1. This is very much worse than the approximation to a pure fifth: four semitones is about a seventh of a semitone sharp from a pure major third, so our modern scale has somewhat sour major thirds. From the fifteenth to the nineteenth century, the commonest scale for European classical music was the *meantone scale*, which had the major third exactly right but the fifth just slightly worse than ours with a ratio of $\sqrt[4]{5}$:1, or approximately 1.49535:1.

Chords in the modern twelve tone scale, based on thirds and fifths, use the ratios 1:2:3:4:5:6; the seventh harmonic is not well represented in the twelve tone scale. Deleting octave repetitions, this leaves a chord of 4:5:6, which is the ordinary major chord on the tonic.

Okay, well, so much for octave based scales. If we happen to be playing instruments where odd harmonics predominate, such as the clarinet, so that we should only be looking at *odd integer multiples* of the fundamental frequency, then it would certainly not make much sense to get too fixated on the octave. Indeed, if you take a clarinet and overblow it, you don't get an octave, but an octave and a fifth, for a frequency ratio of 3:1. *"Go blow yer octave out' the end o' yer flute,"* as my good-natured clarinetist friends would say after a couple of beers.

Bohlen and Pierce[4] developed a scale based on a *tritave* with a frequency ratio of 3:1. It turns out that a convenient way to divide this up is to use *thirteen* equal parts. To see why this is, we should expect chords to be made up of the ratios 1:3:5:7:9. Deleting tritone repetitions, this gives 3:5:7. So we try to approximate the irrational numbers $\log_3(\frac{5}{3})$ and $\log_3(\frac{7}{3})$. The continued fractions for these are $\frac{1}{2+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{7+}\cdots$ and $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{22+}\,\frac{1}{32+}\cdots$. It just so happens that these both have convergents involving 13 in the denominator. So our approximation for $\log_3(\frac{5}{3})$ is $\frac{6}{13}$, and our approximation for $\log_3(\frac{7}{3})$ is $\frac{10}{13}$. These are both reasonably decent approximations. So our recipe is this: divide the tritave (ratio 3:1) into 13 equal intervals of $3^{\frac{1}{13}}$:1, and use the base note together with the notes six and ten scale intervals higher to form a chord.

*The material for this article is one of the many topics discussed in greater detail in the author's forthcoming book, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, September 2006. ISBN 0521853877 (pbk).

[1] It is a tradition, or an old charter or something, that when you order a dozen rolls from a baker, you actually get thirteen for the price of twelve.

[2] This joke is due to Gerard Hoffnung. The idea of attributing jokes in footnotes goes back at least as far as the article of Atiyah, Bott and Shapiro, *Clifford Modules* (1964), where they attribute the *Pin group* joke to J.-P. Serre. Oh well, funny creatures, mathematicians. You have to have been there, I suppose...

[3] The case for this argument was made by Helmholtz in the nineteenth century, and put on a firmer basis by Plomp and Levelt, *Tonal consonance and critical bandwidth*, J. Acoust. Soc. Amer. 38 (4) (1965), 548–560. It's now pretty much uniformly accepted by the scientific community, except possibly at the ends of the hearing range, where scientists are always having problems. Possibly because of the concerts they went to in the seventies.

[4] Heinz Bohlen, *13 Tonstufe in der Duodezeme*, Acustica 39 (1978), 76–86; M. V. Mathews and J. R. Pierce, *The Bohlen–Pierce scale*, Chapter 13 of *Current directions in computer music research*, MIT Press, 1989.

So what happens when we try to make music using the Bohlen–Pierce scale? Well, first, make sure you only use sounds with odd harmonics. Clarinets are good, but it's easy to synthesize tones of this sort. If we do this, after listening for a while, it sort of sounds okay. *Sort of.* The disturbing thing is that some of the intervals sound a bit like intervals in our twelve tone scale, but badly out of tune. So your ears are constantly screaming at you that something isn't quite right. The problem seems to be that a large part of our experience of musical sounds is culturally determined by a lifetime of listening to music in the modern twelve tone equal tempered scale. There seems to be absolutely no way around this. You can't even go shopping without hearing music piped into the supermarket. Even music played in the meantone scale, which was common for so long, takes some getting used to for our modern ears.

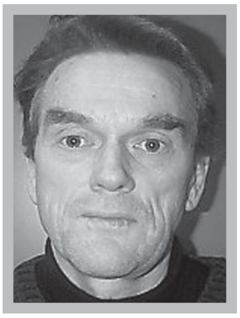
The ideas here can be taken a lot further. If we're prepared to synthesize musical tones with a *spectrum* that we've carefully crafted, then the *scales* we use can be adjusted to taste. This notion has been investigated by Sethares,[5] who developed the idea of *adaptive tunings*. This is where the pitches of the notes vary by small amounts from one chord to the next, to keep everything better in tune than would be possible with the more usual static tuning. Of course, this isn't very practical for traditional musical instruments, with the possible exception of the trombone. But who plays a trombone in tune anyway?[6] The real strength of the idea comes with synthesized tones and electronic music.

[5] W. Sethares, *Tuning, timbre, spectrum, scale*. Springer-Verlag, 1998.
[6] Don't tell my friend Moe I said that.

Om matematikk og musikk

Estetiske fag og matematikk

2. del



Af: Eystein Raude
Høgskolen i Vestfold, afd.
RI/LU
email: era@hive.no

Første del kan læses i Matilde 26 eller på adressen
http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M26/M26-18_22Musik.pdf

2. Konsonans. Dissonans. Tonefarge. Overtoner.

2.1. Dissonans.

Anta at vi slår an samme streng, f.eks. den første, *e*-strengen, på to gitarer og at de er stemt likt. Vi slår an den løse strengen på den ene gitaren samtidig som vi presser ned den andre på ulike steder på gitarhalsen. De intervallene vi da skaper klinger noen ganger "godt" og andre ganger ikke så godt. Intervaller som klinger godt kalles **konsonante** og de som ikke klinger godt kalles **dissonante.**
Allerede Pythagoras kjente følgende betingelsene for konsonans: det er konsonans når forholdet mellom svingetallene for de to deltonene kan uttrykkes ved små hele tall under 7. Alle høyere svingetallsforhold gir dissonans. Derfor var det bare intervallene prim, oktav, kvart og kvint som ble betraktet som konsonante. Tersen ble antakelig godkjent som konsonans i England rundt 1290. Det går an å inndele musikkhistorien etter følgende skjema:
1. ca. 900 - ca. 1400, "før-ters-tiden"
2. ca. 1400 - ca. 1900, "ters-tiden"
3. etter 1900, "etter-ters-tiden".

Den tempererte kvinten som er 2 cents mindre enn den rene vil derfor få svingtallsforholdet $\frac{439}{293}$ og skulle etter definisjonen være svært dissonerende. Denne lille dissonansen som oppstår har imidlertid ingen betydning for alminnelig musikkpraksis (Benestad,1985). I musikken er den kraftigste dissonans en liten sekund, $\frac{16}{15}$.
Musikkinstrumenter er mekaniske gjenstander som kan frambringe spesielle vibrasjoner som øret oppfatter som lyder. Det er tre kategorier instrumenter: strenge-, blåse- og slaginstrumenter. Hva er det som gjør at vi hører forskjell på ulike instrumenter som frambringer "samme" tone? Det skyldes at ulike instrumenters toner har ulik "farge", noe som henger sammen med tilstedeværelsen av overtoner og deres innbyrdes styrkeforhold. En gitarstreng festet i begge ender kan ha periodiske bevegelser, såkalte *sinusbølger*, men bare med bestemte frekvenser, nemlig grunntonens og dens overtoner, som har frekvenser som er et helt antall av grunntonens frekvens. Dersom grunntonens frekvens er f_0 , vil første overtone ha frekvensen $f_1 = 2 \cdot f_0$, andre overtone frekvensen $f_2 = 3 \cdot f_0$, o.s.v. for de andre overtonene. Ved hjelp av elektronisk apparatur kan en undersøke hvilke frekvenser som er med i en tone/lyd og deres styrkeforhold, en såkalt *Fourieroppløsning.* Det kan derfor være hensiktsmessig å si at toner lyder konsonante når de har overtoner med samme frekvenser. Toner lyder dissonante dersom deres overtoner har frekvenser som er nær hverandre, men langt nok fra hverandre til å skape raske "svevinger" mellom dem.
Dersom vi har to lydbølger med frekvenser, f_1 og f_2, vil de gi opphav til en resultantbølge med en gjennomsnittlig frekvens på $\frac{f_1 + f_2}{2}$ som svinger i styrke med frekvensen $f_1 - f_2$. Når disse to tonene har omtrent samme styrke eller amplitude høres det ut som én tone der styrken varierer rytmisk, eller "svever". Frekvensforskjellen må være liten, 10 Hz eller mindre, for å høre en tone med middelfrekvensen. Når differensen mellom de to frekvensene øker, øker også svevingens hastighet. Ved observasjon av svevinger kan en lett justere en av de to frekvensene slik at de får samme tone, dvs. ingen sveving. Dette er en av de metoder som brukes ved stemming av strengeinstrumenter

2.1.1. Et eksempel.

Det er lett å verifisere overtoneforholdene ved hjelp av noen enkle forsøk på et piano. Tonen c^1 , dvs. enstrøket *c*, finner vi midt på pianoet. Går vi to oktaver ned, til *C*, er rekken av overtoner fra denne: *c* (nr.1), *g*, c^1, e^1, g^1, b^1, c^2, d^2, e^2, $fiss^2$, g^2, a^2, b^2, h^2, c^3, osv. (Overtonene nr. 6, 10, 12 og 13 klinger litt

lavere enn de toner på et temperert instrument som notene refererer til.) Vi tar for oss de tre *c* - ene C, c og c^1 og *g* - ene rett over disse. Grunntonene vil da ha følgende relative frekvensforhold:
C - 2 *G* - 3
c - 4 *g* - 6
c^1 - 8 g^1 - 12
Press *c* forsiktig ned uten at den klinger og uten å bruke demperen. Slå deretter an *C*. Den vil da produsere sin egen grunntone og *noe* første overtone. Den første overtonen vil få *c* til å vibrere. Dersom vi demper *C* , uten å slippe opp *c*, vil vi høre *c* svakt mens den dør bort. På samme måte vil den tredje partialtonen til *C* sette *g* i svingninger. Eller den 6. partialtonen til *C* kan sette g^1 i svingninger.
Et litt annet resultat kan oppnås dersom vi presser *G* forsiktig ned og slår an *c*. Den tredje partialtonen til *c* vil korrespondere med den fjerde partialtonen til *G*, slik at *bare* den fjerde partialtonen til *G* vil bli eksitert. (1. overtone tilsvarer 2. partialtone.) Det er lett å tenke seg mange flere kombinasjoner i denne leken. Til slutt: trykk ned tonene $c^1 - e^1 - g^1$ stumt på klaveret og slå deretter kraftig an *C.* Så lenge tonene $c^1 - e^1 - g^1$ holdes nede, vil de klinge svakt, selv om de ikke er slått an, og selv etter at tangenten *C* er løftet opp.
Skulle vi kunne si da at "konsonans er sammenfall av overtoner"? Hva er så grunnene til konsonansopplevelsen? Rene toner (uten overtoner) nøye plassert i det rette forholdet gir ikke opplevelsen konsonans! Tilpasser øret overtonene eller utfører det aritmetikk når vi bestemmer at vi liker en lyd?

2.2. Svevinger.

Til slutt litt om "svevinger": Vi sa at styrken på svevingen svingte med frekvensen $f_1 - f_2$, dvs. med frekvensen gitt ved differensen mellom de tonenes frekvenser. Anta at vi har to bølger $A_1 \cdot e^{i\omega_1 t}$ og $A_2 \cdot e^{i\omega_2 t}$ der ω_1 og ω_2 er vinkelfrekvensene og A_1 og A_2 er amplitudene. (Forholdet mellom vinkelfrekvensen ω og frekvensen *f* er 2π. Dersom tonens frekvens er 440 Hz, er den tilsvarende vinkelfrekvensen 880π eller omlag 5530 radianer per sekund.) Dersom vi adderer disse to bølgene og deretter regner ut den samlede bølges intensitet får vi
$A_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{i\omega_2 t}$ og $I = A^2{}_1 + A^2{}_2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)$
Vi ser at intensiteten tiltar og avtar med frekvensen $\omega_1 - \omega_2$ og varierer mellom $A_1 + A_2$ og $A_1 - A_2$. Dersom amplitudene er forskjellige vil minimumsintensiteten aldri bli lik null. Effekten er lett å observere eksperimentelt. I det akustiske tilfellet kan vi sette opp to tonegeneratorer og la dem drive hver sin høyttaler. Vi kan på den måten motta en tone fra den ene og en annen tone fra den andre høytaleren. Ved å endre tonenes frekvens i forhold til hverandre kan vi høre variasjoner i intensiteten. Desto lenger unna frekvensene er hverandre desto raskere er variasjonene. Øret har vanskeligheter med å oppfatte variasjoner raskere enn 5 til 10 svingninger per sekund.

2.3. Overtoner. Tonefarge.

Ulike instrumenter lyder ulikt alt etter hvilke overtoner som svinger med. Vi kan jo skille mellom en fiolin som gir en enstrøken *a* (a^1) og et piano som gir samme tone. Samtidig vet vi også at et spesifikt instrument gir samme tone, men med ulik farge avhengig av hvordan vi for eksempel blåser på det eller hvor vi slår an strengen. Andre faktorer som bestemmer klangfargen utenom svingningenes karakter, dempede eller udempede, transversale eller longitudinale, er instrumentenes form, hvilke materialer de er laget av, osv. La oss ta en svingende gitarstreng som eksempel. Vi vil slå an strengen dels på midten og dels for eksempel tre fjerdedeler fra halsens begynnelse.
Strengen utfører en periodisk bevegelse som gir opphav til en *periodisk lyd,* som vi kan representere med en passende kombinasjon av toner. Den svingende strengen er et lineært system og *enhver bevegelse kan analyseres ved å anta at den er en sum av bevegelser av alle mulige forskjellige bevegelsestilstander kombinert med passende amplituder og faser.* Dersom vi kaller strengens lengde *L,* vil grunntonens og overtonenes frekvenser være gitt ved løsningen av $\sin(kL) = 0$. *k* er svingtallet gitt ved antall bølgelengder per periode. En periode er representert ved vinkelmålet 2π radianer. Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi \cdot f$ der f er frekvensen. For strengen gjelder løsningen $kL = n\pi$, hvilket gir frekvensene $\omega_n = \dfrac{n \cdot \pi \cdot v}{L}$. v er bølgefarten på strengen.

2.3.1. Fourieranalyse av en svingende streng.

Fourier, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fourier.html, viste at en periodisk bevegelse kan uttrykkes som en sum av et antall enkle harmoniske funksjoner, som $\cos\omega x$, for hver av de forskjellige harmoniske frekvensene. En hvilken som helst funksjon med periode *T* kan derfor skrives matematisk som

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\cos\omega x + b_1\sin\omega x \\ &+ a_2\cos 2\omega x + b_2\sin 2\omega x \\ &+ \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$. Koeffisientene, de ulike a-er og b-er, forteller hvor mye hver komponent er representert i svingingen $f(x)$. Da vi bare er interessert i området mellom 0 og *L* spiller det ingen rolle om vi velger sinus- eller cosinusutviklingen av den periodiske funksjonen. Vi beregner for eksempel b_n ved formelen

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^L f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Vi betrakter strengen som en lineær funksjon, $f(x) = ax$. Dersom vi trekker strengen et lite stykke $\frac{1}{2}\varepsilon L$ ut fra midten, vil de to halvdelene kunne skrives som $f(x) = \varepsilon x$ og $f(x) = \varepsilon(L-x)$.

Koeffisientene finner vi derfor ved å utføre integralet $b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^L f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}dx$:

$$b_n = \frac{2}{L}\cdot\int_0^{L/2}\varepsilon x\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}\varepsilon(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{4\varepsilon L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

På samme måte finner vi koeffisientene når vi i stedet trekker strengen ut $\frac{3}{4}\varepsilon L$ i avstanden 3/4 fra halsens begynnelse. Strengens funksjonsuttrykk blir i dette tilfelle $f(x) = \varepsilon x$ og $f(x) = 3\varepsilon(L-x)$ og integrasjonsgrensene 0, $\frac{3L}{4}$ og *L*. Resultatet blir

$$b_n = \frac{8\varepsilon L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Vi ser her en av årsakene til at klangen endrer seg når vi endrer "angrepspunktet". Selve strengens bevegelse kan finnes ved å løse en éndimensjonal, separabel annen ordens differensiallikning. For en bestemt tid *t* er *strengens form* gitt ved uttrykket

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos\frac{n\pi vt}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Bølgehastigheten på strengen er gitt ved $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, kvadratroten av spenning dividert med tetthet. Vi kan altså doble en tones frekvens ved enten å halvere lengden eller firedoble spenningen. Det siste er ikke alltid så lett!

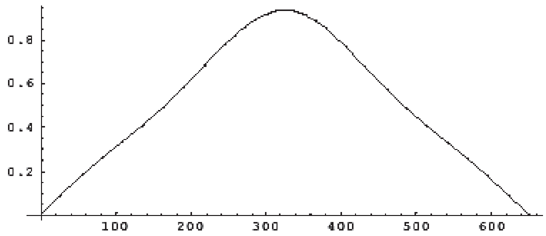
Den formelle løsningen for strengen strukket et stykke ut ved for eksempel 3/4 av sin lengde blir

$$y(x,t) = \frac{8\varepsilon L}{\pi^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi vt}{L}\sin\frac{\pi x}{L} + \cos\frac{2\pi vt}{L}\sin\frac{2\pi x}{L} + \ldots\ldots\right]$$

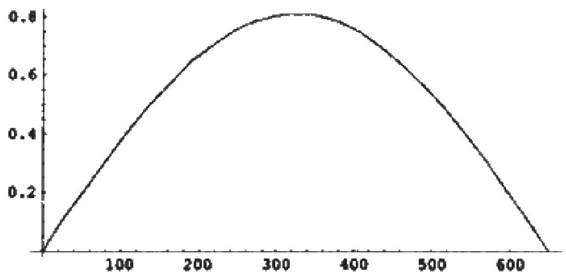
Startbetingelsene påvirker tonefargen, eller blandingen av alle frekvensene, men ikke grunnfrekvensen. Det er viktig å legge til at dette gjelder for relativt små utsving. Ved et kraftig anslag av strengen er det mulig i startfasen å høre et lite avvik fra tonens vanlige frekvens.

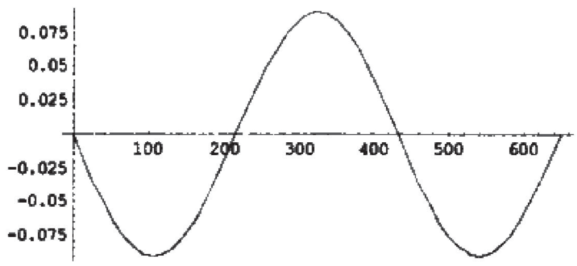
Vi vil bruke matematikkprogrammet MATEMATICA for å illustrerer den tidsuavhengige delen gitt ved $y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$ for gitarstrengen trukket et lite stykke ut på midten. Setter vi inn det tidligere oppnådde resultatet får vi $y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\varepsilon L}{n^2\pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$.

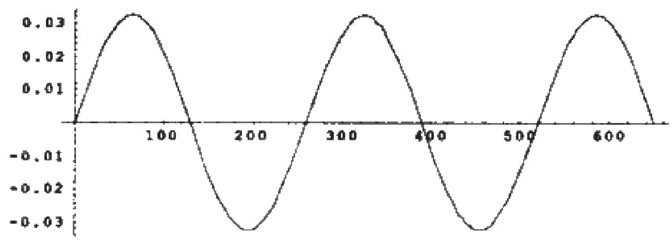
En gitarstreng kan være 650 millimeter mellom de faste punktene. Dersom vi trekker for eksempel den første strengen (e-strengen) ut 1 millimeter, vil produktet $4\varepsilon L = 8$. Tar vi med de fem første svingtilstandene ser grafen til $f(x)$ slik ut:

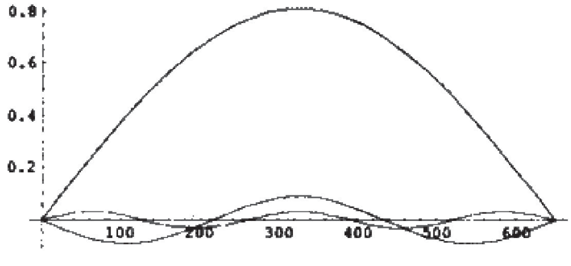


På grunn av faktoren $\sin(n\pi/2)$ vil de jevne ledd falle bort!
Vi lar MATEMATICA tegne de tre første tilstandene og deres sum:

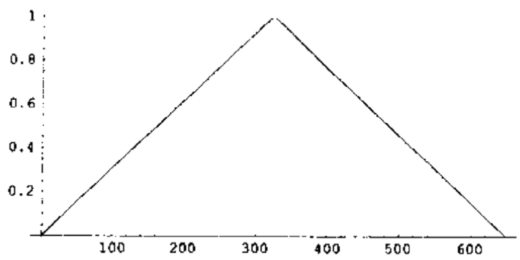








Dersom vi tar med enda flere svingetilstander vil Fourierutviklingen gå mot den trekantformen som strengen hadde da den ble trukket ut i startfasen:



3. Melodien.

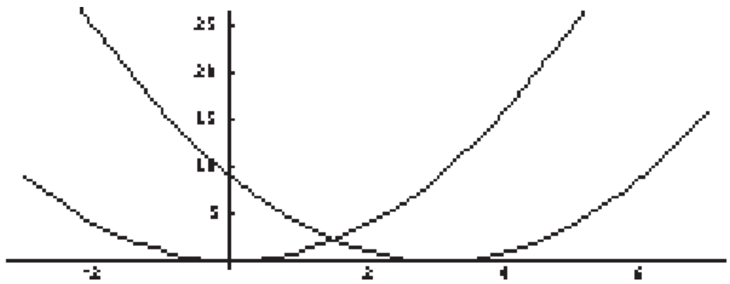
Komponering av et varig musikkstykke kan sammenliknes med det å skape et klassisk bilde eller en vel koordinert hage. Det er heller ikke ulikt ingeniørkunst. Det fins en underliggende struktur som er influert av matematikk.

For å få sammenheng i et musikkstykke kan det være nødvendig å gjenta en tonefølge - variert selvfølgelig, for å avverge kjedsomhet og gi komposisjonen karakter. Det er viktig at de transformerte gjentakelsene er gode for øret og interessante for tanken (Garland og Kahn, 1995).

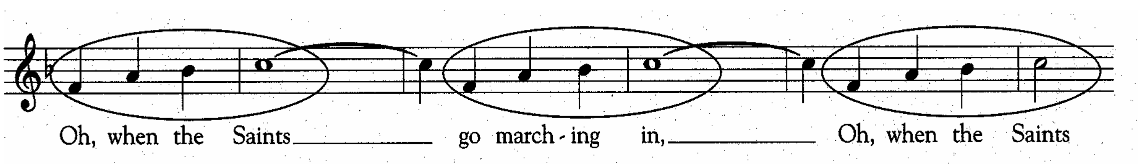
Musikalske transformasjoner er nært knyttet til ***geometriske transformasjoner***. I en geometrisk transformasjon endres verken form eller størrelse. Vi deler disse inn i fire typer.

3.1 Translasjon.

En geometrisk translasjon vil si å flytte en figur parallelt med en gitt retning en bestemt avstand. Det kan skrives ved hjelp av funksjonsnotasjonen som $y = f(x) \rightarrow y = f(x-a)$ der *a* angir forflytningens lengde. Som eksempel kan vi translatere funksjonen $y = f(x) = x^2$ en avstand 3 mot høyre og få uttrykket $y = f(x) = (x-3)^2$ Det vil se slik ut:

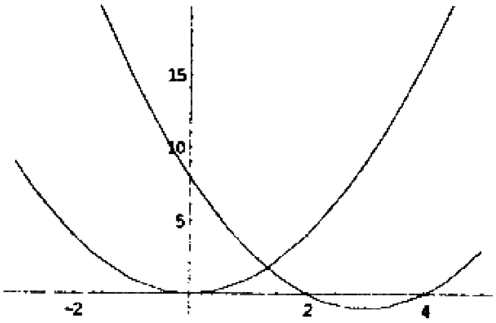


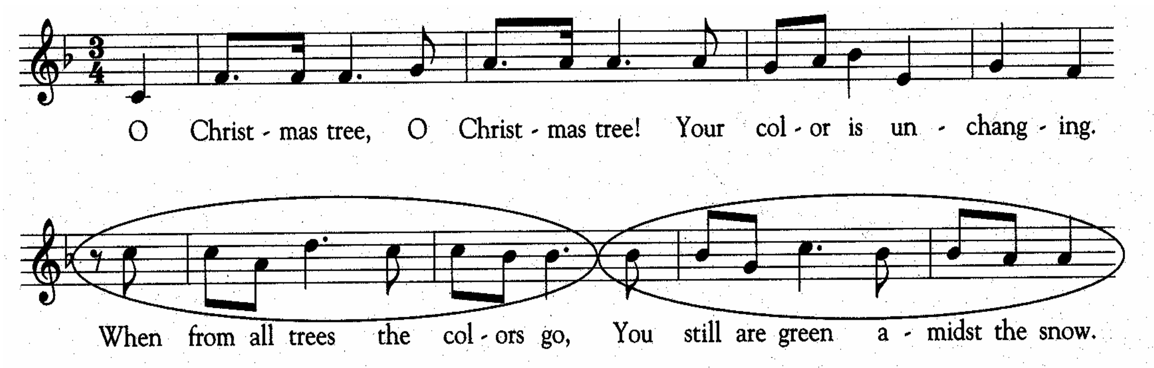
3.1.1 Den enkleste form for translasjon i musikk er **repetisjon***:*



3.1.2 En noe mer sofistikert form er **transposisjon** ***der en tonerekke flyttes til et annet sted i skalaen:***

Matematisk vil det si $y = f(x) \rightarrow y = f(x-a) - b$, og med vårt eksempel:



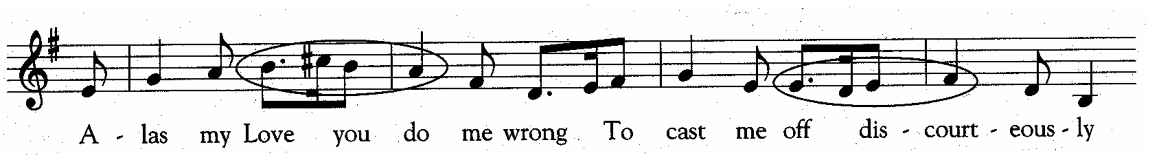


3.2 Refleksjon

En geometrisk refleksjon vil si å speile en figur om en akse, vertikalt eller horisontalt. Matematisk kan disse to typene skrives $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$ og $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$. Musikalsk snakker vi om *retrogresjon* og *inversjon.*

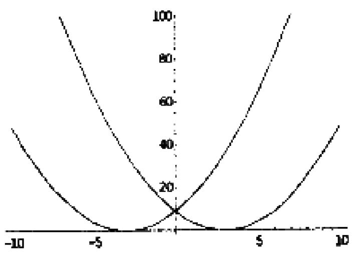
3.2.1 Retrogresjon:

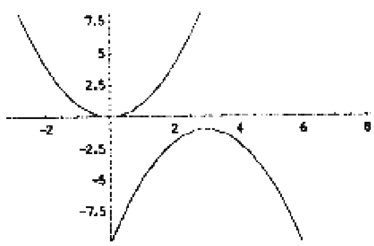
3.2.2 Inversjon:



Her er tonefølgen både translatert, transponert og invertert.

Grafisk vil vi for refleksjon i disse tilfellene ha





Det siste tilfellet er såkalt *gliderefleksjon*, og i musikken kalles denne formen *retrograd inversjon.*

3.3 Seriell musikk.

I begynnelsen av det 20.århundre innførte bl.a. *Arnold Schönberg* (http://212.186.218.4/english/as/as1.html) en type musikk som var basert på at alle 12 toner i den tempererte skalaen var likeverdige, dvs. at de tradisjonelle tyngdepunktakkordene *tonika, subdominant og dominant* mistet sin betydning i den musikalske kadensen.

Det var imidlertid ikke likegyldig i hvilken rekkefølge de tolv tonene kom; ingen måtte gjentas før hele sekvensen var omme.

For å unngå monotoni ble grunnsekvensen transformert ved at man brukte både *retogresjon, inversjon* og *retrograd inversjon,* nettopp de geometriske transformasjoner vi har beskrevet tidligere i 3.1 og 3.2.

3.3.1 De store tall (fakultetet) i musikken.

En seriell sekvens består av 12 toner. Hver av disse kan skrives i fire versjoner (original, retrograd, invertert og retrograd invertert). Av disse kan det da lages $4 \cdot 12! = 1916006400$ ulike melodier. En hel tre times opera har blitt skrevet ved å bruke den samme sekvensen på 12 noter i en rekke.

(Fakultetet av et tall skrives som tallet med et utropstegn etter. For eksempel skrives 3 fakultet slik: 3 !, og betyr $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Dersom vi plasserer 3 personer etter hverandre i en rekke kan det gjøres på 6 måter: den første plassen kan velges av tre, den andre av to og den siste av én, og resultatet blir produktet av tallene 1, 2 og 3.)

Nedenfor vises en 12 – tonerekke og dens transformasjoner: Først den 12 toner lange sekvensen:

Deretter den samme speilvendt, invertert:

Temaet på nytt:

Deretter i baklengs eller retrograd bevegelse:

Temaet igjen:

Til slutt er temaet baklengs og speilvendt:

3.3.2 Fugen.

Fugen er en musikkform som har røtter tilbake i renessansen (ca.1300 – 1600) (http://www.medieval.org/emfaq/beginlst/renaiss.htm).

. *J. S. Bach* (http://www.jsbach.org/websites.html) skrev mange rene fuger og brukte ellers formen i mye av det han skrev. En fuge kan beskrives som ”et musikkstykke basert på en kort tonerekke eller et tema som hele tiden dukker opp, skjønt noen ganger speilvendt, opp – ned eller speilvendt og opp – ned” (McLeish, 1982). Det berømte verket *Das Wohltemperierte Klavier* av J. S .Bach inneholder 24 fuger i alle de tolv dur- og molltoneartene som fins i den tempererte skala.

3.3.2.1 Et eksempel hos Mozart (http://mozart.composers.net/) .

Kombinasjoner av musikalske transformasjoner karakteriserer mange velkjente melodier, inklusive *Joy to the World* av *Georg Friedrich Händel* (http://bruichladdich.dcs.st-and.ac.uk/HandelWWW/HandelCat.html) som starter med en flott nedadgående åttetoners rekke.

Et strålende eksempel på en rekke av transposisjon, retrogresjon, inversjon og retrograd inversjon finner vi dette utrolige stykke av Mozart (se næste side)

Meningen med stykket er at to utøvere skal sitte mot hverandre og spille fra hver sin ende av det. De leser da hverandres linjer opp – ned, og fordi det er et likt antall linjer vil de aldri spille den samme linje samtidig.

Mozart var matematisk anlagt, og han likte spill. Ta for eksempel på hans *Melodi Terning*. Spilleren hadde mulighet til å komponere en vals bestående av 16 takter, men komponeringen av hver av de 16 taktene ble bestemt av terningens ”lynne”. Mozart komponerte 11 forskjellige muligheter (tilsvarende tallene fra 2 til 12 som framkommer med to terninger) for hver av de 14 taktene, 2 muligheter for en av taktene og den siste takten var bestemt. Det vil derfor være mulig å spille $1 \cdot 2 \cdot 11^{14}$ versjoner av denne valsen!

3.3.2.2 Ringebytte i England.

I små landsbyer i England har man en lang og elsket tradisjon på å ringe nedadgående skalaer om igjen og om fra kirker, det være seg til glade eller sørgelige hendelser. Noen ringere byttet om på den rekkefølgen klokkene ble ringt i, for ikke å forgå av kjedsomhet. Derav navnet *ringebytte.*

Antall klokker kunne variere fra 5 til 12. Med 5 klokker ville det da bli $5! = 120$ forskjellige rekkefølger for ringingen. 120 rekkefølger med 5 toner i hver rekkefølge gir 600 toner. Med en fart på 144 per minutt vil ringingen ta over 4 minutter. Hvor lang tid ville det ta med 12 klokker?

4. Rytmen.

Rytmen er basisen i musikken. Rytme skapes når tidskontinuumet brytes opp i deler av lyd eller bevegelse.

4.1 Taktarter og noteverdier. Enkel brøkregning.

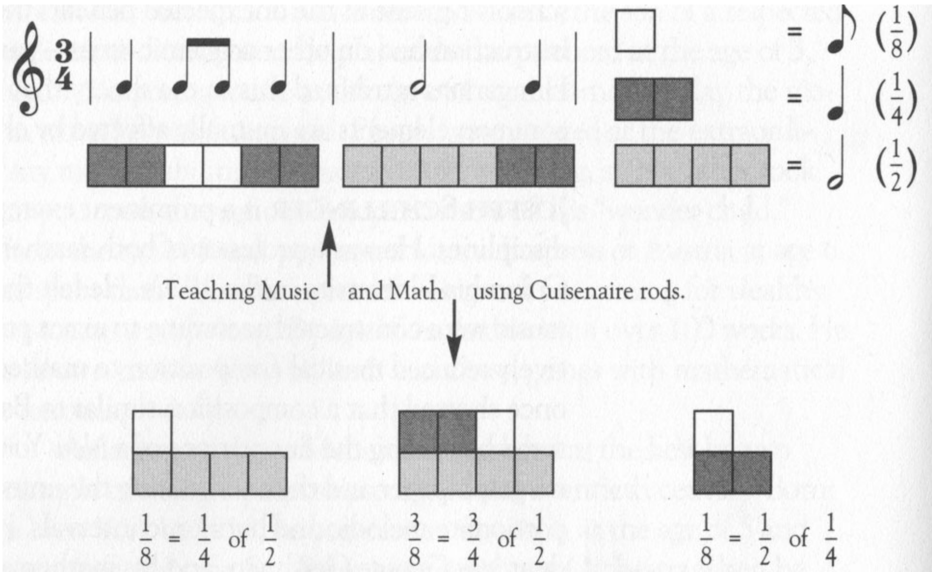
Rytme måler tid. For dette formål brukes tradisjonelt *takter* og *tidsmål*. Taktene måler like lange tider. Hver takt deles opp i like lange *slag*. Et musikkstykke i fire firedels takt har altså 4 slag i takten og en takt består av 4 firedels noter.

Noteverdier gir et godt utgangspunkt for enkel brøkregning og man kan lett forvisse seg om en takt inneholder den sammenlagt rette verdien ved å addere brøker med ulike verdier. Dette gjelder både noter og pauser. Punkterte noter og pauser er et naturlig utgangspunkt for halvering av brøker.


Allegro
Mozart


Wolfg: Amade Mozart

Eksempler som disse nedenfor kan være aktuelle som øvinger:



og/eller:

4.2 Rytme og motrytme. Minste felles multiplum.

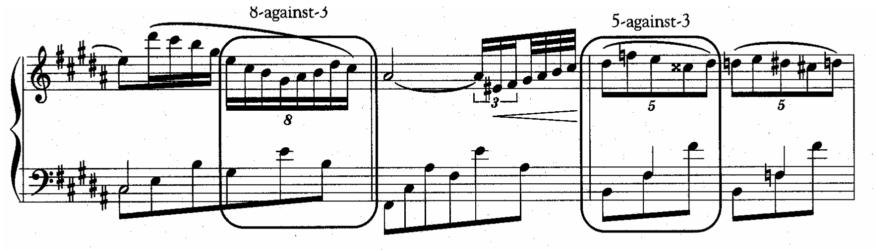
Uansett hvor komplisert en musikalsk rytme måtte være kan den analyseres matematisk. En av de vanskeligste utfordringene er å spille én rytme mot en annen samtidig. Dette kalles gjerne ”2 mot 3”, og går ut på at den rytmiske syklusen deler den gitte tidsperioden opp i *ulike* delinger

Dersom taktarten er 3/4, må takten deles inn i 6, som er minste felles mål for 2 og 3. Utøveren kan for eksempel telle ” *en og to og tre og*” og slagene må gå slik:

En (og) to (og) tre (og)

En *to* hvor altså slaget i den ene hånden kommer på *og*-et i den andre (altså mellom slagene i den andre hånden).

Nedenfor er vist et par andre eksempler (8 mot 3 og 5 mot 3):



5. Kuriositeter.

5.1 Fibonacci-tall. Det gylne snitt.

Som en kuriøs forbindelse mellom matematikk og musikk kan nevnes fibonacci-tallene.

Tallene som er en uendelig følge, har fått sitt navn etter matematikeren Leonardo av Pisa, http://www.lib.virginia.edu/science/parshall/fibonacc.html, som levde på 1200 tallet e.Kr.

Tallfølgen starter slik: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...der hvert tall i følgen er summen av de to foregående.

Forholdet mellom to fibonacci-tallene nærmer seg tallet $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}61803398875$, som også går under betegnelse *det gylne snitt*. Det gylne snitt gjenfinner vi i naturen og brukt bl.a. i arkitektur og bildende kunst; men også i musikken.

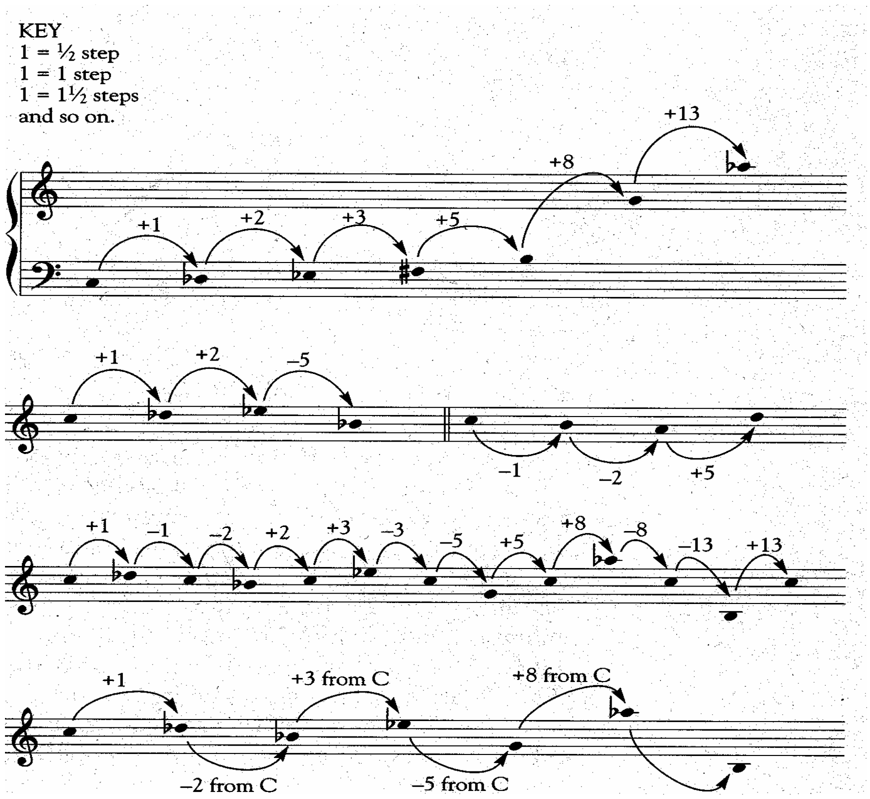
Den ungarske komponisten Béla Bartók (http://www.classical.net/music/comp.lst/bartok.html) brukte det som en teknikk i utformingen av sine komposisjoner. I første sats fra *Musikk for Strykere, Slagverk og Celesta* har han følgende inndeling av de 89 taktene:

55 takter blir sterkere→		34 takter	
34 takter Temaet er 21 takter strykerne fjerne demper etter 34 →	21 takter	13 takter strykerne tar igjen på demper etter 13 takter→	21 takter 13 takter + 8 takter

Første sats i L. van Beethoven`s 5.symfoni er også inndelt ved hjelp av fibonacci-tall, og det gylne snitt fins i forholdet mellom satsen deler: http://www2.lucidcafe.com/lucidcafe/library/95dec/beethoven.html

Bankemotivet i første sats: 5 takter. Deretter 372 takter før bankemotivet kommer igjen med 5 takter. Videre 228 takter pluss 5 takters bankemotiv. Det gir forholdene $\frac{228}{372} \approx 0{,}613$ og $\frac{233}{377} \approx 0{,}618$.

Noen ganger er fibonacci-tallene brukt til å skape rytmiske forandringer eller utvikle melodilinjer. *Joseph Schillinger* (http://www.peabody.jhu.edu/current/js/js.htm) var talsmann for denne teknikken. Schillinger-systemet er mye brukt i dag. Det består i å hoppe rundt i skalaen i halve trinn som er fibonacci-tall. Som eksemplet viser:



Béla Bartók hadde sin "fibonacci-skala": 1, 2, 3, 5, 8, 13: alle tall i antall halve trinn fra grunntonen.

En undersøkelse av akkorder, spesielt de "vakre", viser på enda en opptreden av fibonacci-tall. De intervallene som av mange oppfattes som mest tiltalende for øret, er stor og liten sekst. Frekvensforholdene for disse intervallene i den tempererte skala er (regnet fra c^1 til a^1) $\frac{264}{440} = 0{,}6 = \frac{3}{5}$, et fibonacci-forhold, og $\frac{330}{528} = 0{,}625 = \frac{5}{8}$, (regnet fra $e^1 - c^2$) nok et fibonacci-forhold!

5.2 Stokastisk musikk.

Stokastisk betyr tilfeldig. Et kast med terning(er) gir tilfeldige utfall.

Stakastisk musikk oppstår når en *algoritme* (framgangsmåte) som definerer musikkstilen blir brukt på en samling tilfeldige utfall(f.eks. en melodi bestående av en samling tilfeldige noter). (Vi så tidligere et nærliggende eksempel hos Mozart!)

Algoritmen kan likne eksisterende regler for en bestemt stil (barokk eller jazz), regler brukt av en bestemt komponist (Bartók eller Gershwin), eller regler som er innbakt i et spesielt musikkstykke. Reglene kan til og med være helt løsrevet fra hittil skapt musikk.

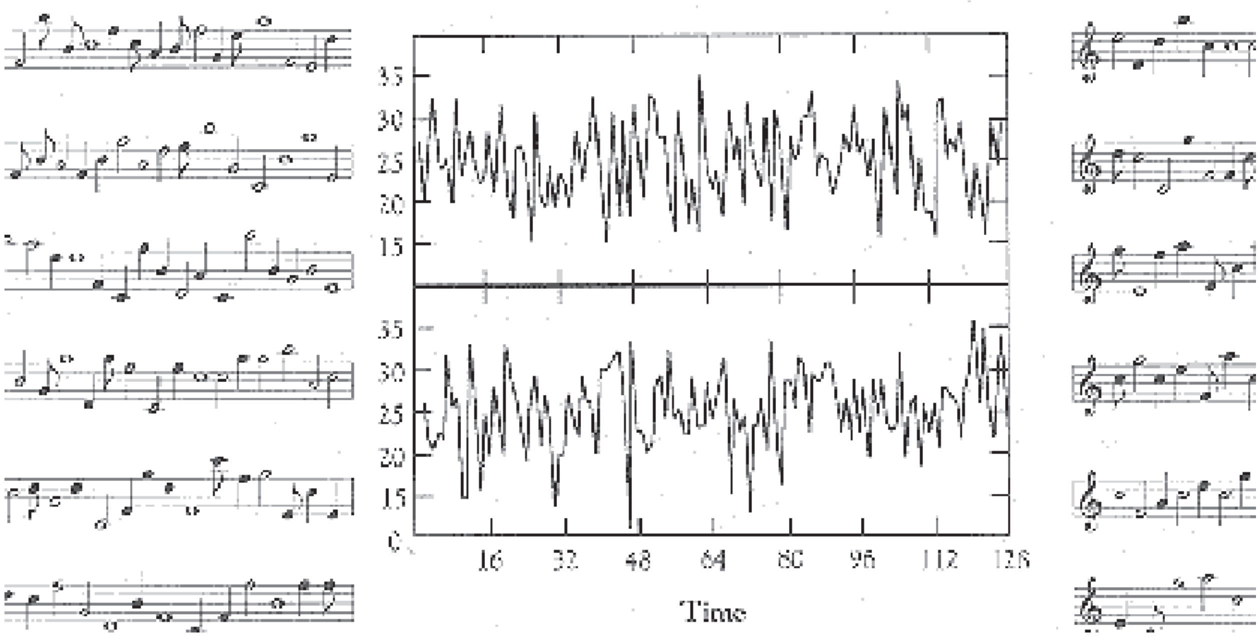
Komponering av stokastisk musikk involverer en vekselvirkning mellom menneske og maskin(ev. en terning). Komponisten skaper reglene i følge den stil hun/han ønsker i musikken, og maskinen genererer tallene (som korresponderer med noter, rytme, osv.) og innforliver dem etter komponistens regler.

Det viser seg at graden av korrelasjon mellom menneske og maskin i en komposisjon har stor betydning for hvordan musikken vil lyde. I den ene enden av skalaen har vi *hvit støy* (bruset i radioen eller i televisjonsapparatet når det ikke er sending, eller lyden av regndråper mot taket).

Hvit støy kan vi lage ved f.eks. å kaste pil mot en måltavle som er inndelt i syv deler, der hver del representerer de syv notene i en skala.

I den andre enden av spektret har vi *brun* støy, oppkalt etter de "brownske bevegelser" som i fysikken beskriver den "tilfeldige gange" støvpartikler i et flytende medium utfører når molekylene tilfeldig skyver dem rundt. Den "brune melodien" er deterministisk i den forstand at den "husker" noten som den nettopp forlot, på samme måte som støvpartikkelen "husker" hvor den nettopp befant seg.

Å skape brun musikk kan gjøres ved å gi de syv feltene på måltavlen tall fra -3 til +3, noe som skal indikere antall halve trinn til neste note. På denne måten blir alle notene helt avhengig av den foregående.
Hvit musikk er helt tilfeldig og uinteressant, brun musikk er kjedelig og overkorrellert.
Støy som ligger mellom hvit og brun kalles *fluktuerende*. Den manifisterer seg i naturen, men ikke alltid som lyd. Den har blitt funnet i solflekkaktiviteten, i elektriske strømmer i nervemembraner, i veksten i årringer på trær, i Nilens flodnivåer; og alle viser samme type støy.
Mot slutten av 1970-tallet påviste to amerikanske fysikere, R.F.Voss og J. Clark(Voss og Clark, 1978), http://linkage.rockefeller.edu/wli/1fnoise/1fnoise_prop.html, at nesten all musikk, inklusive Bach`s komposisjoner, indiske ragaer og Beatles sanger viser fluktuasjoner. Musikk av denne type kalles "rosa", fordi den ligger mellom brun og hvit musikk. De fleste foretrekker rosa musikk fordi den har nettopp så mye "tilfeldig" i seg at den virker interessant og akkurat stor nok grad av korrelasjon til å gi en følelse av struktur.
Her er eksempler på hvit og brun musikk:



5.3 Hva er kunst?

Til slutt: er f.eks. rosa musikk *kunst*? Hva karakteriserer et stykke musikk som har fått etiketten *kunst* hengende på seg? Er det ballansen mellom kompleksitet og enkelhet, spenning og avspenning, kaos og orden? Vil vi noen gang kunne beskrive *skjønnhet* ved hjelp av en matematisk formel, eller vil datamaskiner kunne skape en så "god" musikk som mennesket?

Referanser:

Encyclopedia Britannica, Inc., Online.
Bjørklund, Alf: Elementær musikalsk akustikk; Aschehoug & Co., 1966.
Garland, Trudi Hammel and Kahn, Charity Vaughan: Math and music; Dale Seymour Publ., 1995.
Benestad, Finn: Musikklære; Tano A/S, 1985.
Feynman, Richard P.: The Feynman lectures on physics, Addison-Wesley, Publishing Company, 1963.
Rignes, Truls: Klassisk og moderne astronomi, Aschehoug, 1978
Voss, R.F and Clark, J.: "1/f noise in music: Music from 1/f noise." The Journal of the Acoustic Society of America 63, No.1(January 1978): 258-263.
Wittgenstein, Ludwig: Filosofiske undersøkelser; Pax Forlag A/S, 1997.

Peter D. Lax
- Abelprisvinner 2005

Af: Helge Holden
Institutt for matematiske fag NTNU,
Trondheim, Norge
email:holden@math.ntnu.no

1 Innledning

Statsminister Stoltenberg annonserte høsten 2001 at Regjeringen ville etablere en Abelpris i matematikk. Fondet på 200 millioner kroner ble etablert året etter, og den første prisen ble utdelt i 2003. Formålet er beskrevet slik:

> *Hovedformålet med å opprette Niels Henrik Abels minnefond er å tildele en internasjonal pris for fremragende vitenskapelig arbeid i matematikk. Prisen skal bidra til å heve matematikkfagets status i samfunnet og stimulere barn og unge til å bli interessert i matematikk.*

Prisen, som er på 6 millioner norske kroner, ble første gang tildelt Jean-Pierre Serre, og i 2004 ble den delt mellom Sir Michael Atiyah og Isadore Singer, mens årets vinner er Peter D. Lax. Vi skal her gi en kort innføring i noen av de matematiske temaene han har arbeidet med.

2 Peter D. Lax — en kort biografisk skisse

Peter D. Lax ble født i Budapest i Ungarn i 1926, og han vokste opp i en intellektuell jødisk familie. Budapest var på den tiden et intellektuelt sentrum i Europa. Lax' matematiske evner var tidlig tydelig, og han fikk ekstraundervisning. I 1941 flyktet familien til USA, og bosatte seg i New York, der Lax har tilbrakt hele sitt liv. Han ble tatt med til von Neumann for å få råd om utdannelse. Han ble anbefalt å kontakte Richard Courant, en annen immigrant fra Europa, som da holdt på å bygge opp et matematisk miljø ved New York University. Det gjorde Lax, og han tok i 1949 sin doktorgrad samme sted med Kurt O. Friedrichs som veileder. Men før det ble han i 1944 innkalt til militærtjeneste, og istedenfor å bli sendt til strid i Europa eller sten, ble han sendt til Los Alamos for å delta på Manhattanprosjektet. Oppholdet der ble skjellsettende for hans videre virke. I 1946 returnerte han til New York og tok som sagt doktorgraden der i 1949. Han har forblitt ved det som nå heter Courant Institute of Mathematical Sciences ved New York University. Vi skal beskrive noen av hans matematiske bidrag nedenfor, så vi vil her konsentrere oss om biografiske data. Han var Director ved Courant i perioden 1972–80, var President i American Mathematical Society i 1980–82. Han ledet National Science Board (1980–86), en komité som var viktig for å styrke bruken av matematiske simuleringer i naturvitenskap, teknologi og industri. Lax har mottatt en rekke hedersbevisninger og priser for sitt matematiske virke; vi nevner her noen av dem: Han er medlem av American Academy of Arts and Sciences (1966) og National Academy of Sciences (1970). I 1974 mottak han Chauvenet prisen fra Mathematical Association of America for sin populærartikkel om hyperbolske konserveringslover, i 1975 mottok han Norbert Wienerprisen i anvendt matematikk fra American Mathematical Society og Society for Industrial and Applied Mathematics. Wolf-prisen, som deles ut i Israel, mottok han i 1987, og i 1993 ble han tildelt Steele-prisen fra the American Mathematical Society *"for his numerous and fundamental contributions to the theory and applications of linear and nonlinear partial differential equations and functional analysis, for his leadership in the development of computational and applied mathematics, and for his extraordinary impact as a teacher."*

Peter D. Lax

Men la oss nå konsentrere oss om matematikken. Lax' første arbeid ble publisert i 1944 da han var 17 år, og det ga svar på en formodning som Erdös hadde fremsatt. Bernsteins ulikhet sier at om man har et polynom P av grad n, så gjelder at

$$\max_{|z|} \leq 1|P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Ulikheten er skarp siden polynomet $P(z) = z^n$ gir likhet. Dersom man legger på ytterligere krav på polynomet P, kan det tenkes at man kan erstatte konstanten n med et mindre tall. Erdös' hypotese var at om P ikke har noen nullpunkter i det indre av enhetssirkelen, dvs for $|z| < 1$, så kan man erstatte n med $n/2$. Og $n/2$ gjør ulikheten skarp siden polynomet $P(z) = (z^n + 1)/2$ oppfyller kravene og gir likhet. Lax viste i arbeidet i 1944 at Erdös' formodning var sann.

Lax har gitt fundamentale bidrag til en rekke sentrale områder av matematikken. Hans bidrag inngår i en lang tradisjon der vekselvirkningen mellom fysikk og matematikk er sentral. Fysikken gir opphav til utfordrende problemer samtidig som den gir intuisjon om egenskaper ved løsningen. Matematikk kan avdekke dype, indre sammenhenger og egenskaper, og rigorøse matematiske bevis gir et solid grunnlag for vår innsikt.

John von Neumann, som hadde stor innflytelse på Lax, fastslo i 1945 at[1] "virkelig effektive høyhastighets datamaskiner kan, innenfor ikke-linære partielle differensialigninger såvel som innen mange andre områder av matematikken der matematisk analyse har liten eller ingen effekt, gi oss den heuristiske innsikten vi trenger for å få ytterligere fremskritt." Lax uttalte i 1986 at[2] "[a]nvendt og ren matematikk er nærmere knyttet sammen nå enn noen gang tidligere de siste 70 årene". Det er i denne ånd Lax har arbeidet.

I denne korte artikkelen vil vi fokusere på to områder, begge innenfor teorien for differensialligninger der Peter Lax har gitt fundamentale bidrag som fortsatt dominerer feltet. Vi vil her understreke Lax' bidrag der de anvendte aspektene er mest sentrale og har store konsekvenser for vårt moderne samfunn. På den måten vil vi dessverre ikke kunne diskutere hans fundamentale bidrag innenfor klassisk matematisk analyse og spredningsteori[3], særlig den pene *Lax–Phillips' spredningsteorien.*

Det første temaet er teorien for sjokkbølger. Sjokkbølger opptrer i mange fenomener i dagliglivet. Lettest å forklare er sjokkbølgene som oppstår når et fly bryter lydmuren eller ved eksplosjoner. Men sjokk fremkommer også i fenomener ved langt lavere hastigheter. Av spesiell interesse er flyt av hydrokarboner i porøse medier, eller, for å være mer konkret, flyt av olje i et oljereservoar. Det er velkjent at olje og vann ikke blander seg, og overgangen, interfasen, mellom områder med olje og områder med vann er matematisk sett et sjokk. Dynamikken til sjokkene er av avgjørende betydning for utvinningen av hydrokarboner fra oljereservoarene. Men selv i dagligdagse fenomener som rushtrafikk kan man observere sjokkbølger når det er en fortetting med biler. Sjokkene kommer ikke av at bilene kolliderer, men de oppstår når tettheten til bilene gjennomgår en brå endring.

Det andre temaet er teorien for solitoner. Denne teorien har en lang og innfløkt historie, men tilhører nå sentrale deler av ren og anvendt matematikk med betydelige anvendelser innen flere områder av teknologi. Opprinnelig var denne teorien en obskur del av fluiddynamikken. Men bl.a. på grunn av oppdagelsen av *Lax-par* ble det avdekket nye og oppsiktsvekkende sammenhenger mellom flere områder av matematikken. Videre har solitonteorien funnet anvendelser innen flere ulike områder av fysikken, f.eks. i kvantefeltteorien og i faststoffysikken og som modell for biologiske systemer. I tillegg brukes solitoner for kommunikasjon i optiske fibre.

En mer omfattende diskusjon av flere aspekter ved Peter Lax' bidrag til matematikken er å finne i [1], og en svært kort diskusjon er i [4]. Intervjuer med ham kan leses i [2] og [5], og en oversikt over alle hans bidrag kan studeres i hans utvalgte arbeider som nylig er gitt ut [3].

Før vi drøfter disse emnene litt mer inngående, må vi forklare hva en differensialligning er.

3 Hva er en differensialligning?

For å kunne diskutere differensialligninger må vi først introdusere den deriverte. Anta at du kjører i bilen din. På kilometertelleren kan du måle avstanden fra startpunktet, og når du kjenner det, kan du bestemme posisjonen din. Den avstanden du tilbakelegger per tidsenhet kalles hastigheten og er selvsagt den du leser av på speedometeret. Matematisk er hastigheten ikke noe annet enn den deriverte av posisjonen. For å gjøre det mer presist lar vi x betegne bilens posisjon målt langs veien fra et eller annet startpunkt. Posisjonen avhenger av tiden, t, så vi

[1] *Collected works of John v. Neumann*, vol. V, 1963, p. 1–32.

[2] Mathematics and its applications, *The Mathematical Intelligenzer* **8** (1986) 14–17.

[3] I forbindelse med tildelingen av Wolf-prisen til Lax ble hans matematiske virke beskrevet i [1]. P. Sarnak omtalte resultatene til Lax innen klassisk analyse og spredningsteori, og som altså ikke omhandles her, mens Lax selv beskrev sine bidrag til hyperbolske konserveringslover og solitoner.

skriver $x = x(t)$. Hastigheten, som vi betegner v, og som også avhenger av tiden, $v = v(t)$, er endring i posisjon i et kort tidsintervall, og matematisk kaller vi det den deriverte[4] av x, og vi skriver $x'(t)$. Dermed er $v(t) = x'(t)$.

Hvis en passasjer i bilen hele tiden skriver ned hastigheten, burde det være mulig å beregne bilens posisjon til enhver tid hvis vi kjenner tid og sted der turen startet. Vi kan gjøre det mer presist på følgende måte: Dersom vi kjenner startpunktet x_0 (og synkroniserer klokkene slik at vi starter ved tiden $t = 0$), dvs. $x(0) = x_0$, og vi kjenner $v(t)$ for alle tider t, burde vi være i stand til å beregne posisjonen x som en funksjon av tiden, dvs. bestemme $x = x(t)$. For å løse dette problemet, må vi løse differensialligningen $x'(t) = v(t)$.

Differensialligninger er simpelthen ligninger som involverer deriverte. Du synes kanskje at vi gjør mye ut av et lite problem. Men det viser seg at alle naturens fundamentale lover er gitt ved differensialligninger, slik følgende liste viser:

- gravitasjon (Newtons lover),
- kvantemekanikk (Schrödinger-ligningen),
- elektromagnetisme (Maxwells ligninger),
- relativitetsteori (Einsteins ligninger),
- bevegelse av gasser og væsker (Navier–Stokes' ligninger).

Planetenes bevegelser, datamaskiner, elektrisk lys, GPS (Global Positioning System) og været kan alle beskrives ved hjelp av differensialligninger.

La oss nå gå videre til et mer komplisert eksempel enn posisjon og hastighet for biler. Betrakt temperaturen i det rommet der du sitter. I ethvert punkt (x, y, z) i rommet og tid t lar vi $T = T(x, y, z, t)$ betegne temperaturen. Ved å anta at varme flyter fra varme steder til kalde steder med en rate proporsjonal med temperaturforskjellen, at varme ikke forsvinner (hvilket betyr at rommet er fullstendig isolert fra omgivelsene), og at det ikke er noen varmekilder, kan man vise at temperaturfordelingen er gitt ved den såkalte varmeledningsligningen som kan skrives

$$T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}.$$

Her betegner T_t den deriverte av temperaturen med hensyn på tiden t mens T_{xx} betegner den deriverte av den deriverte, begge ganger med hensyn på romvariablen x, og tilsvarende for de andre leddene. Selv enkle problemer gir opphav til kompliserte differensialligninger! Anta at vi kjenner den initielle temperaturfordelingen, dvs. vi kjenner $T = T(x, y, z, t)$ for $t = 0$. Da sier vår intuisjon oss at temperaturen skulle være bestemt for alle senere tidspunkter. Dette kalles et initialverdiproblem. Den matematiske utfordringen er å vise at denne påstanden er riktig, og å utlede en metode for å beregne den faktiske temperaturen. Dette er den generelle problemstillingen (for mer avanserte ligninger enn varmeledningsligningen) som er kjernen i Lax' bidrag til teorien for differensialligninger.

Når vi har en differensialligning, ønsker vi ideelt at ligningen skal være *velstilt* i den forstand at

- problemet skal ha minst én løsning (det eksisterer en løsning),
- problemet skal ikke ha mer enn én løsning (entydighet av løsningen),
- løsningen skal være stabil med hensyn til perturbasjoner (stabilitet).

De to første betingelsene sier at problemet skal ha en entydig løsning, og den tredje betingelsen sier at en liten endring i initialbetingelsene skal gi en liten endring i løsningen. Dessverre er det slik at differensialligninger normalt ikke har løsninger som er gitt ved formler, og derfor føyer vi til vår "ønskeliste" at man også skal ha en metode for å beregne en løsning. Problemet er ofte svært komplekst og krever hurtige datamaskiner for å bestemme en tilnærmet eller numerisk løsning. Løsninger på differensialligninger kan være svært kompliserte og det fins ingen enhetlig teori som innbefatter alle eller de fleste differensialligningene. Flesteparten av de interessante differensialligningene er ikke-lineære slik at summen av to løsninger ikke er en ny løsning, noe som ytterligere kompliserer situasjonen. Ulike klasser av differensialligninger krever ganske forskjellige metoder. Men selv på dette generelle nivået har Lax gitt to meget nyttige resultater som blir beskrevet i alle lærebøker på dette området. *Lax–Milgram teoremet* gir en betingelse som medfører at differensialligninger som kan beskrives ved et abstrakt variasjonsproblem, har en entydig løsning. *Lax' ekvivalensprinsipp* sier at om man har et velstilt lineært initialverdiproblem, vil enhver konsistent numerisk metode være stabil hvis og bare hvis den konvergerer. (Ekvivalensprinsippet kan f.eks. anvendes på varmeledningsligningen.)

[4]Vi kan gjøre det mer presist på følgende måte: Anta at du kjører fra posisjon $x(t)$ ved tiden t til posisjon $x(t+s)$ i løpet av et tidsintervall s. Da er hastigheten ved tid t tilnærmet $(x(t+s) - x(t))/s$ ("hastighet er avstand delt på tid"), og tilnærmingen blir bedre jo kortere intervall s du bruker. Matematisk er hastigheten ved tiden t lik grensen for $(x(t+s) - x(t))/s$ når s går mot null.

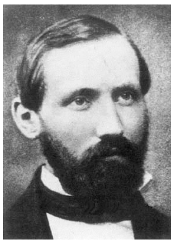
Det er passende her å kommentere samspillet mellom matematikk og datamaskiner. Peter Lax har alltid vært en sterk talsmann for at datamaskiner er viktige for matematikk og vice versa, og han har sagt at[5] "[Hurtige datamaskiners] innflytelse på matematikk, både ren og anvendt, kan sammenlignes med den rollen teleskoper har i astronomi og mikroskoper i biologi". Den logiske konstruksjonen til datamaskiner og deres operativsystem er matematisk i sin natur. Men datamaskiner virker også som laboratorier for matematikere. Her kan du teste idéene dine: Nye matematiske relasjoner kan oppdages, og dine hypoteser og antagelser kan bli motbevist eller gjort mer sannsynlige ved bruk av datamaskiner. Lax har selv gitt eksemplet med den store amerikanske matematikeren G. D. Birkhoff som brukte hele livet på å prøve å bevise ergodehypotesen. Hvis Birkhoff hadde hatt tilgang på en datamaskin og hadde testet hypotesen på denne, ville han innsett at hypotesen ikke kunne vært riktig generelt sett. På et mer teknisk nivå krever dessuten problemene innen moderne teknologi, som simulering av kompliserte systemer som fly, oljeplattformer eller værmeldinger, ikke bare kraftige datamaskiner, men også at det utvikles nye og bedre matematiske algoritmer for at de kan løses. Faktisk er det slik at utviklingen av hurtige datamaskiner (maskinvare) og utviklingen av nye numeriske teknikker (programvare) i store trekk bidrar like mye til den totale ytelsen vi observerer i simuleringer. Peter Lax har selv gitt gjennomgripende bidrag til utviklingen av nye matematiske metoder som har satt oss i stand til å forstå og simulere viktige fenomener.

4 Sjokkbølger

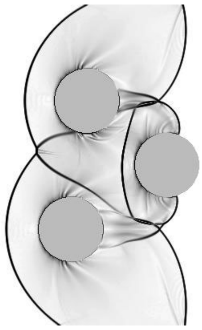
I 1859 betraktet den fremragende tyske matematikeren Berhard Riemann (1826–66) følgende problem: Dersom du har to gasser med ulikt trykk skilt av en membran i en sylinder, hva skjer om du fjerner membranen? Dette problemet er senere blitt kalt Riemann-problemet, og det viser seg å være svært komplisert. Gassers dynamikk blir beskrevet av Euler-ligningene, som kan skrives[6]

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x &= 0, \\ E_t + (v(E+P))_x &= 0, \\ P &= P(\rho), \end{aligned}$$

der p, v, P og E betegner henholdsvis gassens tetthet, hastighet, trykk og energi. Selv i dag er de generelle Euler-ligningene et uløst problem.



B. Riemann



Gasstrøm forbi tre sylindre.

Euler-ligningene er et spesialtilfelle av en klasse av differensialligninger som kalles hyperbolske konserveringslover. Løsningen av disse ligningene er svært komplisert, som figurene viser. Ligningene er svært fundamentale innen flere områder av naturvitenskap og teknologi, idet de uttrykker at en størrelse er bevart eller konservert. Dette gir opphav til mange anvendelser siden masse, moment og energi i følge fysikkens lover er bevart i isolerte systemer. I tillegg til gassers bevegelse inkluderer anvendelsene flyt av olje i oljereservoarer. Et mindre opplagt eksempel er trafikkflyt i rushtrafikk på en vei uten av- og tilkjørsel; her er den bevarte størrelsen antall biler.

Hovedproblemet med hyperbolske konserveringslover, uavhengig av om de beskriver trafikkflyt eller flyt av olje i et petroleumsreservoar, er at løsningen vil utvikle singulariteter, eller diskontinuiteter, kalt sjokk. Sjokk svarer til svært raske overganger i tetthet eller trykk. Numeriske metoder har problemer med å beregne slike sjokk, og de matematiske egenskapene er svært kompliserte. De matematiske modellene tillater mer enn én løsning, og seleksjonsprinsippet, som her kalles en entropibetingelse, for å velge ut den entydige fysiske løsningen, er vanskelig. På dette punktet gjorde Riemann en feil og valgte en ufysikalsk løsning ved implisitt å anta at entropien var bevart. Sjokkets hastighet ble bestemt av den skotske ingeniøren

[5] The flowering of applied mathematics in America, *SIAM Review* **31**(1989) 533–541.

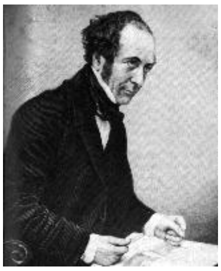
[6] Riemann betraktet det noe enklere problemet der man ser bort fra den tredje ligningen, den som gjelder energien. Senket skrift angir deriverte med hensyn på angitt variabel.

Rankine og den franske matematikeren Hugoniot, men det var Peter Lax som i 1957 foreslo et helt generelt og enkelt kriterium som kalles *Lax' entropibetingelse* for å velge den fysisk korrekte løsningen for generelle systemer av hyperbolske konserveringslover. De tillatte sjokkene kalles *Lax-sjokk*, og løsningen av Riemann-problemet er beskrevet i *Lax' teorem*, og det er fortsatt en hjørnestein i teorien for hyperbolske konserveringslover. Hans løsning har stimulert omfattende videre forskning på ulike entropibetingelser. Spesielt er Lax' teorem byggesteinen i løsningen av det generelle initialverdiproblemet som Glimm i 1965 konstruerte ved sin "random choice method". I 2000 viste Bressan, Liu og Yang ved bruk av frontfølgingsteknikken at løsningen som Glimm hadde konstruert, var entydig og stabil. Dermed er det såkalte Cauchy-problemet for systemer av hyperbolske konserveringslover *velstilt* i den presise betydningen gitt ovenfor.

Trykkfordelingen til en gass som eksploderer i en boks. Når man har bestemt et utvelgelsesprinsipp, må man fortsatt beregne løsningen. Her har Peter Lax introdusert to av standardteknikkene, eller "skjemaene", for å løse hyperbolske konserveringslover, nemlig det såkalte *Lax–Friedrichs skjemaet* og *Lax–Wendroff skjemaet*. Disse skjemaene er standardskjemaer for sammenligning med andre numeriske metoder. De har også vært utgangspunkt for teoretisk analyse. For eksempel ble Lax–Friedrichs skjemaet brukt av den russiske matematikeren Oleĭnik i hennes konstruktive bevis for å vise at det eksisterte løsninger av den ikke-viskøse Burgers-ligningen og at løsningene var entydige. Et annet svært nyttig resultat er *Lax–Wendroffs teorem* som sier følgende: Om et numerisk skjema for en ikke-lineær hyperbolsk konserveringslov konvergerer mot en grense, da vil grensen være en løsning av ligningen. Sammen med Glimm har Lax vist avanserte resultater for hvordan løsningen av systemer av hyperbolske konserveringslover oppfører seg når tiden blir stor.

Peter Lax' resultater innen teorien for hyperbolske konserveringslover er grunnleggende. De har løst gamle problemer og stimulert til omfattende videre forskning i feltet. Hans resultater er forsatt helt sentrale i denne delen av matematikken.

5 Solitoner



J. Scott Russell

Starten på studiene solitoner kan tidfestes til august 1834 da den skotske ingeniøren John Scott Russell (1808–82) gjorde følgende observasjon: Mens han red på sin hest langs en kanal nær Edinburgh, observerte han en lekter som ble trukket av hester. Idet lekteren stoppet, kom det en isolert bølge ut fra baugen av lekteren, og Scott Russell kunne følge denne bølgen som ikke endret form, i mer enn en kilometer. Mot all intuisjon beholdt bølgen sin form over lang tid. Scott Russell var fullstendig fascinert av fenomenet, som mange må ha observert før ham uten å innse viktigheten av fenomenet, og han studerte i flere år denne bølgen som han kalte "solitær bølge".

Hans observasjoner var kontroversielle, og flere fremstående vitenskapsmenn som Airy og Stokes tvilte på hans observasjoner. Da de nederlandske matematikerne Korteweg og de Vries i 1895 publiserte en modell for vannbølger som viste en slik oppførsel, var det imidlertid klart at fenomenet var reelt, om dog noe sært. Modellen de utledet, kalles nå Korteweg–de Vries-ligningen, eller KdV-ligningen. For å gjøre en lang historie kort ble KdV-ligningen glemt i lengre tid, og det var ikke før Zabusky og Kruskal i 1965 igjen fant den interessant, at den vakte ny interesse. I sin analyse fant de ved å benytte numeriske simuleringer at KdV-ligningen hadde løsninger som vekselvirket som partikler — de kunne kollidere uten å endre form. Zabusky og Kruskal kalte disse bølgene "solitoner" siden de hadde partikkel-lignende egenskaper som elektroner, protoner etc. (Se figuren med to solitoner.) Det var nå klart at ligningen hadde avansert struktur og et potensial for anvendelser på flere områder. I et epokegjørende arbeid fra 1967 oppdaget Gardner, Greene, Kruskal og Miura en oppsiktsvekkende metode, kalt inversspredningstransformen, for å løse KdV-ligningen. Metoden var imidlertid sterkt tilpasset KdV-ligningen og flere "mirakler" gjorde at metoden virket. Som en del av metoden studerte de en assosiert lineær ligning som hadde den egenskapen at flere viktige størrelser forble uforandret eller invariante etter som tiden endret seg. Den lineære ligningen er den (stasjonære)

Schrödinger-ligningen som beskriver ikke-relativistisk kvantemekanikk. Ligningen hadde vært studert av matematikere i lang tid, og er blitt utsatt for et nitid studium etter at sammenhengen med kvantemekanikk ble klar. De tidsinvariante størrelsene var assosiert med den tilhørende spredningsteorien[7]. Så kom Peter Lax. Han fokuserte på invariansen for det lineære problemet, og ga to lineære operatorer, som nå kalles *Lax-par*, som viste den indre mekanismen til inversspredningstransformen. Når Lax-paret tilfredsstiller *Lax-relasjonen*, er det ekvivalent med KdV-ligningen. La oss gjøre denne sammenhengen mer presis. KdV-ligningen er gitt ved

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

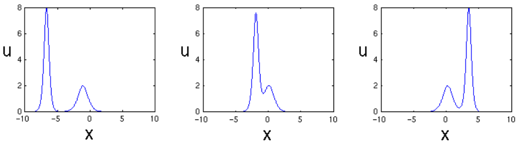
der u angir avstanden (skalert) fra bunnen til vannoverflaten i Scott Russells opprinnelige observasjon. Lax-paret L, P er gitt ved operatorene[8]

$$L = -\partial_x^2 + u, \quad P = -4\partial_x^3 + 3u\partial_x + 3u_x.$$

Tidsinvariansen i det lineære problemet sier at det fins en unitær operator $U = U(t)$ slik at $U^{-1}LU$ er tidsuavhengig, dvs. at den tidsderiverte er null. Om vi postulerer at U tilfredsstiller en førsteordens differensialligning $U_t = PU$ for en operator P, viser en kort utregning at

$$L_t - (PL - LP) = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad (1)$$

Vi kaller uttrykket $PL - LP$ for kommutatoren til P og L og vi skriver $PL - LP = [P, L]$ slik at Lax-relasjonen tar formen $L_t = [P, L]$. Her er det overraskende at høyresiden reduserer seg til en differensialligning, siden man på venstresiden har kompliserte differensialoperatorer som i utgangspunktet skulle tilsi at også høyresiden var en differensialoperator, dvs inneholdt en eller flere av operatoren ∂_x. Men den inneholder altså ikke en eneste differensialoperator. Lax viste samtidig at P ikke var den eneste operatoren som hadde den egenskapen. Tvertimot kunne han omhyggelig konstruere en uendelig følge av differensialoperatorer P_{2n+1} av odde orden (dvs den høyeste antall deriverte er et oddetall; for KdV-ligningene er ordenen 3) slik at $L_t = [P_{2n+1}, L]$ fortsatt var en differensialligning, og ikke en differensialoperator. Dette gav opphav til det såkalte *KdV-hierarkiet* som har vært utgangspunktet for en utrolig utvikling mellom teorien for differensialligninger, algebraisk geometri samt geometri og topologi. Idéen med Lax-par satte igang en omfattende jakt på Lax-par for andre ikke-lineære differensialligninger. Utfordringen var å finne differensialoperatorer P og L slik at $L_t - [P, L]$ var lik den gitte differensialligningen. Det fins ingen generell fremgangsmåte for dette, og man må lete i hvert enkelt tilfelle. Litt upresist kan man si at ligninger med egenskaper som ligner på KdV-ligningens egenskaper, kalles fullstendig integrerbare.



To solitoner illustrert ved tre ulike tidspunkt. Det store solitonet tar igjen det lille, og formen på begge forblir uendret.

Med denne inngående og overraskende innsikten var det klart at inversspredningstransformen ikke var begrenset til KdV-ligningen. Sammen med null-krumningsformuleringen ("zero curvature formulation") til Zakharov og Shabat ble det i løpet av kort tid slått fast at flere av de sentrale differensialligningene i matematisk fysikk var fullstendig integrerbare, f.eks. sine-Gordon ligningen, den ikke-lineære Schrödinger-ligningen, det massive Thirring-systemet, Boussinesq-ligningen, Kadomtsev–Petviashvili-ligningen og Toda-kjeden, for bare å nevne noen få.

De spesielle egenskapene til disse ligningene har hatt enorme konsekvenser innen flere områder av matematikk og fysikk i tillegg til flere områder av teknologi. Vi kan nevne et eksempel her. Man har eksperimentert med å bruke solitoner for høyhastighets kommunikasjon i optiske fibre. Det digitale signalet benytter "enere" og "nuller", og vi kan la "enerne" bli representert ved solitoner. En sentral egenskap ved solitoner er at de er usedvanlige stabile over lange avstander. Dette gir mulighet for betydelig større kapasitet for kommunikasjon i optiske fibre over lange avstander. Videre har soliton-teorien avdekket nye og ukjente sammenhenger mellom forskjellige deler av matematikken.

[7] Et advarende ord her: Tidsvariablen det snakkes om, er *ikke* tiden i det tilhørende kvantemekaniske problem. Det er er mer korrekt å si at vi studerer Schrödinger-ligningen der potensialet er parametrisert ved en ekstra variabel som viser seg å være tidsvariablen i et annet problem.

[8] L og P er operatorer, dvs. at de er funksjoner hvis argumenter også er funksjoner. Operatoren ∂_x^n angir den n-te deriverte av en funksjon med hensyn på variablen x.

En moderne gjenskaping av en solitær bølge.

Etterord. Lax anser seg selv som både ren og anvendt matematiker. Hans råd til unge matematikere er følgende:[9] “Jeg anbefaler alle yngre matematikere å prøve sine evner i anvendt matematikk. Den er en gullgruve av avanserte problemer hvis løsning krever begrepsmessige så vel som teknologiske gjennombrudd. Den viser en enorm variasjon som gir noe for enhver smak, og gir matematikere mulighet til å delta i en større vitenskapelig og teknologisk aktivitet. God jakt!”

Takk til: Portrettene av Riemann og Scott Russell er fra The MacTutor History of Mathematics Archive. Bildet av et soliton er fra The Solitons Home Page. Simuleringene er laget av K.-A. Lie (SINTEF) og X. Raynaud (NTNU).

References

[1] The Wolf Prize to P. D. Lax. In: *The Wolf Prize in Mathematics. Volume 2.* (Eds. S. S. Chern, F. Hirzebruch) World Scientific, Singapore, 2001, p. 219–262.

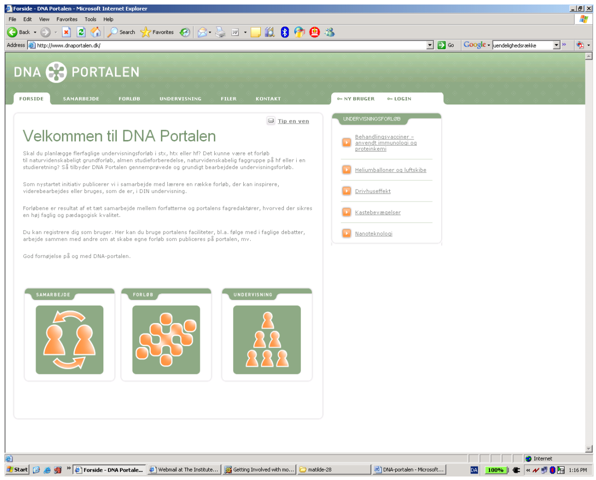
[2] P. D. Lax. In: *More Mathematical People.* (Eds. D. J. Albers, G. L. Alexanderson, and C. Reid) Hartcourt Brace Jovanovich Publishers, Boston, 1990, p. 139–158.

[3] P. D. Lax. *Selected Papers. Volume I and II.* (Eds. A. J. Majda and P. Sarnak) Springer, New York, 2005.

[4] H. Holden. Matematikkens bidrag til Olje-Norge. Kronikk, *Aftenposten*, 24. mai 2005.

[5] M. Raussen og C. Skau. Intervju med Peter D. Lax. *Infomat*, august–september 2005. URL: `www.matematikkforeningen.no/infomat/`, og *Newsletter of the European Mathematical Society*, september 2005. (Intervjuet ble også vist på NRK1 den 24.9.05.)

(Denne artikel er tidligere trykt i NORMAT)



DNA-portalen

http://www.dnaportalen.dk/
er et nyt naturvidenskabeligt undervisningsinitiativ.

Her er nogle uddrag fra hjemmesiden:

Skal du planlægge flerfaglige undervisningsforløb i stx, htx eller hf? Det kunne være et forløb til naturvidenskabeligt grundforløb, almen studieforberedelse, naturvidenskabelig faggruppe på hf eller i en studieretning? Så tilbyder DNA Portalen gennemprøvede og grundigt bearbejdede undervisningsforløb.

Som nystartet initiativ publicerer vi i samarbejde med lærere en række forløb, der kan inspirere, viderebearbejdes eller bruges, som de er, i DIN undervisning.

Forløbene er resultat af et tæt samarbejde mellem forfatterne og portalens fagredaktører, hvorved der sikres en høj faglig og pædagogisk kvalitet.

Du kan registrere dig som bruger. Her kan du bruge portalens faciliteter, bl.a. følge med i faglige debatter, arbejde sammen med andre om at skabe egne forløb som publiceres på portalen, mv.

DNA ønsker at støtte og udvikle undervisningen i naturvidenskab og matematik på de gymnasiale uddannelser. Foruden at stille egnede undervisningsmaterialer til rådighed for lærere ønsker vi at portalen bliver en platform for udbredelsen af diskussion om, hvordan den “gode” naturfagsundervisning tilrettelægges. Vi vil publicere eller have links til relevante artikler, og vi modtager meget gerne bidrag fra lærere om emnet. Af aktuelle emner kan nævnes:

- Naturvidenskab og almendannelse
- Begrebsdannelse og kompetencer i naturfagene
- Eksperimenters rolle i undervisningen
- Samarbejde med universiteter, virksomheder mv
- Naturvidenskab og den “gode” historie

[9] The flowering of applied mathematics in America, *SIAM Review* **31**(1989) 533–541.

Uddannelsesfronten

ved Carl Winsløw

Forskning, undervisning – og "akademisk praksis"

Universiteterne var indtil det 19. århundrede hovedsageligt undervisningsanstalter, i Danmark med produktionen af lutherske præster som den dominerende opgave. Forskning – herunder naturvidenskabelig og matematisk – blev hovedsageligt bedrevet af liebhavere med formue eller mæcener. I dag er forskningen blevet den centrale del af universiteternes selvforståelse – og den er ligefrem blevet definerende for undervisningen, via betegnelser som "forskningsbaseret". Bortset fra, at denne historiske udvikling i sig selv er interessant (se fx [1]), så er der også i de senere år blevet stillet spørgsmålstegn ved, hvad dette med "forskningsbasering" nu egentlig betyder. Hvad er det forskningen tilfører undervisningen – og hvad kunne det være? Specielt i matematik?

I den universitetspædagogiske forskning undersøges spørgsmålet på "institutionsniveau" og uafhængigt af fag (modsat hvad der er tilfældet i fagdidaktik). Der er oplagte politiske interesser i at betragte spørgsmålet på dette generalitetsniveau, ligesom en almen begrebsafklaring kan være af interesse for universiteterne selv (fx når der skal opstilles mål for institutionernes virksomhed). Den universitetspædagogiske litteratur om emnet er enorm. Man finder her talrige og omfattende kvantitative undersøgelser af den mulige korrelation mellem kvalitet i undervisning og forskning; en slags overordnet tendens synes at være, at en sådan ikke kan påvises på institutionsniveau (se fx [2]). Det er måske ikke så overraskende, at en nulforskers undervisning ikke påvirkes synderligt af at vedkommende er ansat på en institution som har et stort forskningsoutput. Og det er da også mere interessant at stille spørgsmålet på et mere lokalt niveau: hvordan kan undervisning og forskning befrugte hinanden for den enkelte universitetslærer eller forskergruppe?

Stadig på det "faguafhængige" niveau, opstiller Per Fibæk Laursen [3] flg. principielle muligheder for at karakterisere forskningsbaseret undervisning:

(1) Undervisningens indhold består af forskningsresultater.
(2) Undervisningen er tilknyttet et forskningsmiljø i den forstand, at der forskes i samme faglige og institutionelle miljø.
(3) Læreren er aktiv forsker i det fagområde, han underviser i, og sørger for at lade forskningen befrugte sin undervisning.
(4) De studerende lærer at arbejde forskningsmæssigt gennem samarbejde med praktiserende forskere.

Den gængse, operationelle forståelse af "forskningsbaseret undervisning" er en reduktion (og variant) af (3), nemlig: "Læreren er ansat som forsker i det fagområde, han underviser i". Som vi allerede har antydet, er det næppe en tilfredsstillende definition, hvis den skal have påviselige konsekvenser for undervisningen. Mulighed (1) og (2) er vel nødvendige, men ikke tilstrækkelige betingelser – (1) kan jo gælde om undervisning på alle niveauer, og (2) siger, som allerede nævnt, ikke i sig selv noget signifikant om undervisningen. Meningen med de fire punkter er da også, at de *tilsammen* udgør en præcisering af begrebet "forskningsbasering", og kan gælde i variabel grad.

For matematiks vedkommende vil man – især på indledende niveauer – ofte fokusere på (1) og (4) i flg. forstand: undervisningens *indhold* er organiseret sådan, at den studerende nærmer sig aktuelle forskningsemner, og de studerende lærer samtidig at arbejde med *metoder*, der minder om forskerens, fx i forhold til at undersøge hypoteser og konstruere beviser. Det første er i og for sig ikke noget der forudsætter at underviseren er forsker – vejen frem til forskningsfronten er lang i matematik, og den forlænges måske også af andre fags behov og af andre hensyn og traditioner for, hvad "enhver matematiker skal vide". Ideen om, at den studerende "arbejder forskningsmæssigt" med matematik kan derimod udvikles betydeligt, både teoretisk og praktisk – også på basis af mere elementært indhold, som fx i det franske projekt *Math en Jeans* (se fx [4] og [5]). I en del sammenhænge har man erkendt betydningen af et sådant arbejde, men reserveret det til særlige kurser og projektenheder. Der er dog også danske forsøg på at iværksætte mere eller mindre "moderate" versioner af forskningslignende studenterarbejde i sædvanlige kurser (se fx [6] og [7]).

Integrationen af "forskningsrelevant indhold og metode" er efter min mening den mest fremadrettede og substantielle retning, matematikere kan arbejde med forskningsbaseret undervisning på – vel vidende, at afstanden mellem førsteårsmatematik og forskningsfront godt kan synes stor. Faktisk peger L. Burton i en interessant nyere undersøgelse af matematikeres forskningsprocesser [8, s. 198] på, at der er en "monstruøs" afstand mellem disse og så de arbejdsprocesser, som matematikundervisningen normalt igangsætter hos elever og studerende.

fors. s. 34

MatematikerNyt

ved Mikael Rørdam

Steen Thorbjørnsen er pr. 1. august 2006 ansat som lektor ved Institut for Matematiske Fag på Århus Universitet.

Steen er uddannet cand. scient. i matematik og statistik fra Københavns Universitet (1994) og Ph.D. i matematik fra Syddansk Universitet (1998). Efter diverse postdoc stillinger blev han i 2003 ansat som lektor ved Syddansk Universitet.

Steens forskningsområde er fri sandsynlighedsteori, som ligger i grænseområdet mellem operatoralgebra og klassisk sandsynlighedsteori. Han har specielt arbejdet med stokastiske matricer og deres anvendelser i operatoralgebra samt med sammenhængen mellem uendeligt delbare sandsynlighedsmål i hhv. klassisk og fri sandsynlighedsteori.

Fritiden tilbringes primært sammen med familien men også på racercyklen eller i løbeskoene.

Johnny T. Ottesen er pr. 1. juli 2006 ansat som professor i matematik og matematisk modellering ved IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Johnny er cand. scient. i matematik og fysik fra Københavns Universitet (1986) og Ph.D. i matematik fra Roskilde Universitetscenter (1992), hvor han blev adjunkt (1993) og senere lektor (1998). Johnny har i perioder været gæsteforsker ved UCSB, USA, og RIMS, Japan. Hans forskning omhandlede i starten primært matematisk fysik og er senere drejet over i matematisk fysiologi; herunder opstilling og analyse af modeller som typisk involverer ikke-lineære ordinære differentialligninger med og uden tidsforsinkelse og ikke-lineære partielle differentialligninger, ligesom parameterestimering og modelvalidering også er centralt placeret. Desforuden har han bidraget til videnskabsteoretisk og historisk forskning indenfor matematisk modellering og modelleringsprocesser samt forsket i brugen af matematiske modeller i undervisning og forskning.

Anders Juel Frankild er pr. 1. januar 2006 ansat som FNU finansieret Steno stipendiat ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Anders fik sin Ph.D.-grad i 2002 ved Københavns Universitet under vejledning af Hans-Bjørn Foxby. Efterfølgende finansierede Lundbeck Fonden og Augustinus Fonden en treårig postdoc stilling, hvor Anders havde base ved Københavns Universitet. I foråret 2003 opholdt Anders sig ved MSRI, Berkeley, USA i forbindelse med deres "Program in Commutative Algebra".
Anders arbejder fortrinsvist med ringteori og såkaldt "Brave New Commutative Algebra". Han er særligt interesseret i homologisk- og homotopisk-algebra og disse emners samspil med algebraisk topologi.

Anders dykker, har sejlet i den hjemmelavede ubåd Kraka, og er afhængig af al sport, der involverer høj fart.

---

forts. fra s. 33

Referencer.

[1] L. Cuban: *How scholars trumped teachers: change without reform in university curriculum, research and teaching, 1890-1990*. New York: Teachers College Press (1999).

[2] J. Hattie og H. W.Marsh: The relationship between teaching and research†: a meta-analysis. *Review of Educational Research* 66 (1996), 507-544.

[3] P. Fibæk Laursen: Hvad er forskningsbaseret undervisning? *Uddannelse* 8 (1996).

[4] http://www.math.u-psud.fr/~joly/Anglais/math-enjeans.html

[5] D. Grenier og K. Godot: Research situations for teaching: a modelling proposal and example. Artikel præsenteret ved ICME 10 (2004). http://www.icme-organisers.dk/tsg14/TSG14-02.pdf

[6] T. Vils Pedersen: A didactic situation: eigenvalues and -vectors discovered through mathematical experiments. *Proceedings of the ICTM3* (2006, u. udg.), http://www.dina.kvl.dk/~vils/ICTM3-paper.pdf.

[7] N. Grønbæk og C. Winsløw, Thematic projects: a format to further and assess advanced student work in undergraduate mathematics. Artikel under referering. http://www.cnd.ku.dk/winslow/NGCWII.pdf

[8] L. Burton: *Mathematicians as enquirers: learning about learning mathematics.* Kluwer (2004).

Nathalie Wahl er pr 1. juli 2006 ansat som lektor og FNU finansieret Steno stipendiat ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Nathalie fik sin 'Licence' i Matematik fra Université Libre de Bruxelles i 1998 og sin Ph.D. fra Oxford i 2001. Ansættelser har derefter bragt hende til Northwestern University, Aarhus Universitet og til University of Chicago. Hun forsker i topologi med en særlig interesse for afbildningsklassegrupper.

Nathalie maler i sin fritid. Hun nyder også at tage på cykelture rundt omkring i det danske landskab.

Martin Svensson er pr. 1. juli 2006 ansat som lektor ved Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet.

Martin kommer oprindelig fra Helsingborg i Sverige. Han fik sin Ph.D. grad i 2004 ved Lunds Universitet under vejledning af Dr. S. Gudmundsson. I det følgende år arbejdede Martin som lektor i matematik i Lund, hvorefter han optog en position som Research Fellow ved University of Leeds, England.

Han arbejder med differentialgeometri, især harmoniske afbildninger mellem Riemannske mangfoldigheder. Disse er løsninger til særlige ikke-lineære partielle differentialligninger der opstår naturligt i for eksempel partikelfysik. Martin er i særdeleshed interesseret i såkaldte harmoniske morfier, en klasse af harmoniske afbildninger.

Når han ikke arbejder, læser Martin gerne bøger eller jogger i Odenses parker. Han spiller også meget gerne badminton, ofte sammen med sin kone Lorna.

Jesper Grodal er med tiltrædelse d. 1. juli 2006 ansat som professor ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet finansieret af FNU gennem et 4-årigt Rømer stipendium. Han har tilmed netop vundet et af de meget eftertragtede EURYI stipendier (European Young Investigator Award) fra det Europæiske Forskningsråd. Han modtager herfra ca. 9 millioner kroner til forskningsudgifter og egen løn i 5 år.

Jesper er uddannet cand. scient. i Matematik og Fysik fra Københavns Universitet (1997) og Ph.D. i Matematik fra Massachusetts Institute of Technology (2000). Efter et år i Princeton og Paris tog Jesper til University of Chicago, hvor han har været ansat de sidste 5 år, først som Instructor og derefter som Assistant Professor. Hans forskning er indenfor algebraisk topologi. Specielt har samspillet mellem homotopiteori og gruppe- og repræsentationsteori hans interesse.

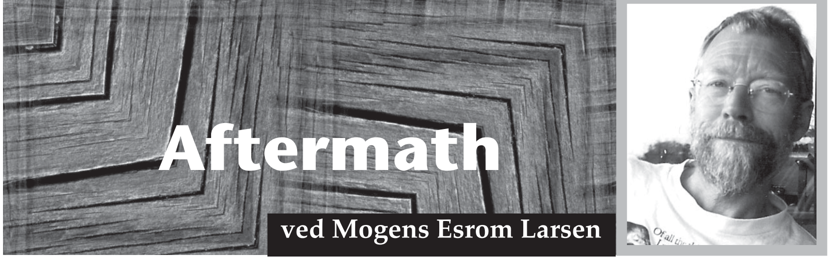
I sin fritid holder Jesper bl.a. af at løbe, rejse, windsurfe, og snowboarde.

Han prøver, ofte forgæves, at tale fransk med Nathalie Wahl.

Tobias Colding er udnævnt til adjungeret professor ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.

Tobias fik sin Bacheloruddannelse fra Københavns Universitet, og blev Ph.D. fra University of Pennsylvainia i 1992 med afhandlingen "A.D. Alexandrov spaces in Riemannian Geometry". Han har siden været Courant Instructor 1992-93 og 1994-95, MSRI postdoc 1993-94, assistant professor ved NYU 1995-96, associate professor samme sted 1996-99 og fra 1999 full professor på NYU. Han har desuden været visiting professor ved MIT i 2000-01, visiting professor ved Princeton University i 2001-02 og siden 2005 full professor ved MIT. Han har også siden 2001 været tilknyttet SNS (Scuola Normale Superoirie) i Pisa i Italien.

Han har speciale i geometrisk analyse, differential geometri, og partielle differentialligninger. Vigtigste arbejder drejer sig om Ricci krumning, minimal flader, harmoniske afbildninger og geometriske evolutionsligninger. Han er redaktør for 11 videnskabelige tidsskrifter, bl.a. Annals of Mathematics.



LØSNINGER

Flere opgaver er løst af problemgruppen ”Con Amore” (CA) og af Ebbe Thue Poulsen, (ETP).

Vejerboden

Opgaven er løst af ETP.

Givet 14 kugler, hvoraf de 13 vejer nøjagtig 10 g. Desuden har vi et 10 gramslod. Til hjælp har man en almindelig skålvægt med to skåle. Vi skal afsløre den aparte kugle i højst 3 vejninger, men det er ikke krævet, at vi finder ud af, om den er lettere eller tungere end de andre.

Lad os kalde kuglerne 1–14. Vi vejer nu 1–5 mod 6–9 + loddet. Hvis der er ligevægt, så er den aparte blandt 10–14. Vi vejer så 10–11 mod 12+loddet. Er der ligevægt, vejer vi 13 mod loddet.

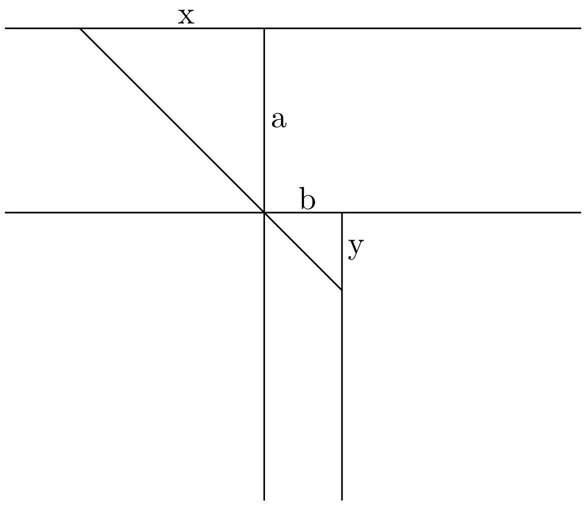
Hvis 10–11 mod 12 + loddet giver udslag, vejer vi 10 mod 11. Hvis nu 10 går ned og 11 op, ser vi på, om 10 + 11 gik op. I så fald er den aparte 11, ellers er det 10.

Hvis derimod 1–5 gik op og 6–9 + loddet ned, så vejes 1, 2, 6, 7 mod 3, 8, 10, 11. Går nu 1, 2, 6, 7 atter op, så er enten 8 tungere eller 1 eller 2 lettere. Derfor vejes 1 mod 2. Går derimod 1, 2, 6, 7 ned, så er enten 3 lettere eller 6 eller 7 tungere. Det afgøres med 6 og 7 på hver sin skål.

Er endelig 1, 2, 6, 7 i ligevægt med 3, 8, 10, 11, så er den aparte jo en af 4, 5, der er lettere eller 9, der er tungere. Det afgøres af 4 mod 5.

En rørende historie

Opgaven er løst af ETP.



Et vandrør er a=6,4 cm i diameter, og midt på røret er der et T–rør, så siderøret er b=2,7 cm i diameter. Siderøret sidder altså nøjagtig vinkelret på hovedrøret.

Nu løber vandet i en strøm gennem hovedrøret, og en del af vandet løber ud ad siderøret. Man har nu tilsat nogle mikadopinde til vandet, og det er meningen, at de ikke må løbe ud ad siderøret.

Hvad er den kritiske grænseværdi for mikadopindene?

12,5 cm. Når en pind drejer om hjørnet, kan vi jo forlænge den til røring med de to rør. Den forlængede pind har et eller andet sted en minimumslængde, som netop er 12,5 cm.

Hvis hovedrøret har bredden a og birøret bredden b, og ved en stilling af pinden rammer dens forlængelse hovedrøret i afstanden x fra birøret og birøret i afstanden y fra hovedrøret. Så gælder ifølge Pythagoras, at længden af den forlængede pind er

$$\sqrt{(a+y)^2+(b+x)^2}$$

Samtidig fås af de to ensvinklede trekanter med siderne a, x hhv. y, b, at

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{y}$$

eller bedre

$$xy=ab$$

Minimum under bibetingelse opnås, når rangen af matricen af partielle afledede er mindre end maksimal, her 2, altså når rangen af matricen

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 2(b+x) & 2(a+y) \end{pmatrix}$$

er 1, dvs, når

$$\frac{b+x}{y}=\frac{a+y}{x}$$

eller

$$bx+x^2=ay+y^2$$

Når vi ganger med x^2 og bruger ligningen $xy = ab$, står der

$$x^4+bx^3=a^2bx+a^2b^2=a^2b(x+b)$$

hvoraf

$$x^3=a^2b$$

og straks

$$y^3=ab^2$$

Den kritiske længde bliver herefter

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

Ternet papir

Opgaven er løst af CA og ETP.

Forleden dag sad jeg og slog krusseduller på et almindeligt ark ternet papir. Så kom jeg for skade at lege med gitterpunkterne. Jeg valgte 5 af dem tilfældigt ud.

Så tegnede jeg alle 10 forbindelseslinier mellem dem. Og hver gang var der et af liniestykkerne, der passerede hen over et gitterpunkt.

Er det altid tilfældet?

Vi giver gitterpunkterne koordinater, der så altid bliver hele tal. Når vi vælger 5 gitterpunkter, så må der mindst være 2 af dem, hvis koordinater begge har samme paritet (lige–ulige). Men så vil midtpunktet af liniestykket, der forbinder de to, være et gitterpunkt.

Æventyret

Der var engang en prins, der skulle vælge sig en prinsesse. Han havde valget mellem tre søstre, som alle var unge og smukke. Deres far var en viis gammel konge, og han ville sikre sig, at hans kommende svigersøn havde omløb i hovedet. Så han sagde til prinsen:

"Før du får min velsignelse til at ægte en af mine døtre, vil jeg sætte dit mod og din intelligens på en prøve.

Du får lov til at stille én af prinsesserne ét spørgsmål, som kan besvares med "ja" eller "nej". Den ene vil svare sandfærdigt, den anden vil svare falsk, og den tredje, som er min yndlingsdatter, kan svare sandfærdigt eller falsk, som hun vil. Hun har alligevel aldrig rettet sig efter mig.

Ud fra svaret på dit spørgsmål skal du vælge din brud. Men jeg advarer dig: Hvis du vælger min yndlingsdatter, skal du have dit hoved hugget af!"

Hvordan mon prinsen formulerede sit spørgsmål?

Vi kalder prinsesserne "S" for sand, "F" for falsk og "Y" for "yndling". Prinsen kalder dem A, B og C, men ved ikke, hvem der er hvem. Nu spørger han A: "Er B mere tilbøjelig til at svare falsk end C?"

Nu kan han få to svar, og for hvert svar kan A være hver af de tre prinsesser. Det giver følgende muligheder:

	"ja"			"nej"		
A	S	F	Y	S	F	Y
B	F	S	F,S	Y	Y	?
C	Y	Y	?	F	S	S,F

Hvis altså A svarer "ja", kan prinsen vælge B, og svarer A "nej", kan prinsen vælge C.

En talgåde

Opgaven er løst af CA og ETP.

Hvad er det mindste tal, der indeholder alle 10 cifre fra 0 til 9, skrevet i 10–talsystemet, og som er deleligt med 11?

$$1024375869$$

Thi, summen af de 10 cifre er 45. Vi skal dele denne sum i to tal, hvis differens er delelig med 11. Samtidig skal hvert af tallene skrives som sum af 5 cifre. Da summen af de 5 mindste er 10, kan vi ikke dele i 39 og 6. Vi må derfor dele i 28 og 17. Og da summen af de tre største er 24, må summen af de to mindste i bidraget til 28 være mindst 4. Så de kan ikke være 0 og 3, men må mindst være 0 og 4. Vi har altså højst chancen for at begynde vort tal med

$$1024\ldots$$

Men det er der heller intet til hinder for. De tre sidste af 28 bliver så 7, 8 og 9 og hele løsningen er tallet ovenfor.

NYE OPGAVER

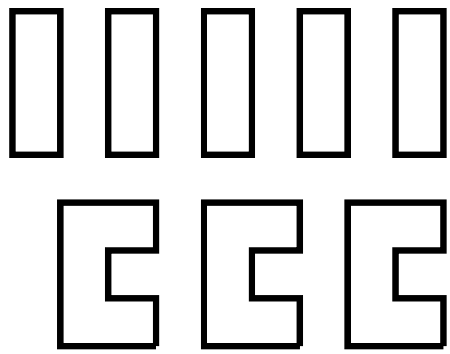
Fra børnehaven 1

Lille Peter Dummkopf sidder og leger med sine klodser. Han har 9 klodser, og på dem står tallene fra 1 til 9. Stiller han nogle af dem på række, danner de jo et tal. Nogle af tallene er primtal.

Hvad er det største primtal, han kan få frem på denne måde?

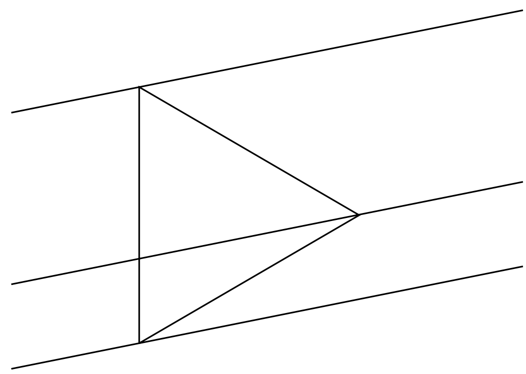
Fra børnehaven 2

Lille Peter sidder med sine puslebrikke, han har 3 u-formede og 5 i-formede:



Han prøver nu på, om han kan dække de 3 U-er med de 5 I-er uden at lade de ens brikker lappe over hinanden. Vil det lykkes for ham?

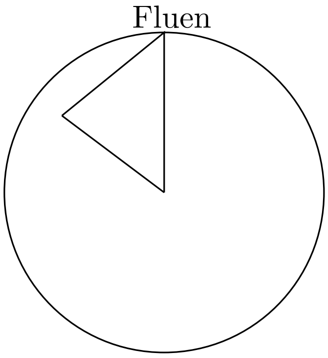
Et trekantet problem



Der er givet tre parallelle linier. Man skal så i al sin enkelhed konstruere en ligesidet trekant, der har et hjørne på hver af de tre parallelle linier.

Fluen i flasken

På bunden af en flaske ligger en tændstik, der er 4 cm lang. Den ligger sådan, at svovlet netop er i centrum af flaskens bund, som for resten er 10 cm i diameter.



Nu går der en flue rundt på flasken langs kanten. Fluen ser med 1000 øjne på tændstikken, og den bemærker, at nogle steder fra syner tændstikken længere end andre steder fra. Der er endda to steder, hvorfra tændstikken nærmest ligner et punkt.

Når fluen befinder sig der, hvorfra tændstikken syner størst, hvor langt er fluen så fra tændstikkens anden ende end svovlenden?

Skovturen

Arrangøren af institutskovturen, Jörg Trinkwasser, var fanatisk afholdsmand. Han ville derfor forsøge at lokke deltagerne til at miste chancen for en snaps til frokosten. Han foreslog derfor følgende julileg:

Han stillede 50 lukkede kasser på række, og i hver kasse lagde han navnet på en af de 50 deltagere, så hvert navn lå i en og kun en kasse. Nu foreslog han deltagerne at gå ind til kasserne en ad gangen og åbne 25 kasser. Hvis nu det lykkedes for samtlige deltager at finde sit eget navn i en af de åbnede kasser, så skulle der serveres snaps til frokost.

Deltagerne drøftede om det ikke var lidt for chanceløst. Hvis hver deltager valgte 25 tilfældigt ud, så var chancen for en snaps jo $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, et ikke så stor tal igen. Den snapseglade Jeppe Borwein mente, at man kunne forøge chancen lidt. Man måtte jo sikre sig, at alle kasser blev åbnet. Var der f. eks. 2 deltagere, var deres bedste strategi jo at aftale at åbne hver sin kasse.

Er der et godt forslag til de snapseglade?

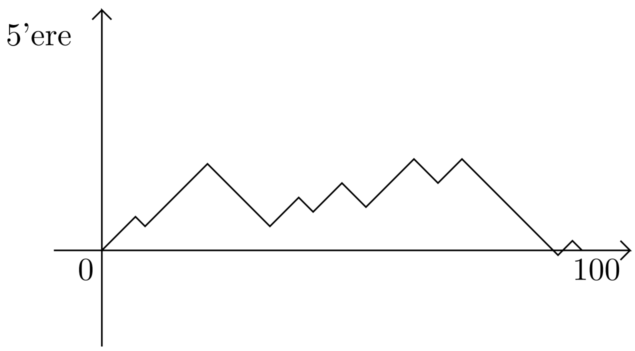
De glemte byttepenge

Der var udsalg hos den lokale matematiker. Man kunne købe 100 formler for 5 kr. stykket, så det var ikke underligt, at ved udsalgets start kl. 7 om morgenen var der allerede en kø på 100 begejstrede amatører.

I sin distraktion havde matematikeren glemt at få byttepengene med, men det kunne måske lade sig gøre at få solgt de 100 formler alligevel. Faktisk havde 50 af personerne i køen lige penge, mens de øvrige 50 kun havde en 10 krone. Så hvis vi var så heldige, at de 50 med femmerne stod forrest, så kunne det jo sagtens gå.

Selvfølgelig kunne man også tænke sig, at folk snakkede sammen og så videre. Men egentlig kunne matematikeren ikke lide at indrømme, at han ikke havde husket byttepengene.

Problemet er, hvor stor er sandsynligheden for, at ingen opdager, at der mangler byttepenge? Altså, hvad er sandsynligheden for, at for hver 10–er i køen er der en 5–er, der kommer før 10–eren til kassen?

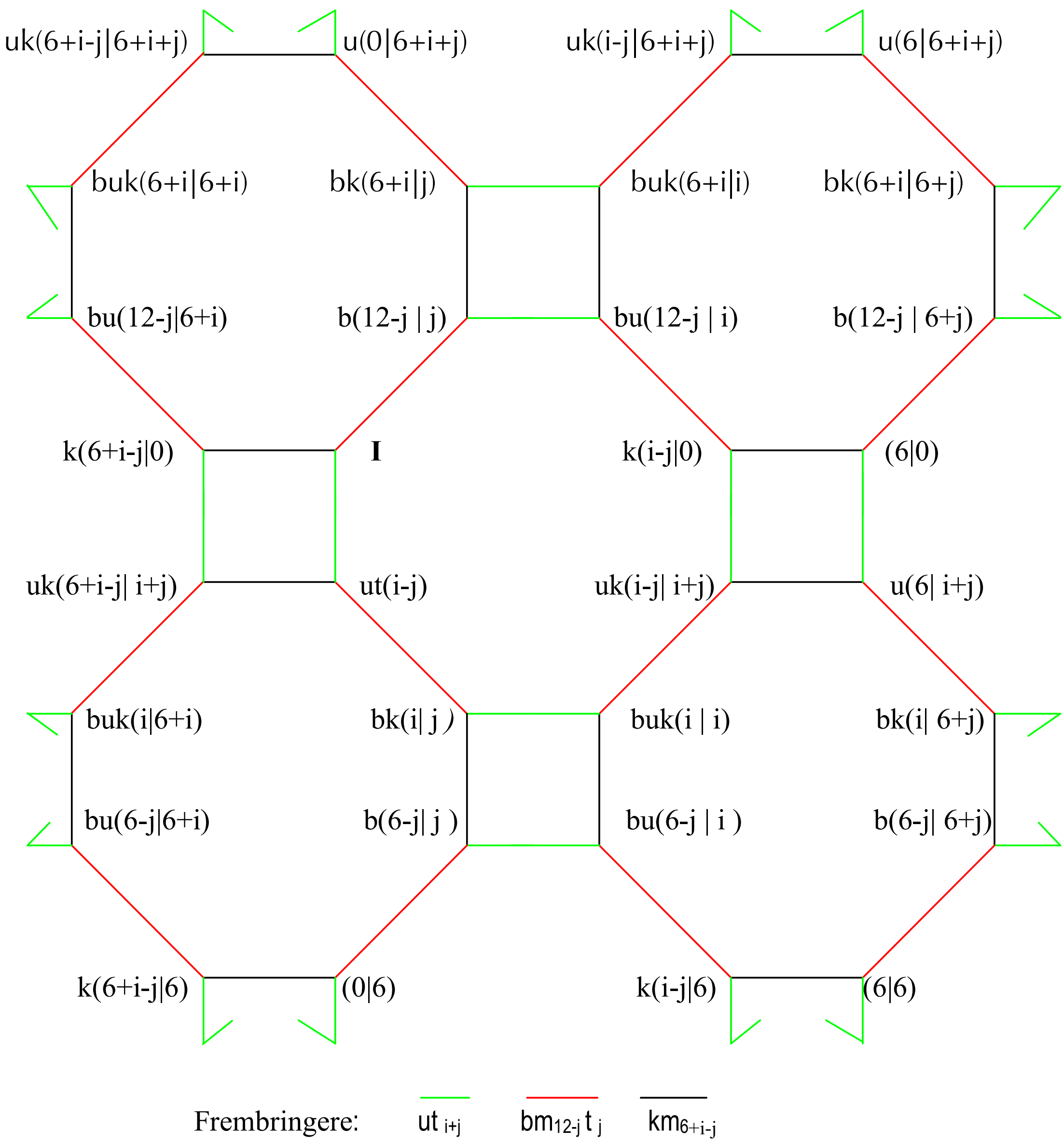


Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:

Matilde
Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet
Ny Munkegade Bygning 1530
8000 Århus C

POST B

PP DANMARK



Graf af den dodekafone operatorgruppe $\mathcal{P}_2^{i,j}$ af orden 32 nævnt sidst i artiklen af Brask og Olsson. Af praktiske grunde er transrotatoren $m_p t_q$ noteret som $(p|q)$. For eksempel er $bm_{6-j}t_j$ skrevet $b(6-j|j)$. Nettet bør egentlig ligge på overfladen af en torus, hvor de afbrudte grønne linjer er forbundet. For eksempel skal den grønne linje fra ut_{6+i+j} øverst i tegningen føre til t_6 forneden.