

mat

M A T I L D E

TEMA:

Matematik i Norden: Norge



NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR.

26

APRIL

2006



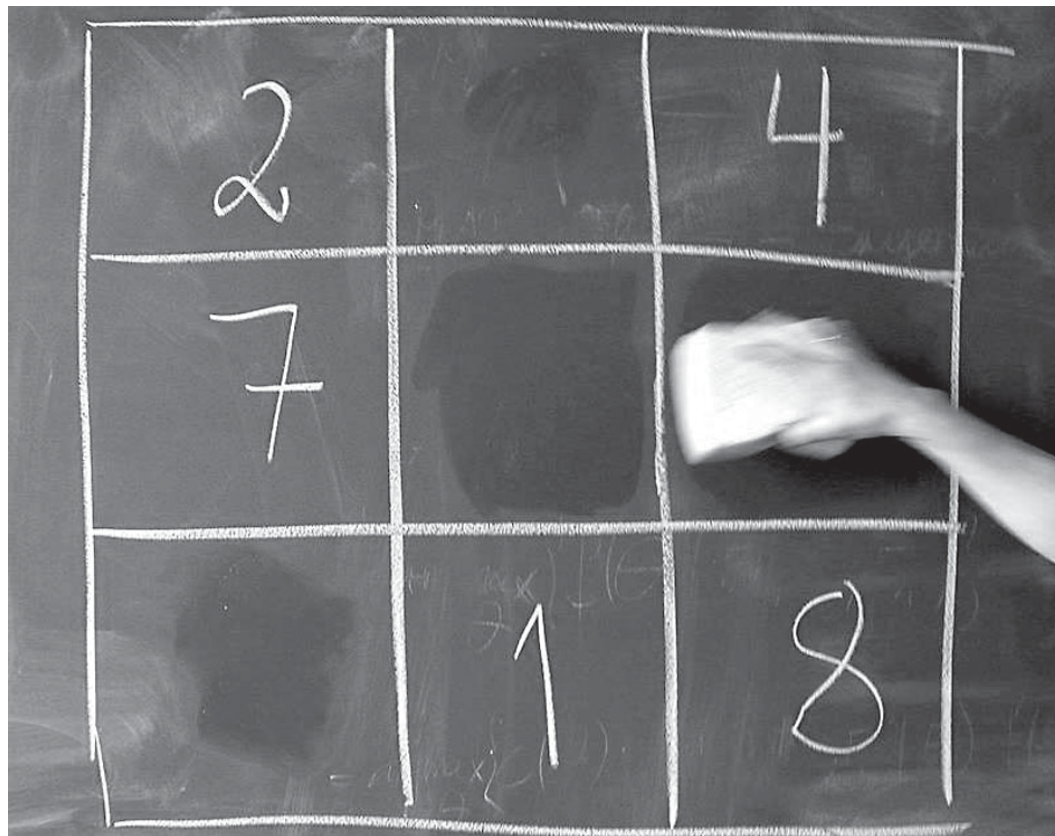
Leder

Dette nummer af Matilde har som tema, Matematik i Norden: Norge. Der er ganske rigtigt, som belyst i artiklen af Nils A. Baas, tale om stolte traditioner; Norge har fostret adskillige matematiske berømtheder, og nogle af disse havde endda særdeles berømte slægtninge; Peter Wessel Tordenskjold var onkel og Johan Hermann Wessel bror til landmåleren/matematikeren Caspar Wessel, der var den første (1797) til at udvikle ideen om den komplekse plan; og den samme Caspar Wessel blev i øvrigt kaldet til at foretage geografisk opmåling og udarbejdelse af kort over Danmark - på samme tid som C. F.

Gauss foretog trianguleringer i Nordtyskland bl. a. med det formål at skabe kontakt til de danske kort.

Den vel nok mest iøjnefaldende nyskabelse i norsk matematik er Abelprisen, som tidligere har været omtalt i Matilde, bl. a. ved interviews med vindere af prisen. Denne gang bringer vi en fyldigere omtale, ligesom Niels Henrik Abel præsenteres; Abelprisen har skabt en del opmærksomhed om matematik, både i medierne og således vel også i den almindelige bevidsthed; man kan da også i debatten i Norge se, at man er opmærksom på problemet med at uddanne nok (og dygtige nok) matematikere til at løse generationsproblemet, og at faget anses for at være vigtigt i den udfordring det er at sikre landets videre fremgang osv.

Som det ses af Bjørn Dundas' oversigt over matematiske institutioner i Norge, er der tale om et rigt miljø; på forskningsfronten er landet stærkt repræsenteret i områderne algebra, topologi, partielle differentialligninger, funktionalanalyse, algebraisk geometri mm. og mange steder har man satset på forskning og udvikling i matematikens og naturvidenskabernes didaktik.



Vi bringer en artikel af Helge Holden om Abelprisen, dens baggrund og perspektiver, og et interview ved Martin Raussen og Christian Skau med Peter Lax, prismodtager i 2005; desuden findes i dette nummer artikler af Nils A. Baas om de mest kendte norske matematikere fra Caspar Wessel til Atle Selberg, med særlig vægt på Abel jævnfør Abelprisen. Af Bjørn Dundas bringer vi en artikel om topologi, introduceret alment forståeligt (og i øvrigt med links til spændende ting på nettet som f. eks. skak på torus eller labyrinter på Kleins flaske - prøv selv).

Næste nummer af Matilde vil som tema have Musik og Matematik, og allerede i nærværende nummer varmes op med (første del af) en artikel af Eystein Raude, der har arbejdet med tonernes og mere generelt musikkens matematiske baggrunde. Som Gottfried Wilhelm Leibniz sagde: Geometri er studiet af rummet og aritmetik er studiet af tiden; og glæden ved musik er glæden ved ubevidst at tælle. Endnu et aspekt ved Danish Music Awards.

**Matilde – Nyhedsbrev for
Dansk Matematisk Forening
medlem af European Mathema-
tical Society**

Nummer 26 – April 2006

Redaktion:

**Bent Ørsted, Aau
(ansvarshavende)**

**Bent Ørsted
(TEMAREDAKTØR)**

**Carsten Lunde Petersen, Ruc
Jørn Børling Olsson, Ku
Poul Hjorth, Dtu
Mikael Rørdam, Sdu
Carl Winsløw, Ku**

Adresse:

**Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø**

**Fax: 3532 0704
e-post: matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk**

ISSN: 1399-5901

**Matilde udkommer 4 gange om
året**

**Indlæg til næste nummer skal
være redaktionen i hænde se-
nest 4. august 2006**

Indhold:

TEMA: Matematik i Norden: Norge

Bjorn Ian Dundas
En kort oversigt over matematikk i Norge 4

Bjørn Ian Dundas
"Rom"forskning 6

Nils A. Baas
Norsk matematikk - stolte tradisjoner 12

Nils A. Baas
Niels Henrik Abel - vårt store geni 15

Eystein Raude
Om matematikk og musikk, 1.del 18

Helge Holden
Abelprisen - en sunn og frisk treåring 23

Martin Raussen & Christian Skau
Interview with Peter D. Lax 25

Johan Dupont
Grundforskning og forskeruddannelsen 32

Uddannelsesfronten 33

Boganmeldelser 34

MatematikerNyt 35

Begivenheder 36

Aftermath 37



"Ski og Matematikk"

En kort oversikt over matematikk i Norge



Af: Bjorn Ian Dundas
email: dundas@math.uib.no

Det følgende er ikke en autoritativ gjennomgang av matematikk i Norge, men en kort opplisting av den matematikken som var synlig for en matematiker fra Bergen med tilgang til internett i februar 2005. Først og fremst er matematikk representert ved universitetene og høyskolene.

Universitetene og høyskolene

Universitetet i Oslo

Universitetet i Oslo (UiO) Matematisk institutt har i overkant av 40 fast videnskapelig ansatte fordelt med litt over halvparten i matematikk, 1/5 i mekanikk og 1/4 i statistikk. Forskningen er delt inn i følgende grupperinger: Algebra og Algebraisk Geometri, Geometri/Topologi, Kompleks analyse, Logikk, Operatoralgebraer, Partielle differensiallikninger, Stokastisk analyse, finans, forsikring og risiko, Faststoffmekanikk, Fluidmekanikk og Statistikk og Biostatistikk. De siste årene har gruppene i operatoralgebraer, topologi og partielle differensiallikninger utmerket seg ved å bli tildelt prestisjetunge priser. Noen kjente matematikere med tilknytning til Universitetet i Oslo: Abel, Lie, Sylow, Thue, Heegaard og Skolem.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) Institutt for matematiske fag (IMF) ved NTNU i Trondhjem er jevnstor med UiO og har også i overkant av 40 fast videnskapelig ansatte. Forskningen fordeler seg over grupperingene Algebra, Analyse, Numerisk analyse, Topologi/geometri og Statistikk, hvor statistikk utgjør omlag 1/3 av instituttet. IMF har et betydelig ansvar for kvaliteten i sivilingeniørutdanningen gjennom de store grunnkursene i matematikk og statistikk, og er uten sidestykke den mest produktive utdanningsinstitusjon innen matematikk i Norge. Instituttet har vært en pådriver i utviklingen av NTNUs program for lærerutdanning i realfag og arbeider aktivt for å styrke rekrutteringen til realfag og teknologi.

Universitetet i Bergen

Universitetet i Bergen (UiB) Matematisk institutt (MI) har ca 30 fast videnskapelige ansatte, hvorav ca halvpar-

ten er i gruppen for *anvendt og beregningsorientert matematikk* en tredjedel i *ren matematikk* og en sjettedel i *statistikk*. Nytt er at en gruppe numerikere har gått fra informatikk til MI og at to personer er ansatt i matematikkdiraktikk.

Universitetet i Tromsø

Universitetet i Tromsø (UiTø) På verdens nordligste universitet finner man institutt for matematikk og statistikk som har ca 15 ansatte som driver forskningsaktiviteter innen fagområdene algebra, analyse, anvendt matematikk og statistikk.

Høgskolen i Agder

Høgskolen i Agder (HiA) Institutt for matematiske fag har ca 20 videnskapelig ansatte i avdelingen for matematikk og matematikkdiraktikk og tilbyr master- og doktorgrader i matematikkdiraktikk. Målet er å heve den samlede forskningskompetansen og kunnskapen på læring og undervisning av matematikk. Det gjelder alle trinn i skolen og i utdanningssystemet. Miljøet i matematikkdiraktikk ved HiA er blitt styrket for en slik oppgave

Norges Handelshøyskole

Norges Handelshøyskole (NHH) huser seks matematikere med hovedinteresse innen statistikk og analyse.

Universitetet for miljø- og biovitenskap

Universitetet for miljø- og biovitenskap Tidligere Norges Landbrukshøyskole. Mest matematikkrelevant er Institutt for matematiske realfag og teknologi (IMT). Har 55 videnskapelige tilsatte og 25 stipendiater. Blant forskningsområdene har vi *Beregningsorientert biologi* med de prioriterte områdene *Matematisk nevrovitenskap* og *nevrofysikk* og *Dynamikk av komplekse biologiske systemer*.



Centre of Mathematics for Applications

Centre of Mathematics for Applications (CMA) er et "Centre of Excellence" finansiert av Norges Forskningsråd. Senteret har 27 assoiserte forskere, hvorav 19 har fast arbeid ved universitetet i Oslo. Hovedfokus er på matematikk som er motivert av anvendelser, med spesiell vekt på problemer knyttet til "scientific computing". Forskningsfelter som er representert er geometri, stokastisk analyse, differentiaalligninger og anvendelser i fysikk.

Selmersenteret

Selmersenteret er et forskningssenter i kryptografi og kodeteori ved Universitetet i Bergen. Senteret ble etablert i 2003 og er oppkalt etter Ernst S. Selmer som var professor i matematikk i Bergen.

Norsk regnesentral

Norsk regnesentral (NR) utfører forsknings- og utviklingsoppdrag for næringsliv og forvaltning samt norske og internasjonale forskningsprogrammer. Instituttet har internasjonal forskerkompetanse innen IKT og statistisk modellering. NR holder til i Informatikkbygningen, Universitetet i Oslo og har ca 70 ansatte.

SINTEF

SINTEF Avdelingen for anvent matematikk har ekspertise innen geometri, visualisering, numeriske metoder, simulering og optimering og består av ca 30 personer hvorav flesteparten er stasjonert i Oslo.

Foreninger

Norsk matematisk forening

Norsk matematisk forening (NMF) er Norges fagmatematikeres forening med ca 260 medlemmer. NMF gir ut nyhetsbrevet INFOMAT og sammen med nordiske søsterorganisasjoner står NMF også bak utgivelsen av det populærvidenskapelige magasinet *Normat* og *Mathematica Scandinavica*.

NMF administrerer Abelsymposiene og er i samarbeid med Abelprisen ansvarlig for Niels Henrik Abels matematikkonkurranse. Videre arrangerer NMF årlig konferansen *Ski* og matematikk som samler matematikere fra Norge og Norden.

Norsk matematikkråd

Norsk matematikkråd (NMR) er et frittstående, rådgivende organ. Det skal gi råd i saker etter anmodning fra departementer, Norges forskningsråd, Universitets- og høyskolerådet, de deltakende institusjoner og fra det nasjonale fakultetsmøte i realfag. De administrere også Holmboeprisen.

matematikk.org

matematikk.org er et nettsted som ønsker å bidra til at stadig flere skal få en opplevelse av at matematikk er et spennende og nyttig fag. Alle universitetene står bak initiativet.

Landslaget for matematikk i skolen

Landslaget for matematikk i skolen (Lamis) er en samlende organisasjon for de som underviser matematikk på alle nivåer fra førskole til høyskole. Vi vil arbeide for å styrke fagets plass i skolen, skape bevisstgjøring omkring faglige og didaktiske problemstillinger. Videre søker vi å være en samarbeidspartner og høringsinstans for besluttede og bevilgende myndigheter i saker som er relevant for matematikkens plass i skolen.

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen har som hovedoppgave å lede og koordinere utvikling av nye og bedre arbeidsmåter og læringsstrategier i matematikkopplæringen i barnehage, grunnskole, videregående skole, voksenopplæring og lærerutdanning i Norge. Senteret skal også bidra til et tett og godt nordisk samarbeid. Senterets målgruppe er først og fremst lærere som underviser i matematikk i skole og lærerutdanning, samt lærerstudenter ved høyskoler og universiteter, og læremiddelutviklere. For å bygge opp et positivt syn på matematikk i samfunnet generelt, vil også foreldre, media og allmennheten være viktige målgrupper for senterets virksomhet.

Priser

Abelprisen

Niels Henrik Abels minnefond ble etablert 1. januar 2002. Hovedformålet er å tildele en internasjonal pris for fremragende vitenskapelig arbeid i matematikk. Prisen skal bidra til å heve matematikkfagets status i samfunnet og stimulere barn og unge til å bli interessert i matematikk. Prisens størrelse er 6 millioner norske kroner (ca 725 000 Euro) og ble for første gang delt ut 3. juni 2003. Prisen deles ut av Det Norske Videnskaps-akademi (DNVA) som har nedsatt en Abel-komite bestående av 5 matematikere til å vurdere nominerte kandidater. Fondet støtter mange andre aktiviteter, og er aktiv overfor barn og unge.



Bernt Michael Holmboe

Holmboeprisen

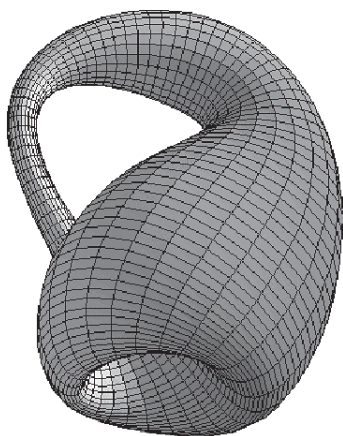
Formålet for prisen er å fremme og belønne god undervisning i matematikk. Dette skjer ved å utdele en årlig pris til en eller flere matematikklærere eller et matematikkmiljø i norsk grunnskole eller videregående skole.

“Rom”forskning



Af: Bjørn Ian Dundas
Matematisk Institutt
Universitetet i Bergen
email: dundas@math.uib.no

- det finnes kulere rom enn verdensrommet



Topologi er studiet av rom. Rom forekommer som i “rommet vi lever i”, men begrepet har viktighet langt utover dette. F.eks. vil fysiske, biologiske og økonomiske prosesser studeres gjennom deres “tilstandsrom”. Akkurat som at jorden ikke er flat - selv om man lenge trodde dét - krøller disse rommene opp på seg selv, og har en spennende global struktur som har mye å si for hvilke prosesser som er mulige. I foredraget håper jeg å belyse rombegrepet gjennom en del konkrete eksempler. Målet er å gi tilhørerne et innblikk i et sentralt emne innen matematikk som ikke ligner noe de lærer i de første årene på universitetet. Og kanskje vi får se at verdensrommet er ganske kult dét også? Hvis jeg får tid (det får jeg jo sjel-

den) vil jeg avslutte med å snakke om sfærespekteret. Sfærespekteret er en ny og nødvendig erstatning for de hele tall, men som tar form som et uendeligdimensjonalt rom, og som kan forklares gjennom de utskjelte begrepene i reform-matematikken fra 60 og 70-årene.

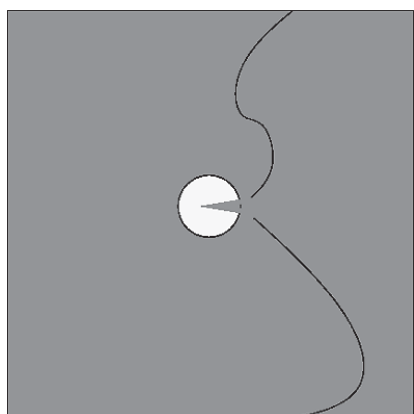
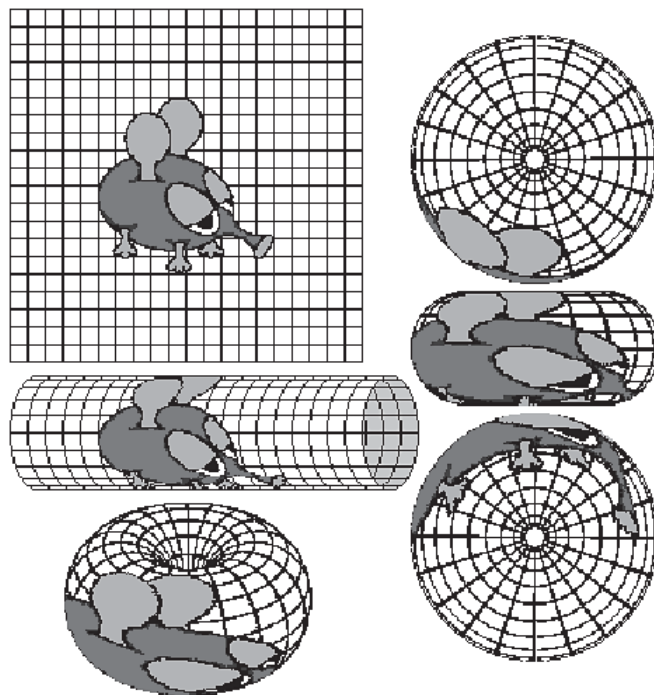
Hvilken fasong har universet?

Vi må løsrive oss fra tvangstrøyen at “jorden er flat”.

Dette er lettest å forestille seg i lave dimensjoner, men også det fire-dimensjonale rommet vi lever i krummer. Poenget er bare at det ikke er så lett å se det lokalt.

I lave dimensjoner er “lokalt flat” et hverdagslig fenomen for alle som spiller dataspill. I gamle “Pacman”: når du går ut av skjermen på venstre side, dukker du umiddelbart opp på høyre side. Dette ville ikke skjedd hvis skjermen kun var et lite “vindu” inn i planet $\mathbb{R}^2$. Faktisk ser du HELE universet til Pacman på skjermen.



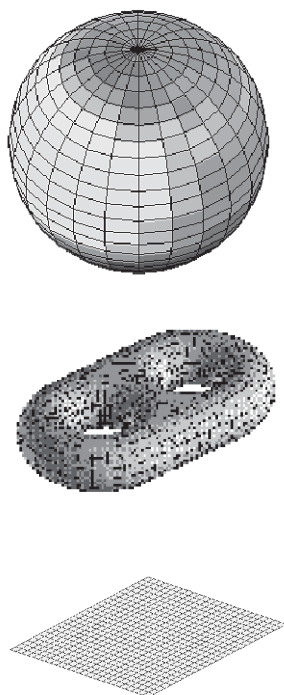


Pacmans univers

La oss finne ut hvordan den globale strukturen på Pacmans univers er. For å lette fremstillingen spiller vi et annet spill hvor jeg kan lettere forklare: Week's **torus game**. <http://www.geometrygames.org/TorusGames/>

Vi ser at Pacmans univers krøller seg opp i seg selv, og i vår 3D verden kan vi realisere Pacmans verden som en **torus**.

En morsom ting for dyr som bor på **torusen**: tenk at du drar på langferd, og lar en tråd løpe ut etterhvert som du går. Sett at du etter en tid kommer hjem og griper fatt i begge endene av tråden. Ta da og forsøk trekke inn løkken. Det kan være du ikke klarer det: du **kan** ha fanget et "hull" i universet ditt!



Andre 2D univers

I to dimensjoner er det faktisk meget begrenset hvor mange "verdener" det finnes: se f.eks. www.adressen.no nedenfor for en liste og noen fine animasjoner av disse rommene. Vi har selvfølgelig planet og torusen, men også andre kandidater som sfæren, og noen til som vi skal se på snart. For et 2D vesen er dette rom man kan bo i, og har det litt begrenset interesseområde, er det ingen grunn til at vårt 2D vesen noensinne skal oppdage at det ikke lever i (det flate) planet.

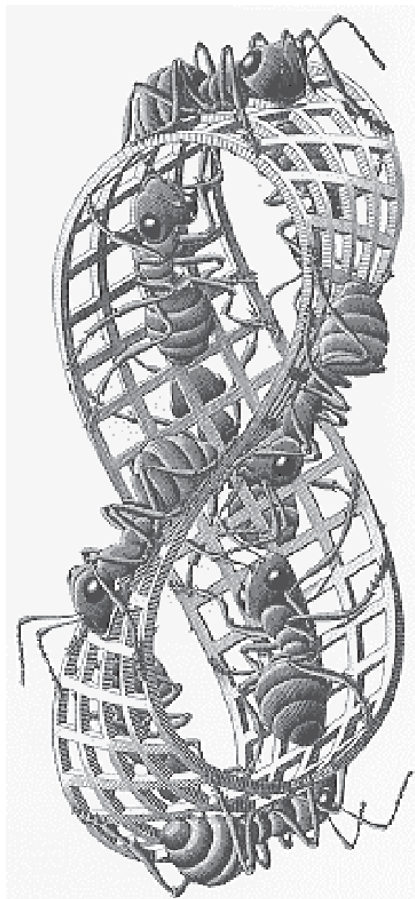
Noen rom er "orienterbare" (f.eks. planet, sfæren og torusen, hvor det 2D dyret kan definere "høyre og "venstre"), og andre er "ikke-orienterbare" (f.eks. Kleins flaske), hvor dyret vårt kan risikere å komme speilvendt tilbake til utgangspunktet etter en "2D-romferd". For å få en følelse hvordan det er å bo på en Klein flaske kan du spille the torus game med valget "Klein bottle" i stedet for "torus".

En annen ting du kanskje har lagt merke til er at f.eks. Kleins flaske ikke kan tegnes i rommet uten at vi får selvskjæringer. Det er bare fordi rommet vårt er så lite: i fire dimensjoner kommer Kleins flaske til sin rett.

Et lignende fenomen er de Borromeiske ringene som du ser til venstre. To og to henger ikke ringene sammen, men de tre ringene kan likevel ikke trekkes fra hverandre. Dette er fordi $\mathbf{R}^3$ er for trangt.

Men det er viktig at vi ikke blander kortene: de store flate rommene (som $\mathbf{R}^3$ og $\mathbf{R}^4$) har ingenting med vår 2D-verden å gjøre: for vårt 2D-dyr er flere dimensjoner enn to kun tankespinn som ikke har noe med virkeligheten å gjøre (de forekommer kun i matematikk og teoretisk fysikk).

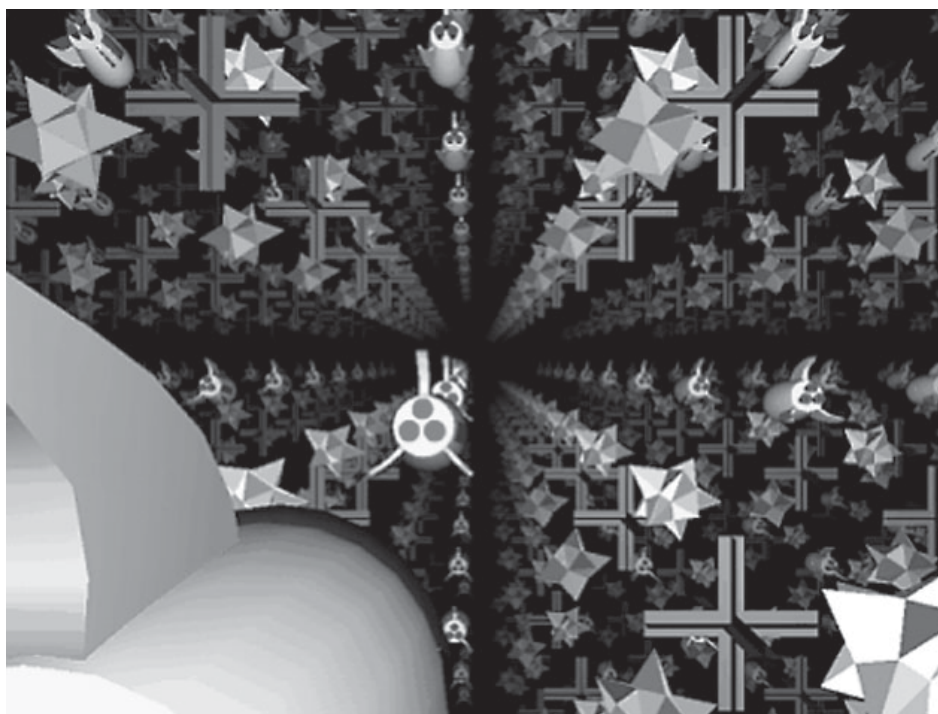
Det er forøvrig en søt gammel bok som heter Flatlands som handler om slike dyr, som kan være morsom å lese.



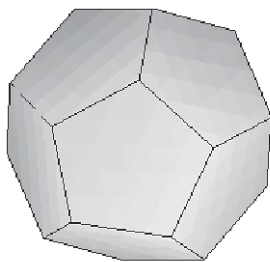
Rommet **vi** bor i er 3D (4D hvis du regner med tiden). De fleste antar at vi bor i $\mathbf{R}^3$, og det ser slik ut om vi er litt nærsynt. Einsteins generelle relativitetsteori forteller oss imidlertid at tid-rommet ikke er flatt.

Observasjoner fra WMAP kan tyde på at rommet på **stor** skala er flatt (usikkerhet på ca 2%), hvilket passer $\mathbf{R}^3$ fint, men også 3-torusen (3-torusen får du ved å ta en terning, og - akkurat som vi gjorde for 2-torusen - identifiserer motstående sider).

Anomaliteter i bagrunnsstrålingen har dog gjort at man har lurt på om tidrommet er en Poincaré sfære (som er det kuleste 3D-rom jeg vet om!! Det bygges av et dodekaedron ved å identifisere motstående sider.)



3D torus som periodisk rum



identificer modstående sider

Eksempel på et Tilstandsrom

Anta at du skal beskrive **to elektroner**. Nærmere bestemt, du vil modellere **alle** tilstandene du kan ha (og hvordan tilstandene henger sammen).

Dette kan beskrives ved å oppgi vektoren fra massesenteret til en av elektronene. Ved Pauli eksklusjonsprinsipp er denne vektoren aldri null, men siden elektroner er like **kan vi ikke bestemme hvilken vei** vektoren peker. Velger vi å se vekk fra lengden til vektoren beskrives tilstanden altså entydig ved **en linje** gjennom massesenteret i $\mathbb{R}^3$.

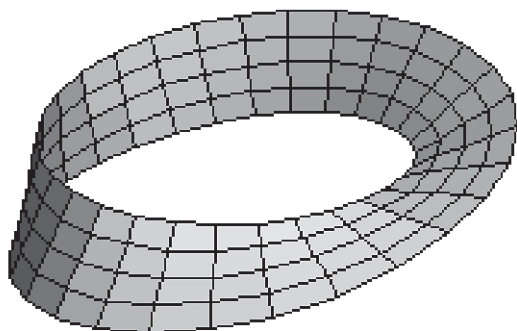
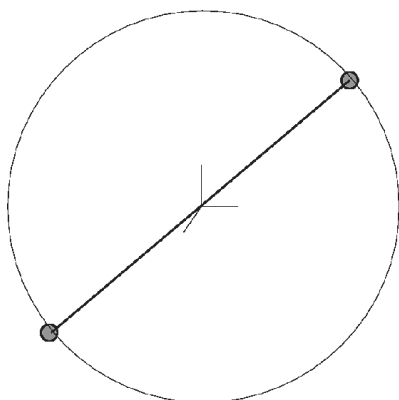
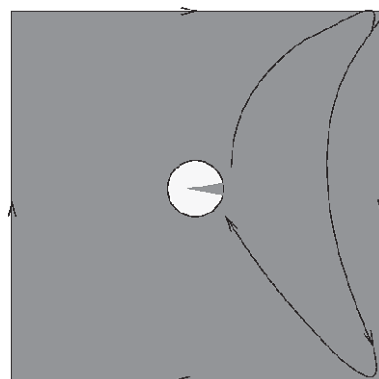
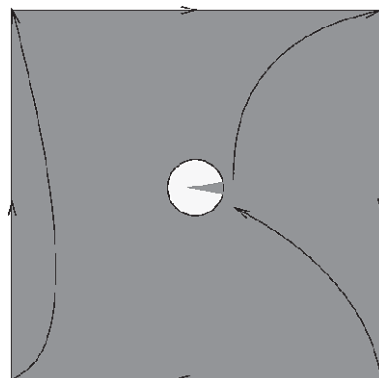
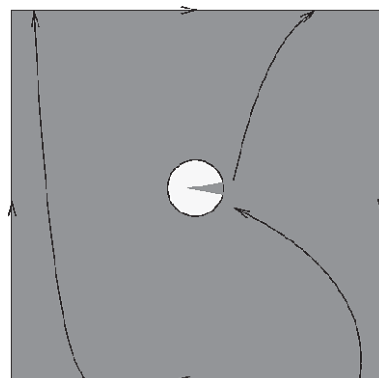
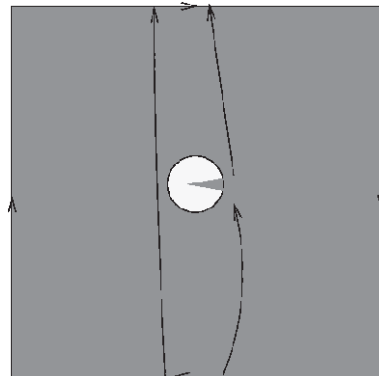
Rommet av slike linjer kalles det **projektive planet**.

Det projektive planet kan også laves ved å ta et Möbiusbånd, (som har rand som en sirkel) og sy fast en rund lapp. Dette rommet er ikke orienterbart.

Det projektive planet har et interessant "hull". Det rare er at hullet "forsvinner" om du går to ganger rundt det, noe det berømte vannglass-trikset er en illustrasjon på. (slike hull finner du også i verdensrommet, dersom det skulle vise seg å være en Poincaré sfære. Hvis jeg får tid skal jeg forklare nøyere hva et "hull" er, og hva det vil si at et hull "forsvinner").

Andre tilstandsrom kan være av formen "alle posisjonene til en robotarm", "løsningrommet til en modell for forskjellige fiskearter i Barentshavet", osv. osv.

Dimensjonen til tilstandsrommene ("grader av frihet") er ofte svært stor hvis det er et komplisert system, gjerne



uendelig.

Egenskaper ved rom

Hvis du skal lave en fusjonsreaktor må du holde plasmaet på plass med et magnetfelt. På overflaten av plasmaet må vektorfeltet gå parallelt med overflaten: ellers lekker plasmaet ut og gjør ugang. Hvilke flater er det i rommet som tillater ikkeforsvinnende vektorfelt?

Svaret er overraskende: **torusen** er den **eneste**. Så fusjonsreaktorer har alltid plasmaet i en ring rundt magneten. For å vise dette må man oversette problemet til et algebraisk problem som man kan regne ut. I dette tilfellet er problemet knyttet opp mot det såkalte **Eulertallet**.

Topologi

Topologi er studiet av rom.

- Gitt et rom: hvilke egenskaper har det?

- Gitt en egenskap: hvilke rom har den?

I nyere tid har koblingen til algebra blitt tettere og tettere. Problemer med rom kan med fordel oversettes til algebraiske problemer som vi kan regne ut, og vanskelige algebraiske spørsmål kan oversettes til rom hvor vi har mer plass til å strekke og dra litt i dem, og dessuten har geometrisk intuisjon som forteller oss hvordan vi skal angripe problemet.

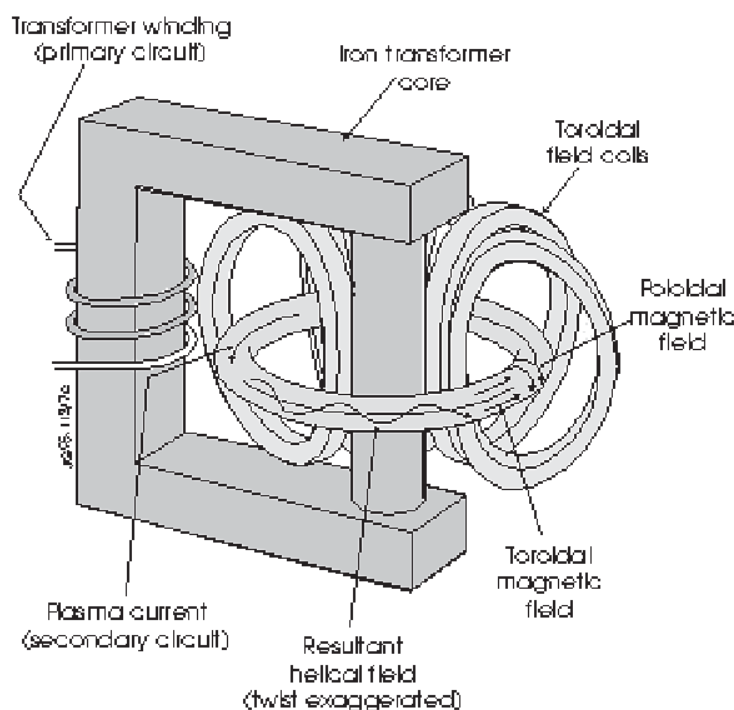
Faktisk er det nu slik at "algebra kan plasseres **inni** en del av topologi". I denne delen ligger algebra faktisk like tett som de rasjonale tallene ligger i de reelle tallene. Men de hele tall må byttes ut med et enda mer fundamentalt tallsystem: **sfære-spekteret**.

Norge har seilt opp med en sterk kompetanse i topologi, og nytt av i år er at topologi er et av satsningsområdene her i Bergen (med egen studieretning under masterplanen i matematikk).

Fra en praktisk synsvinkel påtvinges rom oss gjennom nært sagt alle fysiske fenomener, fra de mest hverdagslige til det kosmiske. Ofte er det slik at alt relevant foregår på et krumt rom, mens det flate rommet bare er en distraksjon.

Det er også en kobling mellom informatikk og topologi, og selvsagt også mot andre fag hvor modellering er viktig, som f.eks. økonomi.

Fra en matematisk synsvinkel er topologi en sentral, men teoritung aktør. Det er svært langt frem til forskningsfronten for studenter, både fordi dere ikke lærer noe om dette i begynnelsen av studiet, men også fordi det rett og slett er krevende stoff.



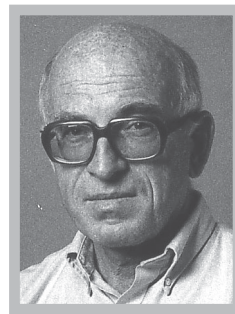
Forfatteren ønsker at kreditere

<http://www.geometrygames.org/ESoS/index.html> af Jeff Weeks

Norsk matematikk - stolte tradisjoner

Artiklen blev skrevet i 2002

Af: Nils A. Baas, NTNU.
email: baas@math.ntnu.no



I år feirer vi 200 års jubileet for Niels Henrik Abels fødsel, og han er blitt omtalt i en egen kronikk. Men norsk matematikk er så visst ikke bare Abel. Vi har i Norge hatt bemerkelsesverdig mange betydningsfulle matematikere. I en tid da det klages over at norsk vitenskap ikke hevder seg internasjonalt, kan det være både interessant og lærerikt å se tilbake på vår matematiske tradisjon. Jeg vil begrense meg til perioden ca. 1800 - 1950, og belyse utviklingen av norsk matematikk ved å trekke fram noen meget betydningsfulle, men for de fleste, ukjente norske matematikere i denne periode.

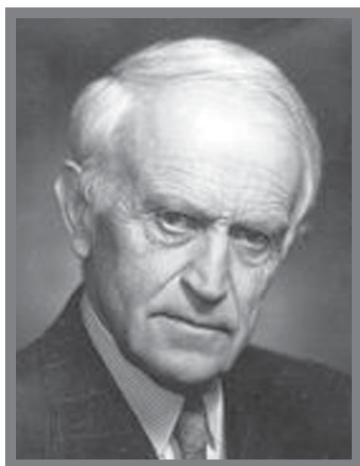
Den første norske matematiker i moderne forstand må sies å være **Caspar Wessel (1745-1818)**.

Han studerte i København og gjorde karriere i Danmark som landmåler. Han var samvittighetsfull og flittig i sitt arbeid. Det beskrives av broren Johan Herman Wessel, som skriver: *"Han tegner landkort og lærer loven, han er så flittig, som jeg er doven."* Det varigste minnet etter Wessel er nok ikke hans arbeider med kart, men en matematisk avhandling som han skrev 52 år gammel i 1797. Her diskuterer han problemer med å trekke ut kvadratroten av negative tall. Dette problemet hadde plaget matemati-

kerne siden renessansens tid. Det hadde vist seg at en med fordel kunne bruke symbolet $\sqrt{-1}$. Wessels idé er å representere disse imaginære størrelser geometrisk ved linjer i planet, og derigjennom studere deres regneregler. Denne fremstillingsmåte har hatt en avgjørende betydning i matematikken, og Wessel var den første til å innføre den. Det komplekse plan burde derfor kalles det Wesselske plan!

Caspar Wessel og hans brødre måtte til København for å få høyere utdanning. Ved århundreskiftet ble det arbeidet sterkt for et eget norsk universitet. En av pådriverne i universitetssaken var sogneprest i Gjerstad Søren Georg Abel. Hans drivkraft var nok både idealisme og omsorg for sine sønners utdanning. At en av dem skulle bli en av alle tiders største matematikere visste han lite om. **Niels Henrik Abel (1802-1829)** har vi omtalt i en egen kronikk i anledning av 200 års jubileet for hans fødsel.

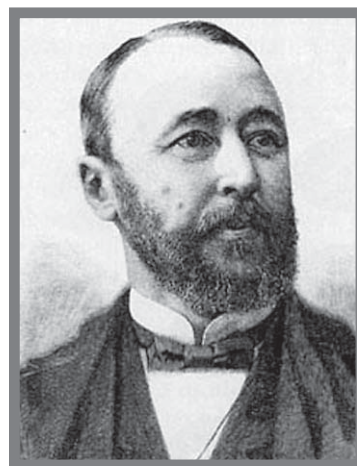
Abel ble selvsagt en stor inspirasjon for norsk matematikk videre, og det skulle ikke gå lang tid før flere originale og betydningsfulle matematikere dukket opp. Den første var **Ludvig Sylow (1832 - 1918)**. Han fikk sin utdanning ved Universitetet i Kristiania. Etter råd fra C.A.



Viggo Brun



Sophus Lie



Ludvig Sylow

Bjerknes studerte Sylow Abels arbeider og fortsatte med franskmannen E. Galois' arbeider i gruppeteori.

I 1862-63 foreleste han om Galois' arbeider ved Universitetet. Hans første arbeider ble offentliggjort i årene 1867 og 1868. Det hadde nå vært naturlig om Sylow var blitt knyttet til Universitetet. Mulighetene var absolutt til stede da O. J. Broch i 1869 søkte avskjed fra sitt professorat i ren matematikk for å bli statsråd. Sylow syntes en selvskreven etterfølger. Men C. A. Bjerknes som var professor i anvendt matematikk, søkte om å bli overført til ren matematikk. Dermed ble det kun ledig et professorat i anvendt matematikk. Det gikk til Cato M. Guldberg - Sylow søkte ikke engang. Han var meget skuffet over det som var skjedd, og forble gymnaslærer i Halden. Sylow syntes å føle en usikkerhet ved sine resultater oppnådd i isolasjon, og var derfor tilbakeholden med publisering

Det er imponerende hvordan Sylow kunne produsere matematikk på høyt nivå fullstendig isolert i en småby i en avkrok av verden, uten bibliotek, uten noen å diskutere med. Lie arbeidet også for å få et professorat til ham i Oslo. Først i 1898 da han gikk av som overlærer i Halden ble han utnevnt til ekstraordinær professor ved Universitetet - en stilling han beholdt livet ut. Han var aktiv både som forsker og foreleser til det siste.

Sylow hadde **Sophus Lie (1842 – 1899)** som tilhører på sine forelesninger i gruppeteori. Dette skulle komme til å prege Sophus Lie - vår neste store matematiker. Lie gikk på skole i Kristiania hvor han tok examen artium i 1859. Han var en vel begavet elev som gjorde det godt i alle fag. Lie var ikke bare intellektuelt uhyre godt utrustet, men også fysisk, og han var meget dyktig i idrett.

1868 ble et vendepunkt i Sophus Lies liv. Da kom han over noen verker hvor han ble introdusert til det som den gang var moderne geometri. Plutselig følte han at han hadde funnet et felt hvor han kunne utfolde sin begavelse - især evnen til geometrisk tenkning. Fra nå av kastet

han seg over matematikken med full kraft, og syntes lykkelig i sitt valg av kurs.

Vinteren 1869 - 70 tilbrakte Lie i Berlin. Her traff han en annen ung geometrisk begavelse - Felix Klein. De ble venner, og kom til å få stor innflytelse på hverandre. For begge ble gruppebegrepet grunnleggende i hele deres produksjon. I 1871 tok han doktorgraden og i 1872 opprettet Stortinget et ekstraordinært professorat for ham. Han stiftet familie, og gikk inn i en usedvanlig fruktbar vitenskapelig periode.

Abel og Galois hadde studert algebraiske ligningers symmetrier gjennom grupper, og dermed gitt kriterier for når de kan løses ved rotutdraging. Det Lie oppdaget var at hans teori for transformasjonsgrupper kunne brukes til å gi en tilsvarende vakker teori for differensialligningers løsbarehet ved kvadratur (dvs. ved integrasjon). I ettertid har det vist seg at Lies transformasjonsgrupper skulle få større betydning som symmetrigrupper i matematikk og fysikk enn i teorien for differensialligninger. I 1886 ble Lie kalt til professor i Leipzig. Det ble en lang periode i utlendighet, og først i 1898 vendte han tilbake til Norge.

I 1889 hadde han et nervesammenbrudd, og i 1892 kan det til et brudd med Klein på grunn av stridigheter om felles ideer.

Lie sjokkerte tyskerne ved sine angrep på den berømte Klein, bl.a. skriver han:

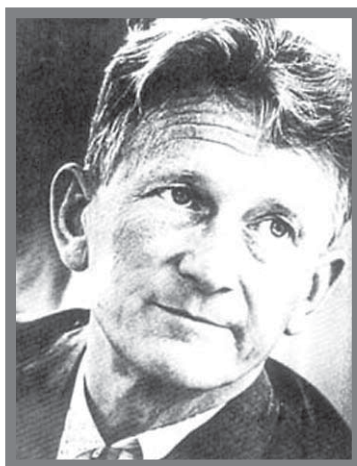
"Ich bin kein Schüler von Klein, das Umgekehrte in auch nicht der Fall, wenn es auch vielleicht der Wahrheit näher käme".

Lie tiltrakk seg mange av Europas beste studenter, men etter sammenbruddet var han mer tungsindig og pessimistisk. Et æresprofessorat ble opprettet for ham, men da han i 1898 kom hjem, var han en syk mann, og døde 18. februar 1899.

Sophus Lies livsverk er utrolig imponerende. Han skapte fundamentale nye teorier og forskningsfelter som



Axel Thue



Atle Selberg



Thoralf Skolem

i meget stor grad har påvirket matematikken i det 20. århundre. Lie-grupper og Lie-algebraer er i dag "klassiske" begrep i matematikken. Selv sett med kritiske internasjonale øyne er det ingen overdrivelse i dag å si at Sophus Lie er et av de største og mest innflytelsesrike navn i matematikkens historie. Hans arbeider har hatt enorm betydning i moderne fysikk, og mange moderne teorier kunne ikke engang vært formulert uten Lies arbeider. Hans ideer bare fortsetter å påvirke utviklingen av matematikken og naturvitenskapene.

Vi har nå sett hvordan gruppeteorien spilte en sentral rolle i norsk matematikk i det 19. århundre. Dette gjenspeiles i begrepene:

Abelske grupper
Sylow-grupper
Lie-grupper.

Like etter århundreskiftet starter en ny epoke i norsk matematikk hvor tallteori kom til å dominere - med visse unntak - i perioden 1900 - 1950.

Den første matematikeren som representerte denne retningen var

Axel Thue (1863 – 1922). Han ble student i Kristiania i 1883. I 1889 fullførte han embetseksamen, og i de neste to år hadde han reisestipend og studerte i Leipzig hos Sophus Lie og i Berlin. Utenlandsoppholdet synes ikke å ha satt særlige spor i Thues videre virke. Han var en ekstremt original begavelse med en inngrodd ulyst til å arbeide med andres ideer. Det tiltalte ham ikke å arbeide med Lies store teori for transformasjonsgrupper. I stedet vendte han seg mot tallteorien, hvor kravet til forkunnskaper om et problem ofte er mindre enn i andre deler av matematikken, men hvor kravet til skarpsindighet for å løse et problem kan være desto større. Dette tiltalte Thue.

I 1894 ble Thue overlærer ved Trondhjems tekniske læreanstalt. Han produserte flere tallteoretiske arbeider her, men følte seg nokså isolert. Derfor søkte han et professorat ved Universitetet. I 1903 blir Thue utnevnt professor i anvendt matematikk, og Carl Størmer i ren matematikk. Når en i ettertid ser på deres virke burde det nok vært omvendt!

I årene 1906 -12 utga Thue flere bemerkelsesverdige avhandlinger om tegnrekker og logikk. Det er lite kjent at disse arbeidene er forløperne for moderne dataspråk. Abstrakte spekulasjoner som i sannhet er kommet til anvendelse!

Kombinasjonen tallteori og logikk er også karakteristisk for en annen stor norsk matematiker

Thoralf Skolem (1887 – 1963) - men hos ham spilte logikken den sentrale rolle. Han tok embetseksamen i 1913, og tittelen på hovedoppgaven var: "*Undersøkelser innenfor logikkens algebra*". Karakteren ble 1.0. Han studerte en kort tid i Göttingen, var dosent 1918 - 30, så en periode ved Chr. Michelsens Institutt i Bergen og fra 1938 - 58 var han professor ved Universitetet i Oslo.

Skolem ytet vesentlige bidrag innenfor matematisk logikk, mengdelære, tallteori, algebra og kombinatorikk. Men det var hans arbeider i logikk som først og fremst ga ham internasjonal anseelse. Et av de viktigste teoremer i matematisk logikk bærer Skolems navn, nemlig Skolem-Løwenheim teoremet. Til å begynne med vakte Skolems

arbeider liten oppmerksomhet, men den kom etter hvert, og han betraktes i dag som en av det 20. århundres største logikere.

Den neste større norske tallteoretiker er **Viggo Brun (1885 – 1978)**. Han tok examen artium i 1903 og embetseksamen i 1909. Brun fikk et reisestipend, men på grunn av 1. verdenskrig ble det omgjort til hjemmestipend, og han fikk noen rolige og uforstyrrende arbeidsår i sitt elskede hjem i Drøbak. I 1923 ble han professor ved NTH, og her var han til han i 1946 ble utnevnt til Carl Størmers etterfølger i Oslo - en stilling han hadde til han ble pensjonist i 1956.

Viggo Brun var en uhyre selvstendig og original matematiker. Han hadde ikke sans for samtidens matematikk, men var opptatt av problemer i tallteorien som var enkle å formulere, men uhyre vanskelige å løse. I så hen-seende kan han minne mye om Axel Thue.

Primtallenes fordeling opptok Brun. Goldbachs hypotese fra 1742 sier at et ethvert partall kan skrives som en sum av to primtall. I over 250 år har denne hypotesen stått ubevist, men Brun oppnådde her interessante delresultater.

Høydepunktet i den norske tallteoretiske tradisjon representeres nok ved

Atle Selberg (1917 -). Han vokste opp i en familie av matematikere representert ved hans far og to eldre brødre, Henrik og Sigmund. I 1942 tok Selberg doktorgraden på et arbeide hvor han angriper Riemannhypotesen – et av matematikkens store uløste problemer - og nådde lenger enn noen før ham.

Jeg har dessverre glemt hvem som fortalte meg følgende historie: Den tyske matematiker C.L. Siegel hadde levd i isolasjon under krigen, og da han like etter traff Harald Bohr, spurte han hva som var nytt i matematikken. Bohr svarte da med ett ord: *Selberg!*

Det vakte stor oppmerksomhet da han i 1947 ga det første elementære bevis for primtallsetningen. I 1949 ble han professor ved The Institute for Advanced Study i Princeton, og har vært der siden. I 1950 ble han tildelt Fieldsmedaljen som i matematikk tilsvarende Nobelprisen. Han lever fortsatt i beste velgående i Princeton.

I 1956 publiserte Selberg sin berømte sporformel - som er kanskje et av de dypeste resultatene i det 20. århundre. Den involverer tallteori, gruppeteori, analyse og geometri på en intrikert måte, og i fysikken blir den brukt til å knytte forbindelser mellom kvantemekanikk og klassisk mekanikk. På mange måter representerer den syntesen av de norske matematikktradisjoner jeg har her trukket fram.

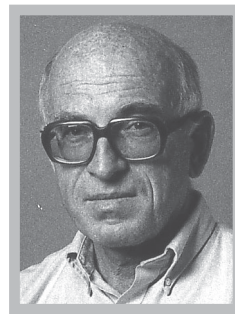
Det er også en rekke andre norske matematikere i denne perioden som jeg ikke har nevnt, og som har ytet mange glimrende bidrag til matematikken. Mitt selektive utvalg er ingen nedvurdering av dem, kun et uttrykk for plassbegrensning.

Jeg håper med dette å ha vist at Norge som en liten og fattig nasjon har ytet vesentlige bidrag til matematikken - vitenskapenes dronning. Nå er vi blitt en rik nasjon, og det er viktig å holde disse tradisjoner i hevd ved å stimulere den matematiske vitenskap slik at fremtidens talenter kan få anledning til å blomstre.



Artiklen blev skrevet i 2002

Af: Nils A. Baas, NTNU.
email: baas@math.ntnu.no



Niels Henrik Abel - vårt store geni

Det er i år 200 år siden vår store matematiker Niels Henrik Abel ble født. Markeringen av 200 års jubileet er allerede i gang. Abel er uten tvil en av de største matematikere verden har sett. Hans liv og skjebne er både tragisk og fascinerende, og viser geniets evne til å heve seg over verdens vanskeligheter - slik Gustav Vigeland prøver å uttrykke det i sin Abel-statue i



Slottsparken. Det er derfor interessant å se nærmere på livshistorien til vår geniale matematiker.

Niels Henrik Abel ble født 5. august 1802 på Finnøy i Rogaland hvor faren var sogneprest. Familien Abel var en gammel embedsmannsfamilie som opprinnelig kom fra Abild i Sønderjylland på 1600-tallet. Det var to brødre - Mathias og Jacob - som dro derfra, og slo seg ned i Trondhjem. Fra disse to er det den norske Abel-slekten stammet. Både Niels Henriks far og bestefar var prester forskjellige steder på Sørlandet. Søren Abel - far til Niels Henrik - overtok i 1804 embetet som sogneprest i Gjerstad i Aust-Agder etter sin far. Det var her Niels Henrik kom til å vokse opp. Hans mor - Anne Marie - kom fra en velstående familie i Risør - ikke langt fra Gjerstad.

I 1815 - bare 13 år gammel - ble Niels Henrik sendt til Katedralskolen i Christiania. I de første årene vakte han ingen spesiell oppmerksomhet, men i 1818 fikk skolen en ny matematikklærer - Bernt Michael Holmboe. Han oppdaget unge Abels usedvanlige talent, og veiledet ham deretter.

Med elementærmatematikken gjorde han seg nå hurtig ferdig, og han fikk låne bøker for Uni-

versitetet. Holmboe skrev senere: "Nå oppofret han seg matematikken med den mest brennende iver og gikk fremad i denne videnskap med en hurtighet som kun er geniet egen". Han studerte arbeider av de store matematikere som Euler, Gauss, Poisson og Lagrange. Det var slutt med å låne skjønnlitteratur, i stedet leste han også anvendte verker av Newton, Lalandes astronomi og d'Alemberte dynamikk. I sannhet var dette en både tung og imponerende kost for en 16 åring. Holmboe bemerker i karakterprotokollen at "Öom han lever, vil han bli en stor matematiker". Det siste er rettet, og der sto opprinnelig "verdens største matematiker".

Løsning av 2-grads ligninger ved rottegn husker de fleste fra skolematematikken. Allerede på 1500-tallet var

det kjent at lignende, men mer kompliserte løsninger kunne skrives opp for 3. og 4. grads ligninger. Men for ligninger av høyere grad var problemet uløst og en stor utfordring for matematikerne.

Allerede i det siste skoleår som 18 åring begynte Abel å sysle med problemet om 5. gradsligningens løsbarehet ved rottegn. Han mente først å ha funnet en løsning. Holmboe fant ingen feil, ei heller professorene Rasmussen og Hansteen ved Universitetet. Løsningen ble sendt til professor Degen i København. Han fant heller ingen feil, men uttrykker skepsis til løsningen og ber Abel undersøke noen eksempler nærmere. Videre anbefaler han Abel å forlate denne "sterile gjenstand", og heller bruke sine krefter på elliptiske funksjoner hvor han nærmest visjonært spår ham "Magellanske gjennomfarer til et uhyre analytisk ocean". Dette skulle Abel senere virkelig realisere! Abel fant selv feilen i sin løsning.

For en ung matematiker som Abel var det nå av stor betydning å komme seg litt ut i verden for å treffe andre matematikere. Drømmen var nok å komme til Paris, Berlin og Göttingen, men på grunn av økonomien gikk hans første utenlandsreise til København sommeren 1823. Her arbeidet han bl.a. med "Fermats siste teorem", som han ikke klarte å vise, men han fant noen formler som viste at om løsninger fantes, måtte de være svært store. Abels møter var gift i København, og på et ball hos henne, traff han sin senere forlovede Christine Kemp.

Abel vendte hjem fra København i glimrende humør, og begynte nå for alvor å arbeide på de områder som var blitt hans hovedinteresse: ligningsteorien og elliptiske funksjoner. I 1824 offentliggjorde Abel avhandlingen: "*Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*". Han hadde altså bevist at den generelle 5. gradsligning ikke kunne løses ved rotutdraging. Dette hadde matematikerne strevd med i over 300 år. Dette resultatet bringer Abel inn i rekken av de virkelig store matematikere.

Den fulle forståelse for når ligninger av høyere grad kan løses ved rotutdraging kom først senere ved franskmannens E. Galois' arbeider. Ut fra hans og Abels arbeider er det at det fundamentale gruppebegrepet utkrystalliseres. Dette er i ettertidens matematikk blitt et av de mest fundamentale begreper, og med fantastiske anvendelser for eksempel i fysikk..

For at hans utvikling ikke skulle hemmes av de snevre forhold hjemme var det nå av stor betydning at han kunne få reise ut til de ledende matematiske sentre i Europa. Han fikk et statlig stipend, og fikk lov til å benytte det utenlands - etter selv å ha skrevet direkte til kong Karl Johan. Dermed var det klart for den store utenlandsreisen som skulle strekke seg over 2 år.

Han la ut på denne sin store reise i september 1825 og kom tilbake først i mai 1827. Han hadde først tenkt seg til

den store og berømte Gauss i Göttingen, men i København ombestemte han seg og dro til Berlin. Det var et lykketreff for her traff han den matematikk-interesserte ingeniøren August Leopold Crelle som var ved å etablere det senere så kjente tidsskrift "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*". Her kom Abel til å publisere en rekke av sine arbeider, og det oppstod et nært og inderlig vennskapsforhold til Crelle. I Crelle hadde Abel funnet seg en faderlig venn og varm beundrer. Selv om Crelle nok ikke forstod Abels arbeider, forstod han raskt at han her stod overfor et geni av store dimensjoner. Fra Berlin dro Abel til Paris – reisen store mål.

På Abels tid var Paris full av berømte matematikere og fysikere, og han nevner en hel del av dem i sine brev. Han er åpenbart skuffet over at mange av dem er så gamle at det bare er berømmelsen tilbake. Han fikk liten kontakt med de franske matematikere, men arbeidet hardt og fullførte en rekke av sine mest fundamentale arbeider i en stor avhandling. Den ble lagt fram for Det franske Akademi 30. oktober 1826. Cauchy og Legendre skulle bedømme

avhandlingen, men Cauchy la den til side, og den ble først trykt i 1841 - lenge etter Abels død. Selv om Abel var svært spent på avhandlingens skjebne, viste han alltid en merkelig beskjedenhet når det gjaldt å spørre om hvordan det gikk med den. Under trykkingen forsvant manuskriptet, og først i 1952 lyktes det Viggo Brun å finne originalmanuskriptet på noen få sider mer i biblioteket i Firenze. Endelig var Abels klenodium brakt for en dag, etter mer enn hundre års etterforskning og undring over dets skjebne.

Abel var skuffet over oppholdet i Paris - i tillegg hadde han feber og hostet mye, men han ville ikke vite av at han var alvorlig syk. Ved årsskiftet 1826/27 reiste Abel fattig og trett fra Paris til venner i Berlin - en lang og strevsom reise med diligenser på den tiden. Han fikk tilbud om å bli redaktør for Crelles Journal, men avslo - han ville hjem. Han kom tilbake til Norge i slutten av mai 1827.

Her ble reisen hans sett på som delvis mislykket, da han ikke hadde fått offentliggjort noe i Paris, og heller ikke besøkt den store Gauss i Göttingen. Abel fikk ikke fornyet stipendiet sitt, og måtte oppta et privat lån i Norges bank som han aldri nådde å betale tilbake. I tillegg til egne utgifter var det også familiens gjeld han måtte ta hånd om. Det akademiske kollegium støttet ham noe inn til han ble vikar for professor Hansteen som skulle på en vitenskapelig ekspedisjon i Sibir for å studere jordmagnetismen.

I årene 1827-29 oppstår et gigantisk kappløp mellom Abel og C.G.J. Jacobi om teorien for elliptiske funksjoner. Resultatene de to kom fram til i denne tiden er blant de



mest betydningsfulle i analysen. Abel hadde nå en uhyre intens arbeidsperiode, og han produserte en rekke imponerende avhandlinger.

Selv om det ble arbeidet intenst med en stilling for Abel ved Universitetet, innså han nok at sjansene var større i Berlin, hvor Crelle arbeidet for å få en stilling til ham. Midt i sin intense arbeidsperiode tilbrakte Abel sommeren 1828 6 uker på Froland jernverk like ved Arendal hvor hans forlovede var blitt guvernante. De skal ha tilbrakt mye tid i den vakre hagen, og tenkte nok på giftermål og fast stilling i Berlin. Utover høsten 1828 var Abel syk og sengeliggende flere ganger. Han fortsatte sitt matematiske arbeide, men det kan virke som hans fysiske krefter av og til ikke strakk til.

Da det nærmet seg jul 1828, ville Abel igjen til Froland for å besøke sin forlovede. Han ble frarådet den anstrengende reisen, men ankom den 19. desember i slede godt innpakket i en stor frakk.

Etter et juleball begynte Abel å hoste blod. Han ble sengeliggende, reisen tilbake til Christiania og undervisningspliktene ved Universitetet måtte utsettes. Etter hvert ble det klart at han led av tuberkulose, noe som den gang var ensbetydende med en dødsdom.

Den 6. januar 1829 ble Abel ferdig med en to siders avhandling som han hadde skrevet på i juledagene på Froland Verk. Dette arbeidet er en genial oppsummering av den store Pariseravhandlingen, som han nå fryktet ikke skulle bli trykt. Det kom nå indikasjoner på at utsiktene for fast stilling i Berlin var bedret, og fra Christiania kom det beskjed om at Abel skulle få ordinær dosent-gasje.

Men dessverre tok sykdommen overhånd. Han klaget aldri over fysiske lidelser, men høylydt og med sterke ord klandret han sin tids legevitenskap som ikke hadde forsket og arbeidet seg fram til å bli herre over hans sykdom. Han lå på "Bukkerommet" på Froland Verk - det har fått navn etter tapetet på veggen. Det sies at han tenkte på matematikk til det siste, han prøvde å forklare sine tanker til de som våket over ham. Han ville ikke dø for han hadde så mye ugjort. Til slutt måtte han gi tapt, og han døde 6. april 1829 på Froland Verk med sin forlovede ved sin side. Han ble begravet på Froland kirkegård

den 13. april 1829.

Kort tid etter hans død kom det brev fra Crelle datert 8. april - 2 dager etter Abels død - om at han hadde fått stilling i Berlin. I Paris ble også hans store avhandling gjenfunnet. Lovordene begynte å strømme inn, og han ble året etter tildelt Akademiets store pris. Men for sent!

Niels Henrik Abels bidrag til matematikken er både geniale og fundamentale. De vil stå som lysende monumenter for all framtid. Hans arbeider har på en eller annen måte nesten påvirket all senere matematikk, det være seg analyse, algebra eller geometri.

Crelle skriver etter Abels død: "La oss hedre minnet om denne mann som utmerket seg like meget ved den mest usedvanlige begavelse som ved karakterens renhet, et av de sjeldne vesener naturen knapt skaper en gang i et århundre".

Abel har inspirert og vil fortsette å inspirere den internasjonale matematikk, og det er vårt håp at den nyopprettede Abelprisen i matematikk også vil bidra til dette. Vitenskapen er internasjonal, men vi kan godt tillate oss å være stolte over Niels Henrik Abel slik Bjørnstjerne Bjørnson uttrykte det i sin kantate til 100 års jubileet for hans fødsel i 1902:



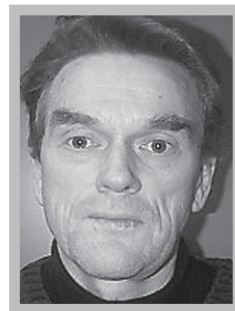
*En vestlandsgutt var han
på vel et snes år.
Nu verden ham eier
men gutten var vor.*

Om matematikk og musikk

Estetiske fag og matematikk

1. del

Af: Eystein Raude
Høgskolen i Vestfold, afd.
RI/LU
email: era@hive.no



Artiklen er delt op i flere dele. Anden del bringes i næste nummer af Matilde, som vil have Matematik og musikk som tema

Innledning.

Musikken tilhører de skjønne kunster. Den fløytespillende Euterpe var en av de ni musene, søstergudene, i følge gresk - romersk mytologi. Musikken inntar en spesiell plass blant kunstartene fordi den taler så direkte til "hjertene". Musikken beskriver intet (Wittgenstein, 1997.), den er bare musikk, og dens språk er universelt. Den kan sette følelser av ulik slag i sving og den kan, som vi kjenner det fra historien om kong David, berolige et plaget sinn. Musikken betyr også mye for mange av elevene. Ikke bare som "forbrukere", men som utøvere.

Selv om musikken er den mest abstrakte av alle menneskelige ytringer, lar den seg beskrive, ikke bare i ord, men også med matematiske begreper.

Matematikken er vitenskapenes dronning som næres av de andre vitenskaper og gir liv til disse. Matematikken er både en edel kunstart og et effektivt verktøy med hvilket man kan beskrive "verden" og foreta beregninger av både enkle og intrikate forhold.

Fellesrådet for kunstoffagene i skolen, FKS, har sammen med Landslaget for matematikk i skolen, LAMIS, ønsket å rette oppmerksomheten mot

- "hvordan praktiske og estetiske fag sammen med matematikk gjensidig kan påvirke hverandre i tverrfaglige undervisningsopplegg" og
- "å utvikle og utprøve nye undervisningsformer med aktiviteter som fremkaller undring, refleksjon og skaperglede"

For både musikk og matematikk gjelder kravet om kunnskaper og ferdigheter dersom resultatet av et tverrfaglige arbeid skal bli noe mer enn bare en "happening". Denne artikkelen ønsker å se noen sider av musikken i lys av matematikken.

Musikk er opptatt av å kombinere vokale og/eller instrumentale lyder for formens skjønnhet eller følelsesmessige uttrykk (som bare er komponistens; forfatterens anmerkning), vanligvis i følge kulturelle standarder for **rytme** og **melodi**, og i vestlig musikk også **harmon**i. Andre viktige komponenter i musikalsk lyd er **tone**, **tonefarge** og instrumentasjon (Encyclopedia Britannica, 1994 - 1999).

1. Toner. Intervaller. Stemninger.

Toner kan elevene lage ved enten å synge, blåse i en blokkfløyte, slå på en xylofon eller klimpre på en gitar. Tonehøyden er avhengig av antall svingninger per sekund eller frekvensen til det som svinger, enten det er stemmebåndene eller strengen. Ved f.eks. å presse ned en gitarstreng på ulike steder og deretter anslå den, vil en oppleve den direkte sammenhengen mellom strengenes lengde og tonehøyden.

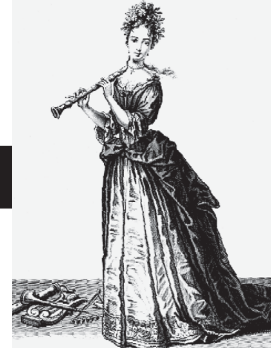
1.1. Pytagoreerne

oppdaget empirisk at de grunnleggende **intervallene** (toneavstandene) i musikken passet til elementene i *tetrakys* eller "fireheten" ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$), fordi de hadde **forholdene** $2 : 1$ (oktaven), $3 : 2$ (kvinten) og $4 : 3$ (kvarten). Disse intervallene ble karakterisert som **rene**. Dersom lengden av en fastspent streng er L , vil **grunntonen** tilsvare $2L$, fordi strengens lengde er halve bølgelengden. (Bølgelengden er altså $2L$.) Tonens frekvensen kan da skrives som lydfarten dividert på bølgelengden, λ . Ved å presse strengen ned på midten vil den framkalte frekvens bli dobbelt så stor, den såkalte oktaven.

Grekerne oppdaget at ved å presse ned strengen hhv. ved $\frac{2}{3}$ og $\frac{3}{4}$ av dens lengde fikk man

intervallene kalt kvint og kvart. Frekvensene i forhold til grunntonen er derfor hhv $\frac{3}{2}$ og $\frac{4}{3}$.

Den vanligste **skala** i vestens musikk er den **diatoniske** (en veksling mellom hele og halve trinn). Samtlige **pytagoreiske intervaller** ble utledet som et antall **rene kvinter** (3 hele og et halv trinn) minus et



nødvendig antall oktaver for å komme tilbake til den aktuelle oktaven ved hjelp av formelen $\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m$.

Man hadde oppdaget at intervaller oppover kunne “adderes” ved å multiplisere de tilsvarende frekvensforhold med hverandre og intervaller nedover kunne “subtraheres” ved å dividere frekvensforholdene med hverandre (å dividere med en brøk er som kjent ekvivalent med å multiplisere med den omvendte brøken). Frekvensforholdet i heltonetrinnet $c^1 - d^1$ (**stor sekund**) blir derfor

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$, fordi vi må tenke slik: $c^1 - g^1 - d^2 - d^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$. På tilsvarende måte blir forholdet

for intervallet $c - e$ (**stor ters**) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{64}$. Vi kjenner nå frekvensforholdene til intervallene

oktav, stor sekund, stor ters, ren kvart og ren kvint. I den diatoniske skala gjenstår derfor **stor sekst** ($c - a$) og **stor septim** ($c - h$). Gjør utregningene selv, og du vil komme til hhv. $\frac{27}{16}$ og $\frac{243}{128}$.

Hva så med halve tonetrinn? Intervallene er av grunnleggende betydning i musikken, både de melodiske, eller de som framkommer ved å springe fra en tone til den neste, og de harmoniske, dvs. de som framkommer når man slår an to toner samtidig. Spranget $e - f$ tilsvarer et halvt tonetrinn, og det

skulle da få frekvensforholdet $\frac{4}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{256}{243}$. Det samme vil gjelde for spranget $h - c$.

Ved siden av de rene og store intervaller finnes det forstørrede, små og forminskede intervaller. Disse framkommer ved å heve eller senke toner med halve trinn. Et intervall av den største betydning innenfor tradisjonell vestlig musikk er tersen, fordi den bestemmer dur - moll - tonaliteten. Den lille tersen, også kalt molltersen, består av 1 helt og et halvt trinn: $\frac{9}{8} \cdot \frac{256}{243} = \frac{32}{27}$. Videre avledninger gir stadig mer kompliserte brøker.

Et interessant forhold er følgende: 12 rene kvinter tilsvarer syv oktaver, det vil si at de er enharmoniske, eller at de tilsvarende toneartene er de samme. (Man ender på tonen *hiss* dersom man tar utgangspunkt i *c*, og *hiss* og *c* er samme tone i skalaen.) Ikke desto mindre er forholdet mellom disse brøkene forskjellig fra 1, og denne forskjellen som kalles en kommadifferanse, nærmere bestemt det

pytagoreiske komma, er $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{531441}{524288}$, som tilsvarer omtrent en feil på 1.4%! Dette

medfører at harmoniene ikke er helt ens, noe som har betydning når en skal spille på instrumenter der en kan veksle mellom toneartene, f.eks. et klaver eller en gitar.

1.2. Renstemming

kalles den stemmingen hvor samtlige intervaller avledes av et visst antall rene kvinter og store terser, her $\frac{5}{4}$. Det medfører at intervallene i den diatoniske skala på tilsvarende måte som for de

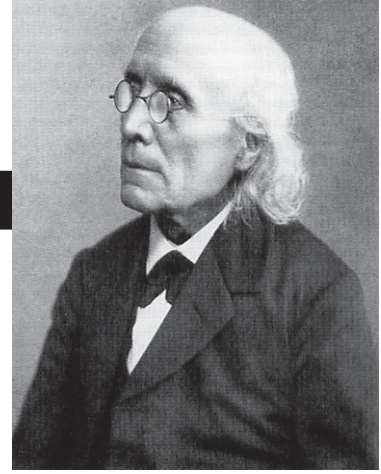
pytagoreiske intervaller blir $\frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}$. Disse (tilsiktete) enkle forholdene stammer fra

renessansens “scenario”, tallforholdene 1:2:3:4:5:6, som faller sammen med de første seks deltonene i **naturtonerekka**. De første intervallene i denne rekka er oktav, ren kvint, ren kvart, stor ters og liten ters.

Den store tersen har forholdstallet $\frac{5}{4}$, men den lille tersen $\frac{6}{5}$. Avstanden mellom den rene kvarten og

den store tersen blir $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$. Dette er et halvt tonetrinn. Den lille tersen blir derfor $\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{6}{5}$. Den

store seksten blir $\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{3}$, noe som skyldes at man i den renstemte diatoniske skalaen hadde to



heltonetrinn, et stort og et lite, hhv. $\frac{9}{8}$ og $\frac{10}{9}$. Forskjellen mellom dem er lik forskjellen mellom tersene i

den pytagoreiske og den renstemte skala: $\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$ som kalles det **syntoniske** komma, som utgjør en feil på 1.3%!

Vi har sett at man opererer med ulike hel- og halvtonetrinn i den pytagoreiske og den rene stemming, noe som fører til problemer bl.a. med samklang. Det er ønskelig å bruke toneartsutsving ("å gå over til andre tonearter") og tonearter med faste fortegn. Derfor er det nødvendig med en utjevning, en **likesvevende temperering**.

1.3. Likesvevende temperering.

Anta at vi skal spille en G-dur skala på et piano med pytagoreisk stemming. Vi må da bestemme frekvensforholdet for tonen *fiss* som ikke fins i C-dur skalaen. For å finne tonen *fiss* må vi gå seks rene kvinter opp og 3 oktaver ned, noe som gir $\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{729}{512}$. Frekvensforholdet mellom *fiss* og *g*, den syvende og åttende tonen i en G-dur skala, skulle egentlig være lik frekvensforholdet for en pytagoreisk halvtone, $\frac{256}{243}$, men det er faktisk litt lavere, fordi vi må ta forholdet mellom svingetallene for *fiss* og *g* ($3/2$). Forholdet blir 0.94922.

Middelverdien for de ulike heltonetrinn blir $\frac{\frac{9}{8} + \frac{10}{9}}{2} = \frac{161}{144} \approx 1.11806$. Med likedeling skulle heltonetrinnet bli omtrent 1.11803. (Kaller vi **primens** svingetall for 1 og heltonetrinnet x , får skalaens tredje tone svingetallet x^2 . Dette gir likningen $x^2 = \frac{5}{4}$.) Ved temperert avstemming blir de fem heltonetrinnene delt inn i halvtonetrinn og alle halvtonetrinnene gjort like store. På den måten finner vi halvtonetrinnet x til å bli $x = \sqrt[12]{2} \approx 1.05946$.

I praksis trekker en fra eller legger til passende brøkdeler av det pytagoreiske og syntoniske komma, i første rekke fra kvinter. Det blir da ofte for små kvinter og for store terser. Pianostemmeren stemmer først etter intervallene oktav, kvint og kvart, og så justerer han/hun halvtonetrinnene opp eller ned så intervallene høres like. Det siste avgjøres etter hans/hennes gehør. (Bjørklund, 1966.)

1.4. Centen og den fechnerske lov.

I 1864 introduserte engelskmannen A.J.Ellis enheten **cent**, C, for intervallberegninger. Til grunn for innføringen av den nye beregningsmåten for intervaller ligger en oppdagelse den tyske fysiker og filosof Gustav Theodor Fechner (1801 - 1887), <http://www.stern.nyu.edu/~wstarbuc/Janusweb/sld004.htm>, gjorde innenfor området psykofysikk, nemlig en lov for fysiologiske sansefølelser (Rignes, 1978). Den sier at økningen i sansefølelsen er proporsjonal med økningen i sansepåvirkningen og omvendt proporsjonal med sansepåvirkningen. Dersom vi bruker denne loven på lydfølelser, setter vi for sansepåvirkningen frekvensen f og sansefølelsen lydstyrken L . Dette gir den matematiske sammenhengen $dL = k \cdot \frac{df}{f}$. k er en

konstant som bestemmes ut fra gitte betingelser. Integralregning gir $\ln \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{k} (L_2 - L_1)$. Overgang til

logaritmer med grunntallet 10 gir $\lg \frac{f_2}{f_1} = \frac{0.4343}{k} (L_2 - L_1)$.



Enheten *cent* er $\frac{1}{1200}$ av en oktav. Dette gir oss verdien på k : $\lg 2 = \frac{0.4343}{k} \cdot 1200$ eller $k = 1731.256046$. Antall *cents* for et aktuelt intervall kan derfor beregnes som $L_2 - L_1 = C = 3986.313715 \cdot \lg \frac{f_2}{f_1}$.

Alle de 12 like store halvtonetrinnene i den likesvevende temperering blir delt inn i like store deler (100 C = 1 temperert halvtone). Like store vil si konstant frekvensforhold. Den rene kvinten får derfor verdien 700 C i forhold til tolvtonesystemet, 702 C i forhold til de pytagoreiske og rene stemminger.

($C = 3986.313715 \cdot \lg \frac{3}{2} = 701.96$.) Verdien 150 C viser direkte at intervallet ligger midt mellom et hel-

og et halvtonetrinn. I det pytagoreiske system beregner vi intervallet ren kvint + heltone ved $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$, dvs. ved multiplikasjon. I det nye systemet **adderer** vi enhetene $702 \text{ C} + 204 \text{ C} = 906 \text{ C}$. ($C = 3986.313715 \cdot \lg \frac{27}{16} = 906$.)

Det er interessant å se at grekerne hadde empirisk oppdaget den *fechnerske lov*! Sammenhengen mellom multiplikasjon og addisjon går kanskje tydeligere fram dersom vi skriver

$$C_{kv \text{ int}} + C_{heltone} = k \cdot \left(\lg \frac{3}{2} + \lg \frac{9}{8} \right) = k \cdot \lg \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8}.$$

Det er ellers verdt å legge merke til at det pytagoreiske komma er omtrent 24 cents, dvs. en åttedels tone. (Det fortelles at lille Wolfgang Amadeus (Mozart) en gang for sin pappa påpekte at fiolinen hans var uren, og at det dreide seg om en kvart halvtone. For kammertonens vedkommende skulle det dreie seg om en "urenhet" på omtrent 6 Hz!) Alt etter hvor elevene befinner seg i skoleverket går det an å utforske de forholdene vi her har betraktet. Et eksempel kunne være å bruke flasker av ulik høyde og med varierende vannmengde til å lage den diatoniske skala og spille enkle melodier; både pytagoreiske og renstemte melodier, og sammenlikne disse med de melodiene en får ved å spille på et temperert klaver. I området ca. 50 - 500 Hz er den minste hørbare frekvensforandring 1 - 2 Hz ved lydtryknivået 40 dB. (Bjørklund.) (En må bare huske på at grunntonens bølgelengde beregnes ut fra det fysiske forhold at avstanden mellom vannflaten og flaskeåpningen utgjør er firedel av bølgelengden.)

Overgangen fra pytagoreisk stemming til lik temperering tok århundrer og er en parallell til forholdet mellom matematikk og musikk. På pytagoreernes tid var musikk en matematisk disiplin som omhandlet tallforhold, brøker og proporsjoner. Musikk som en del av matematikken holdt seg helt opp til renessansen. Likestemming, eller avviket fra den pytagoreiske, ble ikke virkelig populær før rundt 1630, da Fader Mersenne formulerte uvurderlige regler for stemming ved hjelp av "svevinger", og som brukes den dag i dag. (Garland og Kahn, 1995.) Tabellen nedenfor viser en sammenlikning mellom pytagoreisk, ren og temperert stemming.

Pytagoreisk stemming	Ren stemming	Liketemperert stemming	Frekvenser i en C-dur skala med kammertone 440 Hz
f (primens frekvens)	f	f	$\approx 262 \text{ Hz}$
$9/8 f$	$9/8 f$	$2^{\frac{1}{6}} \approx 1.122 f$	$\approx 294 \text{ Hz}$
$81/64 f$	$5/4 f$	$2^{\frac{1}{3}} \approx 1.260 f$	$\approx 330 \text{ Hz}$
$4/3 f$	$4/3 f$	$2^{\frac{5}{12}} \approx 1.335 f$	$\approx 349 \text{ Hz}$
$3/2 f$	$3/2 f$	$2^{\frac{7}{12}} \approx 1.498 f$	$\approx 392 \text{ Hz}$
$27/16 f$	$5/3 f$	$2^{\frac{3}{4}} \approx 1.682 f$	$= 440 \text{ Hz}$
$243/128 f$	$15/8 f$	$2^{\frac{11}{12}} \approx 1.888 f$	$\approx 494 \text{ Hz}$
$2 f$	$2 f$	$2 f$	$\approx 523 \text{ Hz}$

**Musikartiklen fortsættes i Matilde 27,
hvor vi også hører om Arnold Schönberg**



Arnold Schönberg

Dodekafoniens eller 12-tonemusikkens skaber

Det var Arnold Schönbergs analytiske sans, der i 1922 førte til løsning af det musikalske formproblem indenfor totalitetens rammer. Når det blev ham, der kom til at tilføre den total-bestemte musik rækkeprincippet, skyldes det at han i sin undervisning, der hovedsagelig koncentrerede sig om analyse af fortidens storværker, bestandig søgte udover den blotte registrering af værkernes ydre overflade og ved indgående motivanalyse søgte at afdække indre, psykologiske sammenhænge mellem formdele, som den sædvanlige analyse ikke kunne konstatere. Det var især Beethovens og visse af Brahms værker, han på denne måde kulegravede. Han konstaterede, at alle selv de mest kontrasterende formelementer indenfor samme komposition meget ofte ad rækketeknisk vej kan føres tilbage til et grundmotiv eller motivkompleks, som hele værket er funderet på.



Abelprisen

- en sunn og frisk treåring

Af: Helge Holden (NTNU) email:
holden@math.ntnu.no



Etter tre år med Abelprisen er det naturlig å prøve å gjøre opp status. La oss kort rekapitulere. Statsminister Stoltenberg annonserte høsten 2001 at Regjeringen ville etablere en Abelpris i matematikk. Fondet ble etablert året etter, og den første prisen ble utdelt i 2003.

Formålet er beskrevet slik:

Hovedformålet med å opprette Niels Henrik Abels minnefond er å tildele en internasjonal pris for fremragende vitenskapelig arbeid i matematikk. Prisen skal bidra til å heve matematikkfagets status i samfunnet og stimulere barn og unge til å bli interessert i matematikk.

Personlig var jeg usikker på hvilken betydning det ville ha for norsk matematikk at vi hvert år skulle utdele en pris til matematiker, trolig en eldre, utenlandsk mann ukjent for alle unntatt noen få fagfeller. Og videre hvordan dette skulle heve faget status og stimulere barn og ungdom. På mange måter føler jeg at min skepsis er tilbakevist. Prisen kommer nok i mange år til å bli delt ut til eldre utenlandske menn som kan ferdes overalt uten å bli gjenkjent. Men rundt prisutdelingen og en rekke tilhørende arrangementer er det sikret en deltagelse, et engasjement og en synlighet som både involverer fagfolkene — oss — og barn og ungdom.

I forbindelse med prisoverrakkelsen har det vært en rekke aktiviteter over hele landet for skolebarn i alle aldre. Mitt inntrykk er at disse har vært svært vellykkede og er med på å stimulere barn og ungdom. Vinnerne av Kappabel og Abelkonkurransen er blitt inkludert. Abelprisvinnerne har alle vært sporty og stilt opp.

Prisen har gitt Videnskapsakademiet et nytt løft: Akademiet har fått et "oppdrag" og ressurser, og har fått velfortjent oppmerksomhet i mediene. Norsk matematisk forening og Norsk matematikkråd er blitt revitalisert. Foreningen har ansvaret for *Abelsymposiene*, og det krever større seriøsitet og aktivitet i Foreningen. Symposiene har så langt trukket til seg svært gode navn, og symposiene skiller seg ut i den store mengden av konferanser. Det er viktig at Foreningen inkluderer matematikkens randområder på en sjenerøs måte i tildeling av tema, både fordi vi etterhvert vil ha uttømt temaene i de tradisjonelle matematikkdisiplinene, men også for å vise at vi tror på matematikkens vekselvirkning med andre felt. Fysikk, kjemi, biologi, informatikk, økonomi og teknologi er disipliner der matematikk kan spille en enda viktigere rolle. Nye disipliner kan komme til. Dette kan godt avspeile seg i *Abelsymposiene*. *Abelstipend* til yngre matematikere som arbeider på sin mastergrad kan gi oppmuntring til forskeraspiranter som fortsatt lurer på om de tør å satse

på en matematisk karriere. Matematikkrådet har med ansvaret for *Holmboeprisen* klart å etablere seg i offentligheten på en måte som ville vært umulig før. Valget av prisvinner betyr mye for prisens anerkjennelse. Kriteriene er på en måte vanskelige å håndtere, men over tid må den utforme sin rolle. Alle disse aktivitetene er—"spinnoffs" i forhold til hovedformålet, nemlig å tildele Abelprisen. Det er klart at den viktigste handlingen uten sammenligning forøvrig er valget av vinneren. Prisens prestisje internasjonalt er direkte knyttet til komitéens evne til å velge vinnere som matematikere over hele verden kan bifalle. Det er ikke det samme som at alle er enige om at vinneren er den fremste kandidaten, men heller at det er valgt en person som det er alment akseptert fortjener prisen. Så langt har komitéens valg vært veldig gode. Over tid må komitéens valg utspenne prisens bredde slik det er beskrevet i retningslinjene, nemlig at "Abelprisen er en internasjonal pris for fremragende vitenskapelig arbeid innen matematikk, inkludert matematiske aspekter ved informasjonsteknologi, matematisk fysikk, sannsynlighetsteori, numerisk analyse og beregningsvitenskap, statistikk, samt anvendelser av matematikk i andre vitenskaper." Her ligger komitéens store utfordring. Ved

valget av Lax som vinner i år viste komitéen evne til å inkludere anvendelser uten å gå på bekostning av tematisk dybde og kvalitet. Dersom man klarer å vise faglig bredde i tildeling av Abelprisen og samtidig holde oppe det faglige nivået, er man med på å øke prestisjen til prisen — det blir gjevere å motta prisen dersom den inkluderer mer. Videre vil en slik tildeling være med på å vise at matematikk er relevant også for andre fag.

Det er en fordel at prisen deles ut i et lite land som Norge. Vi skal ikke se bort fra at Norges gode rykte i forbindelse med utdelingen av Nobels fredspris smitter over på Abelprisen. Videre ville større land fort kommet i problemer når det gjelder tildeling til egne matematikere, et problem vi dessverre unngår. Om vi kommer dithen at prisen bare blir omtalt som “matematikens Nobelpris” uten ytterlige kommentarer eller syrlige bemerkninger om et oppblåst norsk selvbylde, kan bare fremtiden vise. Men muligheten er der. Det tok lang tid før Nobelprisene ble anerkjent som de gjevste prisene innen sine områder, og de har jo hatt noen feilskjær gjennom tidene.

Nobelprisen i fysikk til utviklingen av fyrlys eller tildelingen i medisin for lobotomi, står vel ikke frem som riktige tildelinger i etterpåklokskapens klare lys. Det har vært sagt mange ganger før at Norge er et land med få kulturtradisjoner, og pressedekningen av Abelprisen gir vel nok et uttrykk for dette. Omtale av prisen og særlig annonseringen av vinneren i norske medier har vært mindre enn vi hadde håpet. Den har kanskje ikke vært mindre enn det som var realistisk, men mindre enn vi kunne ønsket. Å få et innslag på TVnyhetene om kvelden er fortsatt vanskelig. Internasjonal omtale arbeides det med kontinuerlig; det har lett for å ende opp med oppslag i vinnerens hjemland og endel større og brede kulturavisser. Dekningen i *Notices of the American Mathematical Society* og *Newsletter of the European Mathematical Society* har vært uvurderlig for å bringe kunnskap om prisen ut til matematikere.

Men det er fortsatt hvite flekker på kartet: I det tidligere Sovjetunionen, Kina og Japan har prisen mindre synlighet enn ønsket. Det er mange matematikkpriser, flere med høyere monetær verdi enn Abelprisen, og synlighet og markedsføring av prisen må det arbeides for hele tiden. Prisbeløpet har stått stille på 6 mill. NOK siden innføringen, og det er nå på sin plass å oppjustere beløpet, enten til 1 mill. \$, eller for å gjøre det mer europeisk (men til en høyere pris), 1 mill. e. De nyetablerte Kavliprisene er hver på 1 mill. \$. Nobelprisen er i år på 10 mill. SEK (ca 8,3 mill. NOK). Dessverre er det slik med mange priser at prestisjen henger sammen med verdien av den. Aftenposten hadde en leder den 27. mars 2004 der den oppsummerte prisens fire “handicap”:

- Den er nyetablert.
- Den gis som “heder til eksperter på et felt hvor få andre enn de aller fremste av deres kolleger er i stand til å vurdere prestasjonen.”
- “Den [ligger] på et nivå hvor det heller ikke er mulig - å forklare eller popularisere innsatsen.”



Abel-komiteen

- “Prisens lave alder at det er nokså mye oppsamlingsarbeid som må gjøres.”

Det første og det siste punktet vil naturlig forsvinne over tid. “Ventelisten” er over når man velger en prisvinner som er under 60 år (eller kanskje 70 år?). En kjempe som Israel Gel’fand ble trolig vurdert som for gammel allerede det første året.

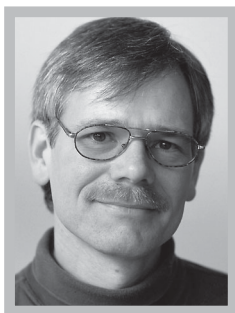
Utilgjengeligheten er det vanskelig å gjøre noe med. For oss som har måttet prøve lykken med å popularisere vinnerens arbeid, er det lett å være enige om at jobben på mange måter er umulig. Man prøver å kommunisere et budskap til en målgruppe med varierende og primært dårlige

kunnskaper i matematikk. Man ender opp med gjøre en mellomting som tilfredsstiller få. I forsøket på å gjøre fremstillingen populær gjøres det “rene” mer anvendt, men det er et tveegget sverd. Jeg tror man må tåle å si at dette er dyp og viktig matematikk som har anvendelser stort sett innen andre deler av matematikken, og inngår i en helhet i matematikken. Konsekvensene utenfor matematikken kan godt være fraværende eller være så indirekte at de er umulige å få frem til almenheten. For oss matematikere er offentliggjoringen i Akademiet av vinneren den store dagen; perioden med spekulasjoner og forventninger er over. Men jeg tror vi må innse at for alle andre er tiden for prisutdelingen i mai den store begivenheten. Prisoverrekkelsen i Aulaen, pressekonferanse, intervju, deltagelse av Konge og Regjering gjør det til Abeldagen. Det er i den uken at vi har sjanse til å få inn kronikker, artikler og omtale av vinneren. I uken med tildelingen er det bygget opp et program som er svært vellykket og gjennomtenkt. Å se en fullsatt Aula med Kongen som skal dele ut en pris i vårt fag, matematikk, kan fortsatt gi frysninger på ryggen. Deltagelsen og oppslutningen er stor. Abelforelesningene er en betydelig utfordring. Her skal flere behov oppfylles: Det skal holdes forelesninger på høyt faglig nivå som også skal være tilgjengelige for et bredere publikum. For en som alltid synes det er vanskelig å forstå matematikkforelesninger, har det vært en blandet erfaring. Idéen med bokutstilling av og om vinneren i forbindelse med Abelforelesningene er god.

Utdeling av Tsjortjer kan utvides med salg av andre gjenstander, f.eks. kopper (“mugs”), og de kan gjerne knyttes til årets pris slik at det kan bli samlergjenstander. Men de må ha høy kvalitet. Nettsidene kan alltid gjøres bedre. Det er naturlig å gjøre sidene til nettstedet for alt som har med Abel å gjøre: Scanning av hans samlede verker, salg av de samme (er allerede gjort), samt salg av bøker og gjenstander om Abel, kort sagt gjøre nettstedet til “the Abel web site”. Merkevarebyggingen av Abelprisen og de tilhørende aktiviteter har så lang vært svært vellykket. Arbeidet er aldri sluttført, og må videreføres med høy kvalitet. Situasjonen for norsk matematikk er for all tid endret. Og vi har vært heldige at mediene ikke har gjort spørsmålet om når vi får den første norske Abelprisvinneren til en stor sak.

Interview with Peter D. Lax

Interviewers: Martin Raussen and Christian Skau



The interview took place in Oslo on the 23rd of May, 2005, prior to the Abel Prize celebrations. It has also appeared in Newsletter of the EMS.

On behalf of the Norwegian and Danish Mathematical Societies we would like to congratulate you on winning the Abel Prize for 2005.

You came to the U.S. in 1941 as a 15 year old kid from Hungary. Only three years later, in 1944, you were drafted into the U.S army. Instead of being shipped overseas to the war front, you were sent to Los Alamos in 1945 to participate in the Manhattan project, building the first atomic bomb. It must have been awesome as a young man to come to Los Alamos taking part in such a momentous endeavour, and to meet so many legendary famous scientists: Fermi, Bethe, Szilard, Wigner, Teller, Feynman, to name some of the physicists, and von Neumann and Ulam, to name some of the mathematicians. How did this experience shape your view of mathematics and influence your choice of research field within mathematics?

In fact, I returned to Los Alamos after I got my Ph.D. in 1949 for a year's stay and then spent many summers as a consultant. The first time I spent in Los Alamos, and especially the later exposure, shaped my mathematical thinking. First of all it was the experience of being part of a scientific team, not just of mathematicians, people with different outlooks, and the aim being not a theorem, but a product. One can not learn that from books, one must be a participant, and for that reason I urge my students to spend at least a summer as a visitor at Los Alamos. Los Alamos has a very active visitor's program. Secondly, it was there - that was in the 50's - that I became imbued with the utter importance of computing for science and mathematics. Los Alamos, under the influence of von Neumann, was for a while in the 50's and the early 60's the undisputed leader in computational science.

Research Contributions

May we come back to computers later? First some questions about some of your main research contributions to mathematics:

You have made outstanding contributions to the theory of non-linear partial differential equations. For the theory and numerical solutions of hyperbolic systems of conservation laws your contribution has been decisive, not to mention your contribution to the understanding of the propagation of discontinuities, so called shocks. Could you describe in a few words how you were able to overcome the formidable obstacles and difficulties this area of mathematics presented?

Well, when I started to work on it I was very much influenced by two papers. One was Eberhard Hopf's on the viscous limit of Burgers' equation, and the other was the von Neumann – Richtmyer paper on artificial viscosity. And looking at these examples I was able to see what the general theory might look like.

The astonishing discovery by Kruskal and Zabusky in the 1960's of the role of solitons for solutions of the Korteweg – de Vries (KdV) equation, and the no less astonishing subsequent explanation given by several people that the KdV equation is completely integrable, represented a revolutionary development within the theory of non-linear partial differential equations. You entered this field with an ingenious original point of view, introducing the so-called Lax-pair, which gave an understanding of how the inverse scattering transform applies to equations like the KdV, and also to other non-linear equations which are central in mathematical physics, like the sine-Gordon and the non-linear Schrödinger equation. Could you give us some thoughts on how important you think this theory is for mathematical physics and for applications, and how do you view the future of this field?

Perhaps I start by pointing out that the astonishing phenomenon of the interaction of solitons was discovered by numerical calculations, as was predicted by von Neumann some years before, namely that calculations will reveal extremely interesting phenomena. Since I was a good friend of Kruskal I learned early about his discoveries, and that started me thinking. It was quite clear that there are infinitely many conserved quantities, and so I asked myself: How can you generate all at once an infinity of conserved quantities. I thought if you had a transformation that preserved the spectrum of an operator then that would be such a transformation, and that turned out to be a very fruitful idea applicable quite widely.

Now you ask how important is it? I think it is pretty important. After all, from the point of view of technology for the transmission of signals, signalling by solitons is very important and a promising future technology in trans-oceanic transmission. This was developed by Linn Mollenauer, a brilliant engineer at Bell Labs. It has not yet been put into practice, but it will some day. The interesting thing about it is that classical signal theory is entirely linear, and the main point of soliton signal transmission is that the equations are non-linear. That's one aspect of the practical importance of it.

As for the theoretic importance: the KdV equation is completely integrable, and then an astonishing number of other completely integrable systems were discovered. Completely integrable systems can really be solved in the sense that the general population uses the word solved. When a mathematician says he has solved the problem he means he knows the solution exists, that it's unique, but very often not much more.

Now the question is: Are completely integrable systems exceptions to the behavior of solutions of non-integrable systems, or is it that other systems have similar behaviour, only we are unable to analyse it? And here our guide might well be the Kolmogorov-Arnold-Moser theorem which says that a system near a completely integrable system behaves as if it were completely integrable. Now, what *near* means is one thing when you prove theorems, another when you do experiments. It's another aspect of numerical experimentation revealing things. So I do think that studying completely integrable systems will give a clue to the behaviour of more general systems as well.

Who could have guessed in 1965 that completely integrable systems would become so important?

The next question is about your seminal paper "Asymptotic solutions of oscillating initial value problems" from 1957. This paper is by many people considered to be the genesis of Fourier Integral Operators. What was the new viewpoint in the paper that proved to be so fruitful?

It is a micro-local description of what is going on. It combines looking at the problem in the large and

in the small. It combines both aspects and that gives it its strengths. The numerical implementation of the micro-local point of view is by wavelets and similar approaches, which are very powerful numerically.

May we touch upon your collaboration with Ralph Phillips - on and off over a span of more than 30 years - on scattering theory, applying it in a number of settings. Could you comment on this collaboration, and what do you consider to be the most important results you obtained?

That was one of the great pleasures of my life! Ralph Phillips is one of the great analysts of our time and we formed a very close friendship. We had a new way of viewing the scattering process with incoming and outgoing subspaces. We were, so to say, carving a semi-group out of the unitary group, whose infinitesimal generator contained almost all the information about the scattering process. So we applied that to classical scattering of sound waves and electromagnetic waves by potentials and obstacles. Following a very interesting discovery of Faddeev and Pavlov, we studied the spectral theory of automorphic functions. We elaborated it further, and we had a brand new approach to Eisenstein series for instance, getting at spectral representation via translation representation. And we were even able to contemplate - following Faddeev and Pavlov - the Riemann hypothesis peeking around the corner.

That must have been exciting!

Yes! Whether this approach will lead to the proof of the Riemann hypothesis, stating it, as one can, purely in terms of decaying signals by cutting out all standing waves, is unlikely. The Riemann hypothesis is a very elusive thing. You may remember in Peer Gynt there is a mystical character, the Boyg, which bars Peer Gynt's way wherever he goes. The Riemann hypothesis resembles the Boyg!

Which particular areas or questions are you most interested in today?

I have some ideas about the zero dispersion limit.

Pure and applied mathematics

May we raise a perhaps contentious issue with you: pure mathematics versus applied mathematics. Occasionally one can hear within the mathematical community statements that the theory of non-linear partial differential equations, though profound and often very important for applications, is fraught with ugly theorems and awkward arguments. In pure mathematics, on the other hand, beauty and aesthetics rule. The English mathematician G.H. Hardy is an extreme example of such an atti-

tude, but it can be encountered also today. How do you respond to this? Does it make you angry?

I don't get angry very easily. I got angry once at a dean we had, terrible son of a bitch, destructive liar, and I got very angry at the mob that occupied the Courant Institute and tried to burn down our computer. Scientific disagreements do not arouse my anger. But I think this opinion is definitely wrong. I think Paul Halmos once claimed that applied mathematics was, if not bad mathematics, at least ugly mathematics, but I think I can point to those citations of the Abel Committee dwelling on the elegance of my works!

Now about Hardy: When Hardy wrote "Apology of a Mathematician" he was at the end of his life, he was old, I think he had suffered a debilitating heart-attack, he was very depressed. So that should be taken into account. About the book itself: There was a very harsh criticism by the chemist Frederick Soddy, who was one of the co-discoverers of the isotopes - he shared the Nobel Prize with Rutherford. He looked at the pride that Hardy took in the uselessness of his mathematics and wrote: "From such cloistral clowning the world sickens". It was very harsh because Hardy was a very nice person.

My friend Joe Keller, a most distinguished applied mathematician, was once asked to define applied mathematics and he came up with this: "Pure mathematics is a branch of applied mathematics". Which is true if you think a bit about it. Mathematics originally, say after Newton, was designed to solve very concrete problems that arose in physics. Later on these subjects developed on their own and became branches of pure mathematics, but they all came from applied background. As von Neumann pointed out, after a while these pure branches that develop on their own need invigoration by new empirical material, like some scientific questions, experimental facts and, in particular, some numerical evidence.

In the history of mathematics, Abel and Galois may have been the first great mathematicians that one may describe as "pure mathematicians", not being interested in any "applied" mathematics as such. However, Abel did solve an integral equation, later called "Abel's integral equation", and Abel gave an explicit solution, which incidentally may have been the first time in the history of mathematics that an integral equation had been formulated and solved. Interestingly, by a simple reformulation one can show that the Abel integral equation and its solution are equivalent to the Radon Transform, the mathematical foundation on which modern medical tomography is based.

Examples of such totally unexpected practical applications of pure mathematical results and theorems abound in the history of mathematics - group theory that evolved from Galois' work is another striking example. What are your thoughts on this phenomenon? Is it true that



Peter D. Lax

deep and important theories and theorems in mathematics will eventually find practical applications, for example in the physical sciences?

Well, as you pointed out this has very often happened: Take for example Eugene Wigner's use of group theory in quantum mechanics. And this has happened too often to be just a coincidence. Although, one might perhaps say that other theories and theorems which did not find applications were forgotten. It might be interesting for a historian of mathematics to look into that phenomenon. But I do believe that mathematics has a mysterious unity which really connects seemingly distinct parts, which is one of the glories of mathematics.

You have said that Los Alamos was the birthplace of computational dynamics, and I guess it is safe to say that the U.S. war effort in the 1940's advanced and accelerated this development. In what way has the emergence of the high-speed computer altered the way mathematics is done? Which role will high-speed computers play within mathematics in the future?

It has played several roles. One is what we saw in Kruskal's and Zabusky's discovery of solitons, which would not have been discovered without computational evidence. Likewise the Fermi-Pasta-Ulam phenomenon of recurrence was also a very striking thing which may or may not have been discovered without the computer. That is one aspect.

But another is this: in the old days, to get numerical results you had to make enormously drastic simplifications if your computations were done by hand, or by simple computing machines. And the talent of what drastic simplifications to make was a special talent that did not appeal to most mathematicians. Today you are in an entirely different situation. You don't have to put the problem on a Procrustean bed and mutilate it before

you attack it numerically. And I think that has attracted a much larger group of people to numerical problems of applications - you could really use the full theory. It invigorated the subject of linear algebra, which as a research subject died in the 1920's. Suddenly the actual algorithms for carrying out these operations became important. It was full of surprises, like fast matrix multiplication. In the new edition of my linear algebra book I will add a chapter on the numerical calculation of the eigenvalues of symmetric matrices.

You know it's a truism that due to increased speed of computers, a problem that took a month 40 years ago can be done in minutes, if not seconds today. Most of the speed-up is attributed, at least by the general public, to increased speed of computers. But if you look at it, actually only half of the speed-up is due to this increased speed. The other half is due to clever algorithms, and it takes mathematicians to invent clever algorithms. So it is very important to get mathematicians involved, and they are involved now.

Could you give us personal examples of how questions and methods from applied points of view have triggered "pure" mathematical research and results? And conversely, are there examples where your theory of non-linear partial differential equations, especially your explanation of how discontinuities propagate, have had commercial interests? In particular, concerning oil exploration, so important for Norway!

Yes, oil exploration uses signals generated by detonations that are propagated through the earth and through the oil reservoir and are recorded at distant stations. It's a so-called inverse problem. If you know the distribution of the densities of materials and the associated waves' speeds, then you can calculate how signals propagate. The inverse problem is that if you know how signals propagate, then you want to deduce from it the distribution of the materials. Since the signals are discontinuities, you need the theory of propagation of discontinuities. Otherwise it's somewhat similar to the medical imaging problem, also an inverse problem. Here the signals do not go through the earth but through the human body, but there is a similarity in the problems. But there is no doubt that you have to understand the direct problem very well before you can tackle the inverse problem.

Hungarian mathematics

Now to some questions related to your personal history. The first one is about your interest in, and great aptitude for, solving problems of a type that you call "Mathematics Light" yourself. To mention just a few, already as a 17 year old boy you gave an elegant solution to a problem that was posed by Erdős and is related to a certain inequality for polynomials, which was earlier proved by

Bernstein. Much later in your career you studied the so-called Polya function which maps the unit interval continuously onto a right-angled triangle, and you discovered its amazing differentiability properties. Was problem solving specifically encouraged in your early mathematical education in your native Hungary, and what effect has this had on your career later on?

Yes, problem solving was regarded as a royal road to stimulate talented youngsters, and I was very pleased to learn that here in Norway they have a successful high-school contest, where the winners were honoured this morning. But after a while one shouldn't stick to problem solving, one should broaden out. I return ever once in a while to it, though.

Back to the differentiability of the Polya function: I knew Polya quite well having taken a summer course with him in '46. The differentiability question came about this way: I was teaching a course on real variables and I presented Polya's example of an area-filling curve, and I gave as homework to the students to prove that it's nowhere differentiable. Nobody did the homework, so then I sat down and I found out that the situation was more complicated.

There was a tradition in Hungary to look for the simplest proof. You may be familiar with Erdős' concept of The Book. That's The Book kept by the Lord of all theorems and the best proofs. The highest praise that Erdős had for a proof was that it was out of The Book. One can overdo that, but shortly after I had got my Ph.D., I learned about the Hahn-Banach theorem, and I thought that it could be used to prove the existence of Green's function. It's a very simple argument - I believe it's the simplest - so it's out of The Book. And I think I have a proof of Brouwer's Fixed Point Theorem, using calculus and just change of variables. It is probably the simplest proof and is again out of The Book. I think all this is part of the Hungarian tradition. But one must not overdo it.

There is an impressive list of great Hungarian physicists and mathematicians of Jewish background that had to flee to the US after the rise of fascism, Nazism and anti-Semitism in Europe. How do you explain this extraordinary culture of excellence in Hungary that produced people like de Hevesy, Szilard, Wigner, Teller, von Neumann, von Karman, Erdős, Szegő, Polya, yourself, to name some of the most prominent ones?

There is a very interesting book written by John Lukacs with the title "Budapest 1900: A Historical Portrait of a City and its Culture", and it chronicles the rise of the middle class, rise of commerce, rise of industry, rise of science, rise of literature. It was fuelled by many things: a long period of peace, the influx of mostly Jewish population from the East eager to rise, an intellectual tradition. You know in mathematics, Bolyai was a culture hero to

Hungarians, and that's why mathematics was particularly looked upon as a glorious profession.

But who nurtured this fantastic flourishing of talent, which is so remarkable?

Perhaps much credit should be given to Julius König, whose name is probably not known to you. He was a student of Kronecker, I believe, but he also learned Cantor's set theory and made some basic contribution to it. I think he was influential in nurturing mathematics. His son was a very distinguished mathematician, Denes König, really the father of modern graph theory. And then there arose extraordinary people. Leopold Fejér, for instance, had enormous influence. There were too many to fill positions in a small country like Hungary, so that's why they had to go abroad. Part of it was also anti-Semitism.

There is a charming story about the appointment of Leopold Fejér, who was the first Jew proposed for a professorship at Budapest University. There was opposition to it. At that time there was a very distinguished theologian, Ignatius Fejér, in the Faculty of Theology. Fejér's original name was Weiss. So one of the opponents, who knew full well that Fejér's original name had been Weiss, said pointedly: "This professor Leopold Fejér that you are proposing, is he related to our distinguished colleague Father Ignatius Fejér?" And Eötvös, the great physicist who was pushing the appointment, replied without batting an eyelash: "Illegitimate son". That put an end to it.

And he got the job?

He got the job.

Scribbles that changed the course of human affairs

The mathematician Stantician Stan Stananniss. He wrote in his autobiography "Adventures of a Mathematician": "It is still an unending source of surprise for me to see how a few scribbles on a blackboard, or on a sheet of paper, could change the course of human affairs". Do you share this feeling? And what are your feelings to what happened to Hiroshima and Nagasaki, to the victims of the explosions of the atomic bombs that brought an end to World War II?

Well, let me answer the last question first. I was in the army, and all of us in the army expected to be sent to the Pacific to participate in the invasion of Japan. You remember the tremendous slaughter that the invasion of Normandy brought about. That would have been nothing compared to the invasion of the Japanese mainland. You remember the tremendous slaughter on Okinawa and Iwo Jima. The Japanese would have resisted to the last man. The atomic bomb put an end to all this and made an invasion unnecessary. I don't believe reversionary historians who say: "Oh, Japan was

already beaten, they would have surrendered anyway". I don't see any evidence for that.

There is another point which I raised once with someone who had been involved with the atomic bomb project. Would the world have had the horror of nuclear war if it had not seen what one bomb could do? The world was inoculated against using nuclear weapon by its use. I am not saying that alone justifies it, and it certainly was not the justification for its use. But I think that is a historical fact.

Now about scribbles changing history: Sure, the special theory of relativity, or quantum mechanics, it would be unimaginable today without scribbles. Incidentally, Ulam was a very interesting mathematician. He was an idea man. Most mathematicians like to push their ideas through. He preferred throwing out ideas. His good friend Rota even suggested that he did not have the technical ability or patience to work them out. But if so, then it's an instance of Ulam turning a disability to tremendous advantage. I learned a lot from him.

It is amazing for us to learn that an 18 year old immigrant was allowed to participate in a top-secret and decisive weapon development during WWII.

The war created an emergency. Many of the leaders of the Manhattan Project were foreigners, so being a foreigner was no bar.

Collaboration. Work Style

Your main workplace has been the Courant Institute of Mathematical Sciences in New York, which is part of New York University. You served as its director for an eight year period in the 70's. Can you describe what made this institute, which was created by the German refugee Richard Courant in the 1930's, a very special place from the early days on, with a particular spirit and atmosphere? And is the Courant Institute today still a special place that differs from others?

To answer your first question, certainly the personality of Courant was decisive. Courant saw mathematics very broadly, he was suspicious of specialisation. He wanted it drawn as broadly as possible, and that's how it came about that applied topics and pure mathematics were pursued side by side, often by the same people. This made the Courant Institute unique at the time of its founding, as well as in the 40's, 50's and 60's. Since then there are other centres where applied mathematics is respected and pursued. I am happy to say that this original spirit is still present at the Courant Institute. We still have large areas of applied interest, meteorology and climatology under Andy Majda, solid state and material science under Robert Kohn and others, and fluid dynamics. But we also have differential geometry as well as some

pure aspects of partial differential equations, even some algebra.

I am very pleased how the Courant Institute is presently run. It's now the third generation that's running it, and the spirit that Courant instilled in it - kind of a family feeling - still prevails. I am happy to note that many Norwegian mathematicians received their training at the Courant Institute, and later rose to become leaders in their field.

You told us already about your collaboration with Ralph Phillips. Generally speaking, looking through your publication list and the theorems and methods you and your collaborators have given name to, it is apparent that you have had a vast collaboration with a lot of mathematicians. Is this sharing of ideas a particularly successful, and maybe also joyful, way of advancing for you?

Sure, sure. Mathematics is a social phenomenon after all. Collaboration is a psychological and interesting phenomenon. A friend of mine, Vera John-Steiner, has written a book ("Creative Collaboration") about it. Two halves of a solution are supplied by two different people, and something quite wonderful comes out of it.

Many mathematicians have a very particular work style when they work hard on certain problems. How would you characterise your own particular way of thinking, working, and writing? Is it rather playful or rather industrious? Or both?

Phillips thought I was lazy. He was a product of the Depression which imposed a certain strict discipline on people. He thought I did not work hard enough, but I think I did!

Sometimes mathematical insights seem to rely on a sudden unexpected inspiration. Do you have examples of this sort from your own career? And what is the background for such sudden inspiration in your opinion?

The question reminds me of a story about a German mathematician, Schottky, when he reached the age of 70 or 80. There was a celebration of the event, and in an interview like we are having, he was asked: "To what do you attribute your creativity and productivity?". The question threw him into great confusion. Finally he said: "But gentlemen, if one thinks of mathematics for 50 years, one must think of something!"

It was different with Hilbert. This is a story I heard from Courant. It was a similar occasion. At his 70th birthday he was asked what he attributed his great creativity and originality to. He had the answer immediately: "I attribute it to my very bad memory". He really had to reconstruct everything, and then it became something else, something better. So maybe that is all I should say. I am

between these two extremes. Incidentally, I have a very good memory.

Teaching

You have also been engaged in the teaching of calculus. For instance, you have written a calculus textbook with your wife Anneli as one of the co-authors. In this connection you have expressed strong opinions about how calculus should be exposed to beginning students. Could you elaborate on this?

Our calculus book was enormously unsuccessful, in spite of containing many excellent ideas. Part of the reason was that certain materials were not presented in a fashion that students could absorb it. A calculus book has to be fine-tuned, and I didn't have the patience for it. Anneli would have had it, but I bullied her too much, I am afraid. Sometimes I dream of redoing it because the ideas that were in there, and that I have had since, are still valid.

Of course, there has been a calculus reform movement and some good books have come out of it but I don't think they are the answer. First of all, the books are too thick, often more than 1000 pages. It's unfair to give such a book into the hands of an unsuspecting student who can barely carry it. And the reaction to it would be: "Oh, my God, I have to learn all that is in it?" Well, all that is not in it! Secondly, if you compare it to the old standards, Thomas, say, it's not so different - the order of the topics and concepts, perhaps.

In my calculus book, for instance, instead of continuity at a point, I advocated uniform continuity. This you can explain much easier than defining continuity at a point and then say the function is continuous at every point. You lose the students; there are too many quantifiers in that. But the mathematical communities are enormously conservative: "continuity has been defined pointwise, and so it should be!"

Other things that I would emphasize: To be sure there are applications in these new books. But the applications should all stand out. In my book there were chapters devoted to the applications, that's how it should be, they should be featured prominently. I have many other ideas as well. I still dream of redoing my calculus book, and I am looking for a good collaborator. I recently met someone who expressed admiration for the original book, so perhaps it could be realized, if I have the energy. I have other things to do as well, like the second edition of my linear algebra book, and revising some old lecture notes on hyperbolic equations. But even if I could find a collaborator on a calculus book, would it be accepted? Not clear. In 1873, Dedekind posed the important question: "What are, and what should be, the real numbers"? Unfortunately, he gave the wrong answer as far as calculus students are concerned. The right answer is: infinidecimals. I don't know how such a joke will go down?

Heading large institutions

You were several times the head of large organisations: director of the Courant Institute in 1972-1980, president of the American Mathematical Society in 1977-1980, leader of what was called the Lax Panel on the National Science Board in 1980-1986. Can you tell us about some of the most important decisions that had to be taken in these periods?

The president of the Mathematical Society is a figurehead. His influence lies in appointing members of committees. Having a wide friendship and reasonable judgement are helpful. I was very much helped by the secretary of the Mathematical Society, Everett Pitcher.

As for being the director of the Courant Institute, I started my directorship at the worst possible time for New York University. They had just closed down their School of Engineering, and that meant that mathematicians from the engineering school were transferred to the Courant Institute. This was the time when the Computer Science Department was founded at Courant by Jack Schwartz. There was a group of engineers that wanted to start activity in informatics, which is the engineers' word for the same thing. As a director I fought very hard to stop that. I think it would have been very bad for the university to have two computing departments – it certainly would have been very bad for our Computer Science Department. Other things: Well, I was instrumental in hiring Charlie Peskin at the recommendation of Alexander Chorin, I was very pleased with that. Likewise, hiring Sylvain Cappell at the recommendation of Bob Kohn. Both were enormous successes.

What were my failures? Well, maybe when the Computer Science Department was founded I should have insisted on having a very high standard of hiring. We needed people to teach courses, but in hindsight I think we should have exercised more restraint in our hiring. We might have become the number one computer science department. Right now the quality has improved very much – we have a wonderful chairwoman, Margaret Wright.

Being on the National Science Board was my most pleasant administrative experience. It's a policy-making body for the National Science Foundation (NSF), so I found out what making policy means. Most of the time it just means nodding 'Oyes', and a few times saying 'Ôno'. But then there are sometimes windows of opportunity, and the Lax Panel was a response to such a thing. You see, I noticed through my own experience and those of my friends who are interested in large scale computing, in particular, Paul Garabedian, who complained that university computational scientists had no access to the supercomputers. At a certain point the government, which alone had enough money to purchase these supercomputers, stopped placing them at universities. Instead they went to national labs and industrial labs. Unless

you happened to have a friend there with whom you collaborated, you had no access. That was very bad from the point of view of the advance of computational science, because the most talented people were at the universities. At that time accessing and computing at remote sites became possible thanks to ARPANET, which then became a model for the Internet. So the panel that I established made strong recommendation that the NSF establish computing centres, and that was followed up. My quote on our achievement was a paraphrase of Emerson: "Nothing can resist the force of an idea that is ten years overdue".

A lot of mathematical research in the US has been funded by contracts from DOD, DOE, the atomic energy commission, the NSA. Is this dependence of mutual benefit? Are there pitfalls?

I am afraid that our leaders are no longer aware of the subtle but close connection between scientific vigour and technological sophistication.

Personal Interests

Would you tell us a bit about your interests and hobbies that are not directly related to mathematics?

I love poetry. Hungarian poetry is particularly beautiful, but English poetry is perhaps even more beautiful. I love to play tennis. Now my knees are a bit wobbly and I can't run anymore, but perhaps these can be replaced – I'm not there yet. My son and three grandsons are tennis enthusiasts so I can play doubles with them. I like to read. I have a knack for writing. Alas, these days I write obituaries – it's better to write them than being written about.

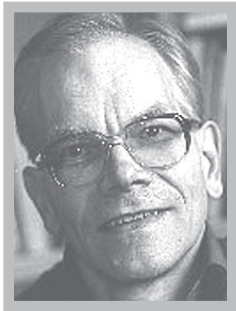
You have also written Japanese haikus?

You're right. I got this idea from a nice article by Marshall Stone – I forget exactly where it was – where he wrote that the mathematical language is enormously concentrated, it is like haikus. And I thought I would take it one step further and actually express a mathematical idea by a haiku.

Professor Lax, thank you very much for this interview on behalf of the Norwegian, the Danish, and the European Mathematical Societies!

I thank you.

The interviewers were Martin Raussen, Aalborg University, Denmark, and Christian Skau, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.



Grundforskning og forskeruddannelsen

Af: Johan Dupont IMF,
Århus Universitet
email: dupont@imf.au.dk

På sit møde den 8-9 december skulle Globaliseringsrådet med statsministeren i spidsen diskutere forskning og forskeruddannelse, og forhåbentlig løfte sløret for hvorledes nogle af de milliarder, som regeringen har udlovet for at opfylde Barcelona-erklæringen, skal fordeles.

Fra de foreløbige signaler at dømme ser det ud til, at navnlig forskeruddannelsen (ph.d.) vil stå i fokus, ikke mindst fordi Danmark på dette punkt, iflg. diverse internationale undersøgelser, står tilbage for de fleste af de lande, vi plejer at sammenligne os med.

Desværre er der grund til, ud fra tidligere erfaringer, at frygte for at grundforskningen igen vil blive sorteper trods mange pæne ord om det modsatte. Man vil sikkert igen udbyde pengene gennem målrettede programmer til fremme af forskningsområder, som er relevante for erhvervslivet, eller som pt. har stor mediemæssig bevågenhed, og som i øvrigt også alle andre lande søger at blive førende indenfor. I denne sammenhæng vil man sikkert bruge den højst besværlige finansieringsmodel af et ph.d.-studium, hvor 1/3 betales af en virksomhed, 1/3 af en såkaldt forsker-skole og 1/3 af et universitet. Det er ikke nemt at få alle 3 finansieringskilder til at passe sammen indenfor de enkelte forskningsprogrammers tidsrammer; og i mange tilfælde ender det med, at den påtænkte kandidat til et projekt allerede har opgivet at vente på, at finansieringen er kommet på plads, så han har fundet andet arbejde.

Specielt indenfor grundforskning, hvortil mit eget fag matematik hører, er det kun undtagelsesvist muligt at finde virksomheder, for hvilke det er naturligt at deltage i finansieringen af projekter, som ikke umiddelbart leder til salgbare produkter. Det betyder ikke, at erhvervslivet ikke efterspørger de færdige ph.d.'ere i f.eks. matematik - tværtimod. Disse har, udover en faglig viden på et højt niveau, vist gennem deres ph.d.-studium, at de besidder stor selvstændighed, kreativitet og analytisk evne; egenskaber som i høj grad efterspørges i erhvervslivet. Vi har således på Institut for Matematiske Fag ved Aarhus Universitet netop opgjort beskæftigelsesforholdene for de 53 ph.d.'ere, der er uddannet fra instituttet i perioden 1997-2004 (et i øvrigt i sig selv ikke ringe antal, se bilag). Efter endt uddannelse får 3/4 af ph.d.'erne en "postdoc"-stilling på et universitet enten i Danmark (1/4) eller i udlandet (2/4), og den sidste 1/4 får en stilling i en dansk eller udenlandsk privat virksomhed. Efter et par år er det ca. halvdelen, der er ansat i erhvervslivet, og halvdelen ved et universitet med 1/4 i Danmark

og 1/4 i udlandet.

Det er bemærkelsesværdigt, at kun 1 ud af de 53 ph.d.'ere har taget stilling i gymnasiet - dette er vist nærmest for lidt - der er også her god brug for særligt fagligt stærke medarbejdere til at sikre fagets udvikling, f.eks. ved udarbejdelse af nyt undervisningsmateriale. Der er heller ikke for mange ph.d.'ere, der ansættes på danske universiteter i betragtning af det forestående generationsskifte i det videnskabelige personale. Samtidig fremgår det af opgørelsen, at der allerede er en stor grad af "globalisering" i denne uddannelse, idet en ikke ringe del får stilling i udlandet. Ikke mindst udviklingen i grundforskningsområder er stærkt international, og vore ph.d.'ere er åbenbart efterspurgte på dette marked. Der har dog ikke hidtil været tradition - og finansieringsmuligheder - for at tiltrække udlændinge til vores ph.d.-uddannelse i større antal. Dette kan dog blive nødvendigt, hvis man

Beskæftigelse for 53 ph.d.'ere fra IMF 1997-2004						
	1. beskæftigelse			Beskæftigelse pr. 1.8.2005		
	Udland	Indland	I alt	Udland	Indland	I alt
Privat	4	16	20	3	21	24
Universitet	18	12	30	11	14	25
Gymnasium	0	1	1	0	1	1
I alt	22	29	51	14	36	50
Ved ikke	2		2	3		3

"Universitet" inkluderer også sektorforskningsinstitutioner.

Revideret 1. november 2005/rm

ønsker at øge produktionen, og det vil også være ønskeligt, idet et større volumen samtidig vil skabe styrkede forskningsmiljøer.

Dette kan dog ikke gøres uden tilførsel af flere ressourcer, dels i form af flere ph.d.-stipendier, dels til ansættelse af videnskabeligt personale for at øge vejledningskapaciteten. Dette må ikke opfattes som almindelig jamren pga. manglende penge. Vi er rede til at løfte denne opgave, men vi kan ikke gøre det gratis.

Artlen er skrevet til "Politiken" December 2005, ikke trykt



Handlingsplanernes tid...

Uddannelse og forskning fylder meget i mediebildet for tiden – med initiativer som mere eller mindre direkte er afledt af regeringens ønske om at konkretisere landets forberedelse til "det globale videnssamfund" og hvordan man nu ellers udtrykker det faktum, at vi fremover skal leve af ideer og designs, snarere end af grise og naturgas.

Universitetsområdet

Her er det især rygter og løfter der præger mediebildet; luften er tyk af fusionsdrømme og generøse skåltaler om ekstrabevillinger til forskning. Og i det mindste på et af universiteternes kerneområder, uddannelserne, er der nok nye tider på vej. Videnskabsministeriet udsendte i starten af marts en rapport, "Kvalitet i undervisningen", som indeholder en lang række praktiske og strategiske anbefalinger til universiteterne, som drejer sig om øge effektivitet og kvalitet af disses undervisning og undervisningsledelse. Der peges bl.a. på behovet for pædagogisk og fagdidaktisk kompetenceudvikling på alle niveauer – og der anvises konkrete modeller med støtte i erfaringer fra udlandet. Den substantielle sammenhæng mellem forskning og uddannelse skal øges, også på bachelorniveauet. For at synliggøre universiteternes indsats på undervisningsområdet, og medvirke til at højne dette områdes status i den almindelige bevidsthed, foreslås det at institutterne laver årlige "undervisningsberetninger", og at særlig succesrige undervisningsmiljøer tildeles betydelige priser. Se hele rapporten her:

<http://www.vtu.dk/fsk/rapporter/kvalitetiundervisningen.pdf>

Gymnasieområdet

Den "store reform" går sin (nogen vil sige skæve) gang – med engelsk og samfundsfag som de foreløbige vindere i vinterens studieretningsvalg, og matematik som en af de sandsynlige tabere (undervisningsministeriet peger optimistisk på, at eleverne også kan vælge faget senere i forløbet). I mellemtiden er der omsider kommet endelige retningslinier fra videnskabsministeriet vedr. *uddan-*

nelsen af gymnasielærere dvs. for universiteternes uddannelser rettet mod undervisning på ungdomstrinnet. Der lægges op til en vis toning mod undervisning på kandidatuddannelserne, herunder ca. et halvt årsværk som ligger "mellem" de to gymnasiefag og bla. omfatter videnskabsteori og fagdidaktik. Se fx <http://www.cnd.ku.dk/side75133.htm>. I anledning af temanummeret nævner vi i den forbindelse, at en mere radikal løsning er gennemført med en betydelig rekrutteringssucces ved NTNU i Norge, der har indført en selvstændig 5-årig gymnasielæreruddannelse i matematik og naturvidenskab, se http://www.math.ntnu.no/lur/Studieplan_LUR_2005_2006.pdf

Grundskoleområdet

Det er ikke kun formålsparagraffen for folkeskolen, som er under forandring. Også nærmere fagene og undervisning lægges der planer. Der er igangsat en EU-licitation af en forretning til 60 mio. kr., som går ud på at udvikle årlige tests i udvalgte fag. Et udvalg under undervisningsministeriet har lavet handlingsplanen "Fremtidens matematik i folkeskolen", som bl.a. anbefaler en styrkelse af læreruddannelserne og af de fagdidaktiske forskningsmiljøer. Det første ligger i pæn forlængelse af de stadig tydeligere planer om at etablere *højskoler for videregående uddannelse*, som bl.a. skal huse en reformeret uddannelse af lærere til folkeskolen. Styrkelsen af matematikdidaktikken tænker handlingsplanen bl.a. gennemført ved dannelse af nationale og regionale "ressourcecentre", der også skal medvirke til at sikre at forskningen kommer til at spille tættere sammen med undervisningspraksis end tilfældet er i dag. Se: <http://www.uvm.dk/06/documents/mat.pdf>.

Afskaffelse af gruppeprøver (hele uddannelsessystemet)

er i skrivende stund ikke en fuldbyrdet realitet, men nok et forslag som nok har vakt mere debat og offentlig opmærksomhed end de foregående punkter tilsammen. Tankevækkende, proportionerne taget i betragtning.

Rettelse til Matilde 25: Redaktørerne beklager en forkert gengivet formel i artiklen om MatIntro i Uddannelsesfronten.

Formlen skulle være:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \Phi} = -1$$

Boganmeldelser

ved Carsten Lunde Pedersen



Af: Niels Keiding
Københavns Universitet
N.Keiding@biostat.ku.dk



Anmeldelse af **Thiele: Pioneer in Statistics** by Steffen L. Lauritzen Oxford University Press 2002

Thorvald Nicolai Thiele (1838-1910) var uddannet astronom og arbejdede som professor i astronomi ved Københavns Universitet 1875-1907. Han havde mange andre aktiviteter, således grundlagde han livsforsikringsselskabet Hafnia i 1872 og var matematisk direktør for Hafnia til sin død.

Thiele ydede en række banebrydende bidrag til statistikkens teori, vi ville nok nu om dage sige matematisk statistik. Adskillige af de bidrag findes kun publiceret på dansk, enkelte blev samtidig udsendt på fransk, og nogle er senere oversat til engelsk. Yderligere er stilen ofte noget indforstået, og Thieles indsats har derfor været betydeligt undervurderet internationalt, men interessant nok også herhjemme.

Efter mange årtier uden megen opmærksomhed om Thiele hverken her eller i udlandet fik Anders Hald (f. 1913) for alvor opfrisket mindet om ham i forbindelse med sin grundige forberedelse af bidraget om statistik til Københavns Universitets 500 års jubilæumsværk, som udkom i tilknytning til jubilæet i 1979. Hald har siden publiceret artikler om Thieles indsats i statistik, og han inspirerede sin yngre kollega Steffen Lauritzen (f. 1947) til også at studere de gamle, næsten glemte værker.

Hald og Lauritzen bevarede dialogen om Thiele i mange år derefter, og det indlysende behov for at få udgivet i det mindste nogle af Thieles hovedværker på engelsk, blev endelig imødekommet i 2002 med denne usædvanligt appetitligt tilrettelagte bog.

Kernen i bogen er oversættelser (ved Lauritzen) af de følgende to værker:

Om Anvendelse af mindste kvadrates Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en 'systematisk' karakter (1880), samtidig udgivet på fransk,

og

Forelæsningsnoter over Almindelig Iagttagelseslære: Sandsynlighedsregning og mindste Kvadraters Methode (1889).

Dertil kommer en oversættelse til engelsk (ved Hald) af Thieles korte, men nok hidtil mest berømte bidrag til statistik:

Om Iagttagelseslærens Halvinvarianter (1899).

Oversættelserne er garanteret med optryk af tre substantielle artikler om Thieles statistiske værk (to af Hald og en af Lauritzen) fra International Statistical Review og med kortere introduktioner, billeder af Thiele og af hans talteoretisk baserede mønstre, hvoraf et (gulvet i Hafnia-bygningens forhal) tidligere har været omtalt her i Måltide (200?).

Hvad var så Thieles hovedindsatser i statistik? Dengang som nu spillede den normale fordeling en central rolle i statistik, men Thiele baserede sig derudover meget på skæve fordelinger, samlet i hvad man nu gerne kalder Gram-Charlier Type A rækkeudviklingen af tæthedsfunktionen, hvor koefficienterne bestemmes af Thieles berømte 'halvinvarianter' for en sandsynlighedsfordeling (nu om dage mest betegnet kumulanter), som lettest defineres som koefficienterne i rækkeudviklingen af logaritmen til den karakteristiske funktion for fordelingen.

Thiele anbefalede, at parameterestimeringen blev udført gennem hvad vi ville kalde at fitte kumulanterne til de observerede kumulanter.

Thiele havde en dyb indsigt i den generelle lineære model baseret på normalt fordelte observationer. Hans fremstilling er tung at læse i dag, da hans lineære algebra ikke direkte bruger matricer. Mere specielt giver han eksplicitte redegørelser for ensidet og tosidet variansanalyse, den sidste baseret på en astronomisk problemstilling.

Thiele var meget opmærksom på at tjekke, at de anvendte statistiske modeller nu også beskrev de foreliggende data; han anbefalede at anvende residualerne (observationer - fittede værdier) til dette formål.

Gennem hele Thieles værk går en dyb interesse for beregninger, hvilket jo var vanskeligt at undgå dengang - men Thieles indsigt er indimellem ganske eksplicit algoritmisk.

Dette gælder ikke mindst hans ovennævnte artikel fra 1880, beskrevet særskilt af Lauritzen i en af de artikler, som er optrykt i bogen. Blandt Thieles bidrag her er en version af den algoritme, vi nu kalder Kalman-filteret, komplet med geometrisk forklaring i en instruktiv figur. I artiklen beskrev Thiele en sofistikeret tidsrække-model bestående af en sum af en regressionskomponent, en Brownsk bevægelse og en hvid støjproces. Lauritzen havde - til dels motiveret af populations-dynamiske betragtninger - i slutningen af 1970'erne selv arbejdet med et specialtilfælde af denne model til at beskrive udviklingen i hormonkoncentrationer gennem graviditeten.

Det er dejligt, at Lauritzen og Hald er nået til denne afrunding af deres mangeårige interesse for Thiele, og vi skal være glade for, at et førende internationalt forlag har villet binde an med en så nydelig produktion af et værk, som næppe vil sælge som almindelige elementære rutine-lærebøger.

Enhver, som føler det væsentligt at den danske intellektuelle arv forvaltes forsvarligt, bør følge indsatsen op ved at sørge for, at bogen kommer til at stå på rigtig mange boghylder både herhjemme og i udlandet. Lauritzen har fyldt bogen med gode doser af sin smittende begejstring, så den vil også blive læst.



Thomas Østergaard Sørensen er pr. 1. september 2005 ansat som lektor ved Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet.

Thomas er uddannet cand. scient. i Matematik og Fysik fra Aarhus Universitet (1996) og Ph.D. (1998) i Matematik også fra Aarhus Universitet, under vejledning af Jan Philip Solovej (nu ved KU). I de

følgende tre år arbejdede Thomas som postdoc under Thomas Hoffmann-Ostenhof ved Erwin Schrödinger Instituttet i Wien. Han blev i 2001 ansat som adjunkt ved Aalborg Universitet. Fra 2003 til 2005 var Thomas 'Wissenschaftlicher Assistent' ved Mathematisches Institut, LMU München under Lazlo Erdős.

Thomas arbejder med Schrödinger operatorer, specielt for atomer og molekyler. Han interesserer sig især for relativistiske korrektioner til grundtilstandsenergien for molekyler, samt for regularitet af egenfunktioner og elektrontætheder. Sidstnævnte er, udover af ren matematisk interesse, også af betydning for numeriske beregninger i kvantekemi.

Thomas holder af at tage i bjergene for at vandre og gå 'Schitouren'. Desuden er han glad for sprog.



Iver Ottosen er pr. 1/4 ansat som adjunkt ved Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet. Iver er uddannet cand. scient. og Ph.D. fra Aarhus Universitet (november 1997). Efterfølgende har han været postdoc ved universiteter i Oslo, Paris, Bielefeld og København. Senest har han arbejdet som adjunkt ved Aarhus Universitet.

Ivers forskningsområde er Algebraisk Topologi, hvor han hovedsageligt har arbejdet med frie løkkerum. Det frie løkkerum på en mangfoldighed har flere interessante aspekter. Dets homologi grupper giver information om geodæterne på den underliggende mangfoldighed. Via Waldhausen's K-teori og topologisk cyklisk homologi af rum er der en mere avanceret sammenhæng til diffeomorfgruppen af mangfoldigheden. Endelig er der relationer til Matematisk Fysik via Chas-Sullivan streng topologi.



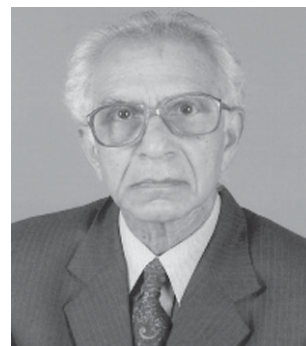
Christian Henriksen er pr 1. marts 2006 ansat som lektor ved Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet.

Christian er civilingeniør fra DTU (1997) og Ph.D. i matematik samme sted (2000). Efter en post.doc position ved Université Paul Sabatier, Toulouse, endte han tilbage til DTU (2003) med et Steno stipendium.

Hans forskning er inden for dynamiske systemer og mere specifikt inden for iteration af holomorfe funktioner. Studiet af de globale egenskaber for Newtons metode anvendt på et polynomium hører ind under dette fagområde.

Christian interesserer sig desuden for fotografi og sprog.

The 2006 King Faizal for Science



*Mudumbai Seshachalu
Narasimhan*



*Simon Kirwan
Donaldson*

The 2006 King Faizal for Science (Topic: Mathematics) has been awarded jointly to Professor Simon Kirwan Donaldson and Professor Mudumbai Seshachalu Narasimhan.

Begivenheder

ved Poul Hjorth



Interdisciplinary Seminar in Applied Mathematics

Aalborg Universitet, Institut for Matematiske Fag
6. April 2006
<http://www.math.aau.dk/aktivitet/AMworkshop.htm>

Operator Algebras and Applications

IMADA/Syddansk Universitet 19-23 april, 2006
Kontakt: mikael@imada.sdu.dk
<http://www.imada.sdu.dk/~mikael/OAconference/>

6th French-Danish Workshop on Spatial Statistics and Image Analysis in Biology

Aalborg Universitet, Institut for Matematiske Fag
14.-18 maj 2006
<http://www.math.aau.dk/SixthFrenchDanish/>
Contact rw@math.aau.dk

21st Nordic Conference on Mathematical Statistics

Aalborg Universitet, Institut for Matematiske Fag
11 - 15 juni, 2006
<http://www.dsts.dk/nordstat2006/>

Mathematics and its Applications

Torino, Italy
3 - 7 July 2006
<http://www.icm2006.org/>

Fifth European Congress of Mathematics

Amsterdam,
14 - 18 July 2006
<http://www.5ecm.nl/>

57th European Study Group with Industry

Institut for Matematik DTU
14. - 17. august 2006

Det årlige 1-uges arbejds møde i Danmark

hvor matematikere arbejder i grupper med aktuelle industriproblemer afholdes i år på DTU. Kontakt [J. Gravesen@mat.dtu.dk](mailto:J.Gravesen@mat.dtu.dk), [P.G. Hjorth@mat.dtu.dk](mailto:P.G.Hjorth@mat.dtu.dk), HGP@mip.sdu.dk eller Willatzen@MCI.sdu.dk.
<http://www.mat.dtu.dk/esgi/57>.

International Congress of Mathematicians

Barcelona, Spain
22 - 30 august 2006
<http://www.icm2006.org/>





LØSNINGER

Alle opgaver er løst af problemgruppen "Con Amore" og af Ebbe Thue Poulsen.

En sum

Opgaven er stillet som problem nr. 11164 af José Luis Díaz-Barrero i Amer. Math. Monthly 112,6 p. 568.

Vis formelen

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \frac{1}{ij} = \frac{1}{n^2}$$

Vi definerer harmoniske tal som

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Herefter kan formelen skrives

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} H_j = \frac{1}{n^2}$$

Abelsk summation giver nu

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{k+1} H_{k+1} \\ = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} H_k \end{aligned}$$

Nu kan vi jo skrive leddene som differenser af funktionen

$$\begin{aligned} g(n, k) = \\ (-1)^{k-1} \left(\binom{n-1}{k-1} H_k - \frac{1}{n} \binom{n-1}{k} \right) \end{aligned}$$

dvs.,

$$(-1)^k \binom{n}{k} H_k = g(n, k+1) - g(n, k)$$

hvorved summen bliver en "teleskopsum" som kun giver os sidste led for $k = 2$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} g(n, 2) = \\ 1 - \frac{1}{n} \left(\binom{n-1}{1} H_2 - \frac{1}{n} \binom{n-1}{2} \right) = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

De næste 4 opgaver findes i Ed. Barbeau: After Math, Toronto 1995, p. 127,

Et kvadrat

Find alle hele tal som selvanden med sit kvadrat skrives med cifrene fra 1 til 9, hver brugt netop én gang.

Da 316 er for lille og 1000 for stort, skal vi se på 3-cifrede tal herimellem. Da det mindste 6-cifrede tal med forskellige cifre er 123456, og det største er 987654, må $352 \leq x \leq 936$. Og x kan ikke ende på 1, 5 eller 6. Da x og x^2 har tværsummer, der har samme rester som tallene selv modulo 9, må $x(x+1)$ være delelig med 9. Ved nu at prøve sig frem fås to løsninger, $x = 567$ og $x = 854$.

Tre tal

Givet tre tal, der hver skrives med de tre forskellige cifre, a , b og c , i en rækkefølge, nemlig (abc) , (bca) og (cab) , hvor

$$(abc) = 100a + 10b + c.$$

Produktet af de tre tal er beregnet til

$$234532286,$$

men desværre er dette resultat ukorrekt. Cifrene er de rigtige, men kun det afsluttende 6-tal er korrekt placeret.

Find de tre tal.

Vi har jo, at $abc \equiv 6 \pmod{10}$ og $(a + b + c)^3 \equiv 8 \pmod{9}$, må $a + b + c$ være $\equiv (9)$ med 2, 5 eller 8. Da første ciffer i produktet ikke er 2, må det være større end 322×10^6 . Altså er $(a + 1)(b + 1)(c + 1) > 322$. Derfor kan ingen af cifrene være 1 eller 2. Ved igen at prøve sig frem findes den essentielt entydige løsning $(a, b, c) = (9, 8, 3)$.

Kubiktal mm.

Find alle naturlige tal med den egenskab, at tredje- og fjerdepotensen skrives tilsammen med brug af cifrene 0, 1, ..., 9, hvert ciffer brugt netop én gang.

For at få netop alle cifrene må $17 < x < 22$. Det er klart at 20 og 20 ± 1 ikke dur, så vi må prøve med $x = 18$. $18^3 = 5832$ og $18^4 = 104976$.

Endnu et kvadrat

Find alle naturlige tal (> 1) med den egenskab, at kvadratet er lig med femtepotensen af tallets tværsum.

Lad t betyde tværsum. Af $x^2 = t(x)^5$ fås, at $x = a^5$ og $t(x) = a^2$. Lad x have c cifre. Så er

$$x \geq 10^{c-1} \quad \text{og} \quad t(x) \leq 9c$$

Altså er

$$(9c)^5 \geq 10^{2(c-1)}$$

Heraf følger, at $c \leq 5$ og dermed $a < 7$. Så da $a^2 \equiv a^5 \pmod{9}$ Vi må prøve med 1, 3, 4 og 6, men kun 3 giver en løsning, nemlig $x = 243$.

Diophantisk

Denne opgave er fra Int. Math. Olympiad, 1982.

Vis, at ligningen

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891$$

ikke har heltallige løsninger.

Da 7^2 går op i 2891, men ikke i 59, kan 7 ikke gå op i hverken x eller y . Men så siger Fermat, at f.eks. $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$ og derfor $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$. Lad nu

$$\begin{aligned} H &= \{n \in \mathbb{N} | n^3 \equiv 1 \pmod{7}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} | n \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}\} \end{aligned}$$

Da gælder, at $m, n \in H$ medfører $mn \in H$.

Hvis $x \in H$ og $y \in -H$ eller omvendt, så er

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv -3xy^2 \not\equiv 0 \pmod{7} \quad (7)$$

og hvis $x \in H$ og $y \in H$ eller omvendt, så er

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 4xy^2 + 2 \not\equiv 0 \pmod{7} \quad (7)$$

og hvis $-x \in H$ og $-y \in H$ eller omvendt, så er

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 + y^3 &\equiv \\ -((-x)^3 - 3(-x)(-y)^2 + (-y)^3) &\not\equiv 0 \pmod{7} \quad (7) \end{aligned}$$

NYE OPGAVER

Vejerboden

I den klassiske opgave er der givet 12 kugler, hvoraf de 11 er ens. Man skal så afsløre den aparte i 3 vejninger. Samtidig skal det afgøres, om den er lettere eller tungere end de andre.

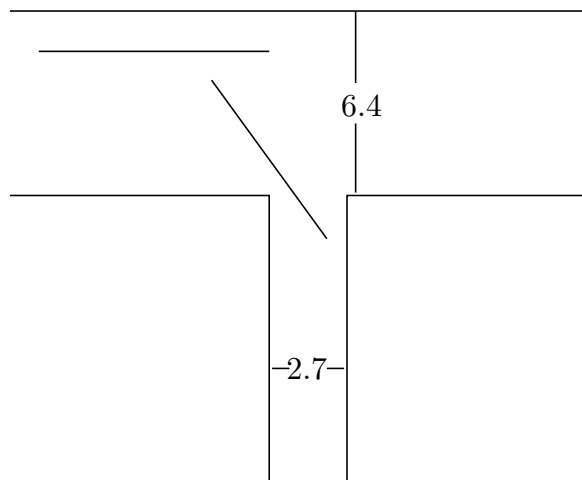
Til hjælp har man en almindelig skålvægt med to skåle.

Men til variation af temaet har vi denne gang 14 kugler, hvoraf de 13 vejer nøjagtig 10 g. Desuden har vi et 10 gramslod.

Vi skal igen afsløre den aparte kugle i højst 3 vejninger, men det er ikke krævet, at vi finder ud af, om den er lettere eller tungere end de andre.

Hvordan skal man bære sig ad med det?

En rørende historie



Et vandrør er 6,4 cm i diameter, og midt på røret er der et T-rør, så siderøret er 2,7 cm i diameter. Siderøret sidder altså nøjagtig vinkelret på hovedrøret.

Nu løber vandet i en strøm gennem hovedrøret, og en del af vandet løber ud ad siderøret. Man har nu tilsat nogle mikadopinde til vandet, og det er meningen, at de ikke må løbe ud ad siderøret.

Man har derfor spurgt kommuneingeniøren, hvor lange mikadopindene skal være, for at de ikke på nogen måde kan dreje om ad siderøret. Hvis de prøver, skal de sætte sig fast.

Hvad er den kritiske grænseværdi for mikadopindene?

Ternet papir

Forleden dag sad jeg og slog krusedduller på et almindeligt ark ternet papir. Så kom jeg for skade at lege med gitterpunkterne. Jeg valgte 5 af dem tilfældigt ud.

Så tegnede jeg alle 10 forbindelseslinier mellem dem. Og hver gang var der et af liniestykkerne, der passerede hen over et gitterpunkt.

Er det altid tilfældet?

Æventyret

Der var engang en prins, der skulle vælge sig en prinsesse. Han havde valget mellem tre søstre, som alle var unge og smukke. Deres far var en viis gammel konge, og han ville sikre sig, at hans kommende svigersøn havde omløb i hovedet. Så han sagde til prinsen:

”Før du får min velsignelse til at ægte en af mine døtre, vil jeg sætte dit mod og din intelligens på en prøve.

Du får lov til at stille én af prinsesserne ét spørgsmål, som kan besvares med ”ja” eller ”nej”. Den ene vil svare sandfærdigt, den anden vil svare falsk, og den tredje, som er min yndlingsdatter, kan svare sandfærdigt eller falsk, som hun vil. Hun har alligevel aldrig rettet sig efter mig.

Ud fra svaret på dit spørgsmål skal du vælge din brud. Men jeg advarer dig: Hvis du vælger min yndlingsdatter, skal du have dit hoved hugget af!”

Prinsen havde ingen anelse om, hvem der var kongens yndlingsdatter, lige så lidt som han anede, hvem der ville tale sandt, og hvem falsk.

Naturligvis stillede prinsen et så snedigt spørgsmål, at han med sikkerhed undgik yndlingsprinsessen. Og kongen blev så imponeret, at han alligevel gav prinsen yndlingsdatteren, og de to levede lykkeligt til deres dages ende.

Hvordan mon prinsen formulerede sit spørgsmål?

En talgåde

Hvad er det mindste tal, der indeholder alle 10 cifre fra 0 til 9, skrevet i 10-talsystemet, og som er deleligt med 11?

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:
Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø



Norges Teknisk-Naturvidenskabelige Universitet (NTNU), Trondheim.
Kilde: <http://www.math.ntnu.no/mmr2002/venue.html>