

mat

M A T I L D E

Tema:

Kemi og matematik

Grundstoffernes periodiske system

		Gruppe																					
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18				
Periode	1	H 1																	He 2				
	2	Li 3	Be 4											B 5	C 6	N 7	O 8	F 9	Ne 10				
	3	Na 11	Mg 12	Overgangsmetaller										Al 13	Si 14	P 15	S 16	Cl 17	Ar 18				
	4	K 19	Ca 20	Sc 21	Ti 22	V 23	Cr 24	Mn 25	Fe 26	Co 27	Ni 28	Cu 29	Zn 30	Ga 31	Ge 32	As 33	Se 34	Br 35	Kr 36				
	5	Rb 37	Sr 38	Y 39	Zr 40	Nb 41	Mo 42	(Tc) 43	Ru 44	Rh 45	Pd 46	Ag 47	Cd 48	In 49	Sn 50	Sb 51	Te 52	I 53	Xe 54				
	6	Cs 55	Ba 56	Lu 71	Hf 72	Ta 73	W 74	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78	Au 79	Hg 80	Tl 81	Pb 82	Bi 83	(Po) 84	(At) 85	(Rn) 86				
	7	(Fr) 87	(Ra) 88																				
		Lanthanider		57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 (Pm)	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb						
		Actinider		89 (Ac)	90 (Th)	91 (Pa)	92 (U)	...															



Bent Ørsted

Temaet for dette nummer af Matilde er Matematik og Kemi. Vi har som i forrige nummer om fysik denne gang bedt nogle kemikere beskrive matematikkens rolle i deres fag og karriere, og resultatet er nogle tankevækkende artikler om kemiens historie og grundlag, med både matematiske aspekter og personlige vinkler belyst.

Hvilke associationer giver ordet „kemilokale“? Vel ikke kun de mest inspirerede og publicerbare indfald - mange tænker nok på gulnede placher med det periodiske system og hyldemeter med let støvede glas og krukker, ventende på næste årgangs kamp med sidste års øvelsesvejledning. Eller måske ses i tankerne et lille stykke

natrium spruttende rundt i et glas vand, forhåbentlig forsvarligt bag en glastrude ved katederet (en lærerkandidat jeg oplevede glemte glastruden og dumpede sit pædagogikum). Men sådanne billeder, sammen med mange andre lettere negative - alene ordet „kemiske stoffer“ eller „kemisk industri“ giver jo ikke de bedste associationer - kan ikke fratage kemi en uhyre central stilling blandt naturvidenskaberne. Ganske vist har der været mange fejlskud i jagen på stofs opbygning - der startede som ild, jord, vand og luft, og „vores egen“ Newton brugte me-

gen tid på sin frugtesløse alkymistiske guldjagt - men faget er vel i dag det mest bredt favnende, lige fra store teoretiske beregninger af kvantemekaniske energiniveauer i molekyler til utallige anvendelser i vores dagligdag. Man kunne måske sige, næsten per definition, at kemien på den kosmiske skala for energier og temperaturer ligger tættest ved vores, det menneskelige, interval. Hermed være også medtaget de nære slægtninge, biokemi og molekylær biologi. Kemi giver rige muligheder for at illustrere matematiske tankegange, begreber og resultater; allerede i et af kemiens (stadig) fundamentale fæno-

mener, nemlig syrer og baser, finder vi begrebet pH-værdi for eksempel, hvor logaritmen som funktion indgår direkte; og i samme retning finder vi regning med reaktionskinetik via størrelserne af de indgående koncentrationer samt koblede ordinære differentialligninger. Der er meget andet at se på for en matematiker, men et højdepunkt nås uden tvivl med det periodiske system for atomerne, deres opbygning og egenskaber. Se forsidebilledet, repeter evt. hvad det egentlig siger, om grundstofferne kemiske og fysiske egenskaber i de enkelte hovedgrupper, om opbygningen i kerne og elektronorbitaler, om bølgefunktionerne, symmetrierne osv. Det er imponerende, hvordan kemi-

kere har formået at udnytte dette til at forstå og kontrollere mange processer, både i naturen - og på fakturaen. Matilde vil gerne opfordre sine læsere til at lade sig inspirere af perspektiverne der oprulles i artiklerne af Jens Peder Dahl, Hans Toftlund Nielsen, Jens Spanget-Larsen og Jan Linderberg; og bemærk, hvordan matematikken for disse forfattere spiller en vigtig, omend forskellig rolle. I samme emne er Uddannelsesfronten ved Carl Winsløj denne gang beskæftiget: Axel Hunding og Niels Wessel Larsen skriver om et introducerende kursus i matematik for bl. a. kemistuderende ved KU.

Af dette nummers øvrige indhold vil jeg især pege på en artikel af Henrik Kragh Sørensen om matematik i det offentlige satiriske rum for hundrede år siden; her præsenteres fint (og ikke uden lune - hvad ellers?) svundne tiders - men ikke glemte - vittige indfald om matematikere. Endelig har Adrien Douady skrevet en lille indføring i Riemann integration på dialogform. Som tidligere anført er Matilde stadig interesseret i evt. indlæg fra læsere, både med aktuelle syn på matematikkens situation samt evt. mere principielle betragtninger. Det kunne også være forslag til fremtidige temaer.



**Matilde – Nyhedsbrev for
Dansk Matematisk Forening
medlem af European
Mathematical Society**

Nummer 25 – December 2005

Redaktion:

**Bent Ørsted, Aau
(ansvarshavende)**

**Bent Ørsted
(TEMAREDAKTØR)**

**Carsten Lunde Petersen, Ruc
Jørn Børling Olsson, Ku
Poul Hjorth, Dtu
Mikael Rørdam, Sdu
Carl Winsløw, Ku**

Adresse:

**Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø**

**Fax: 3532 0704
e-post: matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk**

ISSN: 1399-5901

**Matilde udkommer 4 gange om
året**

**Indlæg til næste nummer skal
være redaktionen i hænde
senest 28. februar 2006**

Indhold:

Tema: Kemi og matematik

Jens Peder Dahl
Kemi og matematik
– et essay 3

Hans Toftlund Nielsen
Tidlige forsøg på at
matematisere kemien 8

Jens Spanget-Larsen
Modeller og visioner i kemien 11

Jan Linderberg
Kvantekemi - En matematisk disciplin? 15

Henrik Kragh Sørensen
Matematik i det offentlige satiriske rum
for hundrede år siden 17

Adrien Douady
Lille dialog om Riemannsummer 24

Hans J. Munkholm
IMU (den Internationale Matematiske Union) 26

Uddannelsesfronten
Axel Hunding og Niels Wessel Larsen
Introduktion til matematik (MatIntro) ved
Københavns Universitet 28

Aftermath 29

Kemi og matematik

– et essay



Af: Jens Peder Dahl
Kemisk Institut, Danmarks Tekniske Universitet
e-mail: jpd@kemi.dtu.dk

Meget af det, som kemikeren udfører i laboratoriet, er baseret på overleveret og selverhvervet erfaring. Kemien kan ikke fungere uden denne erfaring. Men tilgangen til kemiske problemstillinger bliver alligevel mere og mere præget af fysiske og matematiske metoder. I dette essay har jeg forsøgt at tegne et billede af matematikkens voksende rolle gennem kemiens udviklingshistorie. Væsentlige dele af denne udviklingshistorie er derfor også skitseret.

Kemiens grundlove

Kemi kan bredt defineres som læren om stoffernes sammensætning, deres indre egenskaber og deres reaktioner med andre stoffer. Kemien som sådan er ældgammel, men om en egentlig videnskab blev der først tale i anden halvdel af 1700-tallet, da man systematisk begyndte at inddrage vejninger og målinger (af fx rumfang, tryk og temperatur) som en vigtig del af sine eksperimenter. Anvendelsen af disse kvantitative metoder førte forholdsvis hurtigt til formuleringen af i det væsentlige fire kemiske grundlove. Den første af disse, loven om massens bevarelse, blev formuleret af den franske kemiker Antoine Laurent Lavoisier i 1785. Den udsiger, at der ikke sker nogen målelig ændring af den samlede masse under en kemisk reaktion. Den anden grundlov, loven om de konstante proportioner, blev fremsat af den ligeledes franske kemiker Joseph Louis Proust i 1799. Den udsiger, at forskellige prøver af et stof indeholder dets grundstoffer i de samme forhold. Et grundstof var af Lavoisier blevet defineret som et stof, der ikke lader sig dekomponere, og han havde givet en liste med 33 stoffer, som han betragtede som grundstoffer, blandt dem lys og caloric (varme).

Den tredje kemiske grundlov, loven om de ækvivalente proportioner, blev fremsat af den tyske kemiker Jeremias Benjamin Richter i 1791. Den udsiger, at forholdet mellem de vægtmængder af to forskellige grundstoffer, der forener sig med samme vægtmængde af et tredje grundstof, genfindes, når de to grundstoffer forbinder sig med hinanden.

Den fjerde kemiske grundlov, loven om de multiple proportioner, blev formuleret af den engelske kemiker og fysiker John Dalton i 1808. Den udsiger, at når to grundstoffer kan forenes til mere end én kemisk forbindelse, så forholder de vægtmængder af det ene grundstof, som forbinder sig med samme vægtmængde af det andet

grundstof, sig til hinanden som små heltal.

Dalton fortolkede de kemiske grundlove således, at en kemisk forbindelse består af enheder af et karakteristisk antal atomer af samme eller forskellig slags. Atombegrebet havde været kendt siden den græske oldtid, men det var først nu, det fik et veldefineret og praktisk grundlag. På dette grundlag udviklede kemien sig op gennem 1800-tallet til en højt udviklet videnskab. Man opererede på basis af atombegrebet med molekyler, atom- og molekylmasser, kemiske formler, reaktionsligninger osv. Man havde dog ingen reel viden om, hvordan atomer og molekyler så ud. Herom mere nedenfor. Vi vil nu berøre den rolle, matematikken spillede i denne udvikling.

Støkiometri

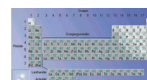
I 1785 erhvervede Richter en doktorgrad ved universitetet i Königsberg for en afhandling om anvendelse af matematik i kemien. Han fortsatte med at søge efter en matematisk basis for kemien og publicerede flere værker herom. Hans sigte var ikke blot matematisk og kemisk, men også religiøs. Han forestillede sig blandt andet, at den aritmetiske og den geometriske række var givet af Gud, og at de måtte spille en fundamental rolle i matematikken bag kemien. Han nåede derfor frem til sin lov om de ækvivalente proportioner ad slyngede stier, hvor han måtte vandre alene, og betydningen af hans kemiske arbejder blev først anerkendt efter hans død.

Richter indførte betegnelsen støkiometri for lovmæssighederne i kemien. Dette er forblevet en fundamental betegnelse, som i dag dækker studiet og beregningen af relationerne mellem reaktanter og produkter i kemiske reaktioner. Om accepten af betegnelsen op gennem 1800-tallet vidner det forhold, at den kendte tyske kemiker Wilhelm Ostwald kaldte første bind af sin *Lehrbuch der Allgemeinen Chemie* (1884) for *Stöchiometrie*.

Som et eksempel på en støkiometrisk problem kan vi betragte den kemiske ligning



Dette er en skaleringsinvariant ligning, som kan læses på flere måder. Den udsiger fx, at to molekyler hydrogen kan reagere med et molekyle oxygen og danne to molekyler vand. Men man kan også operere med makroskopiske størrelser og tale om mol i stedet for



molekyler (1 mol indeholder N_A molekyler, hvor Avogadros konstant $N_A = 6.02214 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). En simpel støkiometrisk beregning knyttet til ovenstående ligning kunne fx være baseret på spørgsmålet: Hvor mange gram vand dannes der ved forbrændingen af 100 g hydrogen? Svaret følger: Fra tabeller ved vi, at H og O har de respektive molmasser 1.0079 g/mol og 15.9994 g/mol. Molmasserne for H_2 og O_2 er da de dobbelte, og molmassen for H_2O er $(2 \times 1.0079 + 15.9994) \text{ g/mol} = 18.0152 \text{ g/mol}$. Mængden af vand, der dannes ved forbrændingen af 100 g hydrogen er derfor $18.0152 \times 100 / (2 \times 1.0079) \text{ g} = 893.70 \text{ g}$.

Andre støkiometriske problemer kan være langt mere komplicerede, omend i princippet af samme art. Det er den relativt simple matematik, der indgår i disse problemer, og støkiometriske beregninger af denne type kan derfor udføres af kemikere på alle niveauer.

En stor udvidelse af begrebet støkiometri opnås ved at inddrage sådanne beregninger, som holder rede på energiomsætningen under kemiske processer. Ved processen (1) ovenfor frigøres der fx en varmemængde på 285.83 kJ per mol vand, når hydrogen og oxygen antages at være på gasform ved temperaturen 298.15 K og trykket 1 bar, og vand antages at være på flydende form ved samme temperatur og tryk. Man skriver

$$\Delta H = 2H(\text{H}_2\text{O}) - 2H(\text{H}_2) - H(\text{O}_2) = -571.66 \text{ kJ mol}^{-1} \quad (2)$$

hvor H er den såkaldte enthalpifunktion for et givet stof. Den er et udtryk for det pågældende stofs energiindhold som funktion af temperatur og tryk. Ud fra tabeller over de forskellige stoffers enthalpifunktion kan man på denne måde udregne varmeudviklingen under almene kemiske og fysiske omdannelser.

Enthalpifunktion H er en tilstandsfunktion. Andre tilstandsfunktioner er fx den fri energi G og entropien S . Mellem disse funktioner har man relationen

$$G = H - TS \quad (3)$$

hvor T er den absolutte temperatur. En relation af denne art er baseret på termodynamikkens love, der primært vedrører energiomsætninger under kemiske reaktioner og faseomdannelser og deres afhængighed af volumen, tryk og temperatur. Termodynamikken blev grundlagt i midten af 1800-tallet med den engelske fysiker William Thomson (Lord Kelvin) og den tyske fysiker Rudolf Clausius som hovedfigurer. Selve navnet termodynamik skyldes William Thomson (1849). Fundamentet for termodynamikken er nedlagt i termodynamikkens nulte, første og anden hovedsætning.

Termodynamikkens hovedsætninger og anvendelserne af dem finder deres matematiske udtryk i den klassiske teori for funktioner af flere variabler. Man må her kunne beherske differential- og integralregning og jonglere med partielle afledede og relationerne mellem forskellige tilstandsfunktioner. Termodynamiske studier og beregninger forudsætter således stor specialviden. Til gengæld kan man ved hjælp af sådanne studier og beregninger løse store og komplicerede opgaver af praktisk art inden

Atomteori og Antiatomisme

Støkiometrien, inklusive dens termodynamiske del, er som beskrevet en højtudviklet og anvendt videnskab. Den er i sit grundlag et produkt af 1800-tallets kemi og er baseret på antagelsen om eksistensen af atomer og molekyler. Antallet af kendte grundstoffer voksede stærkt i løbet af 1800-tallet, og atomteorien blev, med bidrag fra mange kemikere, beriget med valensbegrebet. Grundstofferne blev grupperet i henhold til deres valenser og almene egenskaber, og dette tillod den russiske kemiker Dmitri Ivanovich Mendeleev at opstille grundstoffernes periodiske system, i 1869.

Snart blev de molekylære formler tillagt en geometrisk betydning i rummet. Molekylerne blev tredimensionale. I 1874 foreslog den hollandske kemiker Jacobus Henricus van't Hoff og den franske kemiker Joseph Achille Le Bel således uafhængigt af hinanden, at kulstofatomets valenser er rettet mod hjørnerne af et tetraeder, med kulstofatomet i centrum. Dette har vist sig at være en både frugtbar og korrekt antagelse, men faktisk havde man, som allerede fremhævet, i 1800-tallet ingen reel viden om, hvordan atomer og molekyler så ud. Forslaget om en rumlig struktur blev derfor betragtet som for fantasi-fuldt af mange kemikere og fysikere, som fx Ostwald, den tyske kemiker Hermann Kolbe og den østrigske fysiker Ernst Mach. Disse indflydelsesrige videnskabsmænd stod som eksponenter for den såkaldte antiatomisme. De advarede mod at drage for vidtgående slutninger, ikke blot hvad angår molekylers geometri, men også hvad angår forskellige forestillinger om kræfterne mellem atomerne i et molekyle. Ostwald talte fx om kræfter, hvis eksistens vi ikke kan bevise, mellem atomer, som vi ikke kan iagttage.

Ernst Mach tog matematikken til hjælp i sine advarsler ved at stille spørgsmålet: Hvis molekyler er strukturer i rummet, hvorfra ved vi så, at dette rum er tredimensionalt? Den følgende analyse er tilpasset fra hans bog om energiens bevarelse (*Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*), fra 1872.

Lad os betragte et molekyle bestående af N atomer. Antag, at molekylet afbildes som en rumlig struktur i D dimensioner, og at vi ikke er interesserede i molekylets absolutte position eller orientering, men kun i dets form. Molekylet har i alt ND frihedsgrader. D af disse er translationer, én for hver koordinatretning. $D(D-1)/2$ er rotationer, én for hver todimensional koordinatplan. Resten af frihedsgraderne er interne frihedsgrader. Deres antal er åbenbart

$$ND - D - D(D-1)/2 = ND - D(D+1)/2 \quad (4)$$

Mach kaldte dette for antallet af tænkelige uafhængige afstande. Han opstillede nu den betingelse, at antallet af atompar, $N(N-1)/2$, og dermed også antallet af afstande mellem atompar, skulle være lig antallet af tænkelige uafhængige afstande dvs:

eller

$$(D - N)(D - N + 1) = 0 \quad (6)$$

Den laveste dimension, for hvilken antallet af atomafstande netop svarer til antallet af indre frihedsgrader, er derfor givet ved betingelsen $D = N - 1$. Men $D = N$ er også tilladt.

Accepterer vi betingelsen $D = N - 1$, må vi derfor konkludere, at et toatomigt molekyle bør henføres til en éndimensional verden, et treatomigt molekyle til en todimensional verden, et fireatomigt molekyle til en tredimensional verden, et fematomigt molekyle til en firedimensional verden, osv. Man forestillede sig fx, at relationerne mellem forskellige isomere fematomige molekyler burde studeres i en firedimensional verden.

Opfattelsen af molekyler som geometriske strukturer i tre dimensioner overlevede de forskellige angreb og havde i begyndelsen af 1900-tallet løftet kemien til et højt leje, uanset en manglende forståelse af atomets indre struktur og dermed også uden egentlig hjælp fra matematikkens side. Forståelsen af atomets og dermed molekylernes indre struktur kom først med kvantemekanikken.

Kvantekemi

I 1897 påviste den engelske fysiker Joseph John Thomson elektronens eksistens, og i 1911 viste den ligeledes engelske fysiker Ernest Rutherford, at et atom med atomnummeret Z i det periodiske system består af en kerne omgivet af Z elektroner. Hver elektron har ladningen $-e$, og kernen besidder den positive ladning Ze . Størstedelen af atomets masse udgøres af kernens masse. Kernens rumlige udstrækning er næsten forsvindende i forhold til atomets udstrækning, der er af størrelsen $1 \text{ Å} \equiv 10^{-10} \text{ m}$.

Elektronernes opførsel er underkastet kvantemekanikkens love, således som de blev udviklet i første fjerdedel af 1900-tallet. Niels Bohrs atomteori fra 1913 var den første teori, der bragte forståelse af atomets væsen, men det var en foreløbig teori. Den eksakte teori blev skabt af de tyske fysikere Werner Heisenberg, Max Born og Pascual Jordan i 1925 og af den østrigske fysiker Erwin Schrödinger i 1925. Vigtige bidrag blev også ydet af den engelske fysiker Paul Adrien Maurice Dirac. De tre førstnævnte personers formulering refereres normalt til som Heisenbergs matrixmekanik, mens Schrödingers formulering er kendt som Schrödingers bølgemekanik. De to formuleringer synes ved et første studium at være vidt forskellige, men de blev hurtigt fundet at være ækvivalente og dermed at repræsentere to forskellige indgange til den samme teori.

Det ligger i eksistensen af forskellige formuleringer, at en kvantemekanisk beskrivelse er umulig uden matematikkens hjælp. Ja det er rimeligt at sige, at for at se ind i atomernes og molekylernes indre verden må man anvende menneskets matematiske øje, og jo bedre udviklet dette øje er, desto mere kan man se. Vigtige

Langt de fleste teoretiske studier af atomers og molekyler elektronstrukturer er blevet foretaget ved hjælp af bølgemekanikken. På basis af sådanne studier har man i dag opnået en enestående indsigt i molekylernes natur. Man kan redegøre for deres bindingsforhold, deres geometrier, deres stationære tilstande, deres velselvirkning med ydre felter, deres kemiske reaktioner med andre molekyler osv. Kemiske reaktioner kan endda i stigende grad studeres i *real time*, dvs. man kan følge den vej, som molekylernes atomer følger under reaktionen, på reaktionens egen tidsskala, typisk en femtosekund-skala ($1 \text{ femtosekund} = 10^{-15} \text{ sekund}$). Omfanget af hele denne udvikling har i højeste grad været betinget af den samtidige udvikling af den moderne computer. Den videnskabelige disciplin, der her er tale om, benævnes normalt kvantekemi.

Det er naturligvis umuligt her at give en blot nogenlunde forsvarlig beskrivelse af den moderne kvantekemi. Jeg må i stedet henvise til faglitteraturen, fx min bog *Introduction to the Quantum World of Atoms and Molecules* (2001). Allerede følgende diskussion af den simpleste atomare kvantetilstand, nemlig hydrogenatomets grundtilstand, kan dog tjene som en illustration af matematikkens flersidige rolle i en kvantemekanisk beskrivelse.

Vi forestiller os hydrogenatomets kerne (en proton) fastlåst i origo af et treretvinklet xyz -koordinatsystem og søger bølgefunktionen ψ for elektronens "bevægelse" i dette koordinatsystem. Denne bestemmes ved løsning af den tidsuafhængige Schrödingerligning

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{r}\psi = E\psi \quad (7)$$

hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ er elektronens afstand til kernen, og vi har valgt såkaldte atomare enheder, i hvilke elektronens masse, elektronens ladning og $\hbar$ (Plancks konstant h divideret med 2π) alle har den numeriske værdi 1. Kun normerbare løsninger er fysisk acceptable, dvs. ψ må kunne bringes til at opfylde betingelsen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \quad (8)$$

Denne betingelse kvantiserer energien E . Den laveste tilfældige E -værdi findes at være $E = -1/2$. Dette er atomets grundtilstandsenergi. Den tilsvarende bølgefunktion har formen

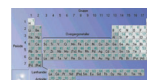
$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-r} \quad (9)$$

Størrelsen $|\psi|^2 dx dy dz$ fortolkes som sandsynligheden for at finde elektronen i volumenelementet $dx dy dz$ omkring punktet $\vec{r} = (x, y, z)$.

I stedet for at koncentrere sig om elektronens position $\vec{r}$ kan man se på elektronens impuls $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ (svarende til masse gange hastighed i den simple klassiske mekanik). Man kan da udtrykke elektronens tilstand ved en impulsbølgefunktion af formen

$$\phi(\vec{p}) = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} \quad (10)$$

..... $\sqrt{2 + 2 + 2} = \sqrt{6}$ $\sqrt{2 + 2 + 2} = \sqrt{6}$ $\sqrt{2 + 2 + 2} = \sqrt{6}$



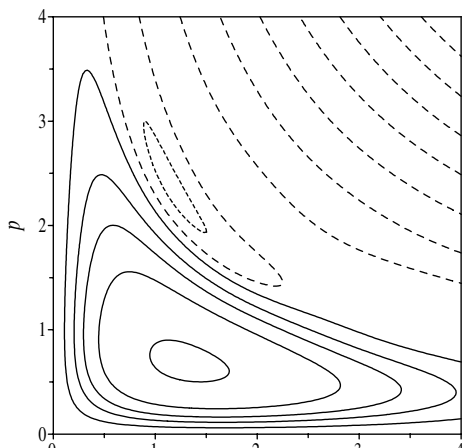


Figure 1: Konturkurver for Wignerfunktionen $F(r, p)$ for hydrogenatomets grundtilstand. Konturværdierne er de følgende: positive (fuldt optrukne kurver), 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.015; stiplet, 0.0; negativ (punkteret) -0.01. Atomare enheder. Tilpasset fra J. P. Dahl and M. Springborg, Mol. Phys. 47, 1001 (1982).

ligger i volumenelementet $dp_x dp_y dp_z$ omkring impulsen $\vec{p}$. Bølgefunktionen $\phi(\vec{p})$ er den Fourier-transformerede af bølgefunktionen $\psi(\vec{r})$, dvs.

$$\phi(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \int \int \int \psi(\vec{q}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{q}/\hbar} dq_x dq_y dq_z \quad (11)$$

hvor alle integrationer er fra $-\infty$ til ∞ . Schrödingerligningen for $\phi(\vec{p})$ er en integralligning snarere end en differentialligning som ligning (7).

De to bølgefunktioner $\psi(\vec{r})$ og $\phi(\vec{p})$ er ligeværdige og indeholder den samme information. Dette er et udtryk for den såkaldte Diracs transformationsteori, der generelt tillader os at transformere en kvantemekanisk beskrivelse fra et matematisk rum til et andet.

En partikels position og impuls kan i kvantemekanikken ikke samtidig tillægges skarpe værdier (de tilsvarende operatorer kommuterer ikke indbyrdes). Man kan derfor ikke tillægge et punkt i det 6-dimensionale faserum (x, y, z, p_x, p_y, p_z) den samme skarpe betydning som i den klassiske mekanik. Man kan alligevel transformere beskrivelsen af en kvantetilstand til dette rum. Dette sker gennem indførelsen af Wigners faserumsfunktion ved definitionen

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int \int \int \psi^*(\vec{r} - \vec{r}'/2) \psi(\vec{r} + \vec{r}'/2) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}'/\hbar} dx' dy' dz' \quad (12)$$

Den er normeret således, at

$$\int \dots \int f(\vec{r}, \vec{p}) dx \dots dp_z = 1 \quad (13)$$

Det er derfor fristende at fortolke størrelsen $f(\vec{r}, \vec{p})$ som en sandsynlighedstæthed i faserummet. At dette dog ikke er en holbar fortolkning afspejler sig i, at $f(\vec{r}, \vec{p})$ i visse områder af faserummet antager negative værdier. Man kalder $f(\vec{r}, \vec{p})$ en kvasisandsynlighedstæthed.

En nærmere analyse af faserumsfunktionen for hydrogenatomets grundtilstand viser, at den kun afhænger af r , p og u , hvor u er vinklen mellem vektorerne $\vec{r}$ og $\vec{p}$. Integreres der nu over u og multipliceres med $r^2 p^2$ (fra volumenelementet i faserummet), når man frem til en funktion, der kun afhænger af r og p . Vi kalder denne funktion $F(r, p)$ og normerer den, således at

$$\int \int F(r, p) dr dp = 1 \quad (14)$$

Figur 1 viser en konturafbildning af denne funktion. Den besidder et stort positivt område, et mindre negativt

område og et regelmæssigt, omend svagt område, hvor produktet af r og p er stort. Studiet af den korrelation mellem $\vec{r}$ og $\vec{p}$, som Wigner-funktionen afspejler, fører til en interessant alternativ indsigt i atomers og molekylers kvantetilstande.

Som nævnt ovenfor kommuterer de kvantemekaniske operatorer for $\vec{r}$ og $\vec{p}$ ikke. I den såkaldte Thomas-Fermi teori for atomare og molekulære elektronstrukturer negligeres dette forhold. Man når herved frem til faserumsfunktioner $F'(r, p)$, der er positive eller nul overalt i faserummet. Gennem eksakte faserumsfunktioner som den i Figur 1 afbildede kan man derfor også knytte en nyttig kontakt til Thomas-Fermi teorien.

Efter denne diskussion af hydrogenatomets grundtilstand vil jeg afslutte med at stille spørgsmålet: Hvordan ved vi, at atomets indre verden er tredimensionalt? (jvf. diskussionen af Ernst Machs overvejelser tidligere i denne artikel). Jordens bevægelse omkring solen foregår jo dog i en plan, og dette er naturligvis i overensstemmelse med den Newtonske mekanik. Da gravitationstiltrækningen mellem to masser har den samme form som den elektrostatiske tiltrækning mellem en proton og en elektron, kunne man tænke sig, at man i stedet for Schrödingerligningen (7) kunne anvende en Schrödingerligning af formen

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{r} \psi = E \psi \quad (15)$$

med et ψ , der kun afhænger af x og y .

Faktisk antog Dirac i en "foreløbig" kvantemekanisk undersøgelse af hydrogenatomet (Proc. Roy. Soc. A110, 561 (1926)), baseret på Heisenbergs kvantemekanik, at atomet kunne behandles i to dimensioner. Schrödinger antog uden diskussion, at det skulle behandles i tre dimensioner. Den tyske fysiker Arnold Sommerfeld gennemførte i sin lærebog *Atombau und Spektrallinien, Wellenmechanischer Ergänzungsband* (1929) løsningen af både det to- og det tredimensionale tilfælde. Han konkluderede, at kun det tredimensionale tilfælde giver de korrekte energiniveauer for hydrogenatomet. Sommerfelds konklusion bekræftes naturligvis af den indsigt, som anvendelsen af Schrödingerligningen på et utal af atomer, molekyler og faste stoffer har affødt under antagelse af, at elektronen tilskrives netop tre rumlige frihedsgrader. Elektronen har også frihedsgrader karakteriseret ved det såkaldte spin. Spinnet er af den største betydning for naturen af atomare og molekulære elektronstrukturer, men dette vil vi ikke komme nærmere ind på her.

Tidlige forsøg på at matematisere kemien

Af. Hans Toftlund Nielsen,
Kemisk Institut,
Syddansk Universitet,
5230 Odense M
e-mail: hto@chem.sdu.dk



Indledning

Kemien er en væsentlig yngre videnskab end fysikken, og det hævdes ofte, at kemien kun har status af videnskab for så vidt, som den kan matematiseres. Kemikerne har brugt fysikken som et paradigme og stræbt efter at gøre kemien til et logisk, deduktivt system. Historisk set er dette ideal et levn fra oplysningstiden, og det hævdes ofte, at den franske kemiker Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794) er kemiens fader i og med, at han som den første fik bragt kemien på en matematisk form. Formålet med dette lille essay er dels at vise, at Lavoisier ikke er den første, der kom på denne tanke, og dels at vise, at det, vi i dag forstår ved kemi, ikke lader sig matematisere i samme grad som fysikken.

Den, der først taler om, at kemien bør undergå en revolution i lighed med den, der er sket i fysikken, er Gabriel Francois Venel (1723-1775), der skrev kemiartiklen i den store encyklopædi [1]. Mærkeligt nok er det ikke Isaac Newton, som Venel fremhæver som idealet, men Paracelsus: *"Men i forventningen om denne nye Paracelsus' fremkomst håber man også, at alle de fejl, som skæmmer fysikken, kan forhindres via denne unikke kilde -. Kemien skal alene forklares ud fra passende geometriske termer"*. Dette er et bemærkelsesværdigt krav, når man betænker at der på Venels tid knap nok eksisterede en atomteori endsige en krystallografi. Hvis nogen i generationen efter Venel kan siges at leve op til at være denne kemiens redningsmand er det ikke Lavoisier, men svenskeren Torbern O. Bergman. En vigtig grund til, at det ikke lykkedes for ham var imidlertid, at han døde i en relativ ung alder. Den matematisering, jeg vil beskrive i dette essay, tilhører ikke den højere matematik. Når man hylder Lavoisier og Dalton for deres bidrag til en matematisering af kemien, er det helt simple principper som reaktionsligninger (massebevarelse) og stoffers konstante sammensætning (støkiometri,) man tænker på. Jeg vil således ikke komme ind på kvantekemi og bindingsteori.

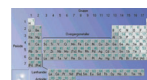
Bergman

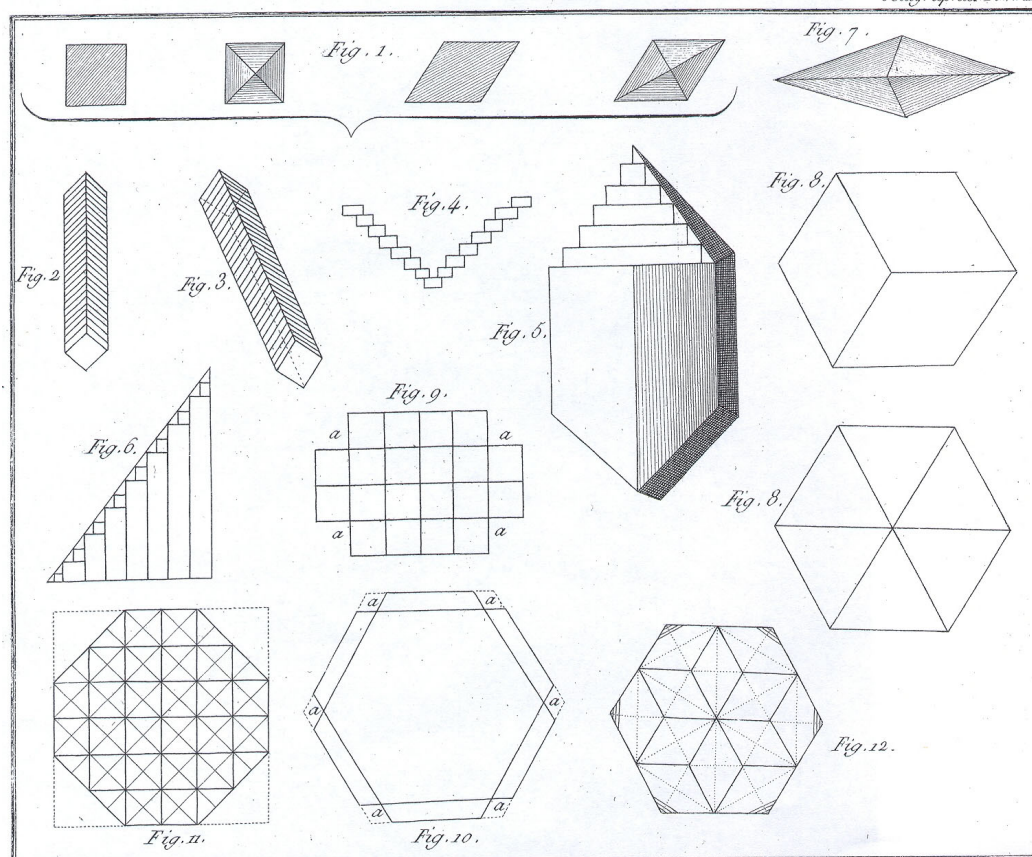
Torbern Olof Bergman (1735-1784), Figur 1, var én af Linnés mange elever. Han var overordentlig alsidig med interesser, der strakte sig lige fra matematik og astronomi over fysik til naturhistorie. Bergman disputerede i 1757 med afhandlingen *De Interpolatione astronomica*, et meget matematisk arbejde, der lægger op til en karriere indenfor astronomien. Han får meget hurtigt en adjunktstilling ved Uppsalas Universitet. I 1758 præsiderer han ved



Figur 1
Litografisk portræt af Torbern Bergman

sin første student, Matthias Rydells disputats: *De attractione universale*. Den universelle tiltrækning var et emne, Bergman overførte til kemien, og det udviklede sig senere til et af hans største bidrag indenfor kemien, affinitetslæren (1775): *I denne afhandling skal jeg forsøge at bestemme rækkefølgen af tiltrækninger [mellem kemiske komponenter] i overensstemmelse med deres respektive kræfter; men et mere nøjagtigt mål for hver af disse, som burde udtrykkes i tal, og som kunne kaste lys på hele denne doktrin, er stadig kun en ønskedrøm* [2]. Affinitet betyder egentlig slægtsskab, men i den kemiske sammenhæng er det styrken af den kemiske tiltrækning mellem to givne stoffer, der refereres til. Baseret på et stort antal reaktioner mellem forskellige grundstoffer, blev det muligt for Bergman at opstille en affinitetstabel, en konstruktion, der kan opfattes som en forløber for „Det periodiske System“. Blot





Figur 2. Tavle, der viser dannelsen af en række krystalflader fra ref. [6]

afviger Bergmans system markant fra det moderne system ved at sætte de stoffer, der har størst affinitet, tæt ved hinanden. I det periodiske system står stoffer med høj indbyrdes affinitet typisk langt fra hinanden. Bergmans ønskedrøm om en kvantisering af affinitetsmålet blev siden realiseret i termodynamikkens affinitetsbegreb, som danner grundlaget for enhver overvejelse vedrørende hvilke kemiske reaktioner, der er realisable.

I begyndelsen af Bergmans karriere var kemien på ingen måde central i hans interessesfære. Først da han blev gjort opmærksom på, at den eneste mulighed, han havde for at få et professorat ved Uppsalas Universitet ville være at gå efter Wallerius' lærestol i kemi, koncentrerede han sig om kemien.

Krystallografi

Hans første rent kemiske afhandling fra 1767 havde et praktisk sigte og omhandlede metoder til forbedring af alunproduktionen i Sverige [3]. Nu havde Bergman imidlertid en eminent iagttagelsesevne og sans for matematik, så meget hurtigt ændrede hans projekt karakter og blev mere grundvidenskabeligt.

Da han nogle år senere udgav en udvidet udgave af sin afhandling, var omfanget svulmet fra 16 til 54 sider. En udløber af disse arbejder blev hans studier over krystallografi, hvor han som den første viste, hvorledes de forskellige flader i en calcitkrystal kan tænkes opstået ved at stable enhedskrystallitter på forskellige måder. Figur 2. Den moderne kristal teori regnes som regel for at begynde med René Just Haüy i 1782; men Bergman spillede en vigtig rolle i udviklingen af Haüys ideer og fortjener

derfor en plads i krystallografiens historie. Hans interesse for krystallografi opstod ved en undersøgelse af den mineralsamling, som han arvede i forbindelse med sin udnævnelse til professor i kemi. Han fandt, at krystaller forekommer i en uendelighed af former, men under de ydre former havde han en mistanke om, at der gemte sig primitive former, der afspejler opbygningen af de forbindelser, han studerede i kemien. Denne ide blev taget op af en række franske og tyske videnskabsmænd, som fik æren af at formulere krystallografiens grundlove. Ved studiet af en række idealmodeller af de konkrete strukturer identificerede de en række symmetriegenskaber ved disse gitre. Mængden af de symmetrier, som en given krystalstruktur har, udgør en gruppe i matematisk forstand. Klassifikationen af de mulige krystallografiske grupper og dermed de mulige krystalstrukturer fik en fundamental betydning for den moderne krystallografi. Det viser sig, at der i alt er 14 mulige krystalgitre (Bravais-gitre) og 32 punktgrupper (krystalklasser).

Først i 1891 blev det endeligt bevist, at der findes 230 rumgrupper. Kendskabet til faste stoffers detaljerede indre strukturer, krystalstrukturen, blev først mulig ved røntgendiffraktionens fremkomst i første del af det 20. århundrede. Alt dette havde Bergman af gode grunde ikke nogen mulighed for at kende til. Det viser imidlertid noget om Bergmans format, at han tidligt erkender, at hans oprindelige idé ikke var korrekt. Hvad angår den krystalform, der defineres af de ydre flader, lykkedes det Bergman at bevise, at den ikke afspejler den indre struktur og derfor ikke kan danne et sikkert grundlag for en klassifikation.

Et fundamentalt problem, der optog mange på Bergmans tid, var netop formuleringen af et generelt klassifikationssystem for uorganiske forbindelser, herunder mineraler. Bergmans lærer i Uppsala, Carl von Linné (1707-1778) havde jo indhøstet stor hæder på at klassificere de to andre riger i naturen, planter og dyr. Han forsøgte naturligt nok også at klassificere mineraler efter et lignende naturhistorisk system, hvor man koncentrerede sig om de ydre fremtoninger, så som farve, krystalform, hårdhed etc.

Linnés system blev i 1774 videreført af geologiens fader, Abraham Gottlob Werner (1750-1817). Bergman indså imidlertid manglerne ved Linnés og Werners systemer. "Werners system er helt og holdent baseret på de karakteristika, de fem sanser giver, men det er så kompliceret, at det måske er værdiløst. [6] I stedet foreslog han at klassificere mineraler efter deres kemiske sammensætning, hvilket man også i dag betragter som det mest naturlige og fundamentale system. Et af problemerne med Bergmans nye forslag var imidlertid, at der på hans tid ikke eksisterede pålidelige analytiske metoder til et sådan studium, så dem måtte han selv udvikle. Som et resultat af dette store og grundige arbejde betragtes Bergman i dag som den analytiske kemis fader. I den sidste af sine store afhandlinger satte Bergman sig for at rationalisere „strukturen“ af de kendte mineraler. Dette arbejde er ikke udvalgt på grund af dets betydning for kemiens senere udvikling, men alene fordi det meget godt illustrerer Bergmans særegne arbejdsmetode. Nogen vil måske opfatte hans ideer som spekulative, og det er jo også let at indse, at hans system var dømt til at mislykkes, eftersom strukturkemi endnu ikke var udviklet. Alligevel mener jeg, at hans projekt var relevant om ikke for andet så som en interessant forløber for den moderne kombinatoriske kemi. Artiklen, der havde titlen: "*Tanker om et naturligt mineralsystem*", udkom første gang på latin i 1782 [4], men jeg har benyttet den engelske udgave, der udkom i 1791 [5]. Resultaterne af de kemiske analyser blev tidligere opgivet som procent af de enkelte grundstoffers oxider (ilte). Det første problem, Bergman stod overfor, var at vælge, hvilken art (genera) et givet mineral skulle henregnes til. Her valgte han at klassificere det efter den tungeste komponent, dvs. efter det grundstof, der har den højeste atomvægt. De fleste mineraler kan opbygges af 5 forskellige oxider (jordarter): p „Tungjord“ bariumoxid (BaO), c „Kalkjord“ calciumoxid (CaO), s „Kiseljord“ siliciumoxid (SiO_2), a „Lerjord“ aluminiumoxid (Al_2O_3), m „Magnesia“ magnesiumoxid (MgO), her anført i den naturlige rangorden. Han klassificerede nu mineralerne i klasser efter hvor mange komponenter, de indeholdt: Binære, fx es, der svarer til calciumsilicat (Wollastonit). Ternære, fx pcas, (Pollucit) og Quaternære, fx pcas. etc. Det snedige ved Bergmans system er, at det rummer mulighed for dels at henregne kendte mineraler til deres rette klasse, dels at forudsige eksistensen af nye mineraler.

Bergman teoretiserede også over, hvor mange arter, der kan være i hver klasse. Her benyttede han simple kombinatoriske principper. Der er således 20 binære arter, men med hans rangordning i mente, kunne han slippe af med halvdelen af disse. Til gengæld regnede han med, at komponenternes rækkefølge i forbindelserne var

afgørende for de kemiske egenskaber. Ved ombytning af to komponenter regnede han med at få forskellige forbindelser. Hvis de komponenter, man opererer med, til gengæld svarer til aminosyrer eller nucleotider, og komponenterne er bundet sammen i kæder, så bliver rækkefølgen vigtig, og vi ender med det store antal forskellige forbindelser, som Bergman forudsagde. Dette princip er grundlaget for den kombinatoriske kemi, hvor en bestemt procedure sikrer, at man får fremstillet alle de forskellige kombinationer med henblik på at teste deres biologiske aktivitet. Vi ser altså, at Bergman uden implicit at formulere den, opererer med en strukturkemi. Dette er igen et aspekt, hvor han var langt forud for sin tid.

Konklusion

Der er stadig kemikere, der drømmer om at gøre kemien til et logisk, deduktivt system, men alle de forsøg, der er gjort i den retning, er strandet på den store kompleksitet, som reale kemiske systemer har. Et simpelt problem som at forudsige, hvorledes molekylerne eller ionerne i en given kemisk forbindelse vil arrangere sig rumligt, når forbindelsen krystalliserer, kan ikke forudsiges med nogen rimelig grad af nøjagtighed med de eksisterende beregningsmodeller. Dette forhold synes ikke at ændres, selvom regnemaskinerne gøres større.

Uforudsigeligheden synes at hænge sammen med, at udfaldet af et givet eksperiment bestemmes af så mange forskellige faktorer, at problemet får et så stort antal af næsten lige gode løsninger, at det ikke bliver muligt at vælge den absolut bedste. Energiminimering har generelt været antaget at føre til den mest sandsynlige løsning, men netop indenfor krystallisering ses det ofte, at metastabile løsninger er dem, naturen foretrækker [7]. Hvis systemet så er uendelig lang tid om at nå den termodynamisk forudsagte struktur (grundtilstanden), er modellen jo ikke meget bevendt.

Noter

- [1] D. Diderot og J. d'Alembert *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts, et des métiers* Paris 1751 - 1765.
- [2] T. Bergman *Disquisitio de attractionibus electivis* Nova Acta Reg. Soc. sci. Upsaliensis II, 161 (1775). Udkom i bogform på engelsk i 1785.
- [3] T. Bergman *Forslag At förbättra Alun-luttringen* Kgl. Vel Akad. Handl. 1767 p. 67.
- [4] T. Bergman *Nova Acta Reg. Soc. sci. Upsaliensis* IV, 63-128 (1784). Artiklen udkom også som en selvstændig bog to år tidligere.
- [5] T. Bergman *Opusculus chymiques et physiques* I-III oversat til engelsk af E. Cullen London 1784-91.
- [6] T. Bergman *Manuel du Minéralogiste; Sciographie du Regne Mineral* 2. ed Paris 1792.
- [7] Et system er metastabilt, hvis det er fanget i et lokalt minimum med højere energi end grundtilstand

Modeller og visioner i kemien

Matematiske modellers status i kemien 1800-1930

Af: Jens Spanget-Larsen
Institut for Biologi og Kemi
Roskilde Universitetscenter
Postboks 260, DK-4000 Roskilde
e-mail: spanget@ruc.dk



Som en af de ældste videnskaber har kemien en lang og rig historie. Dens oprindelse står i gæld til forhistorisk teknologi og oldgræske spekulationer. Men gennem århundreder bar den kemiske videnskab præg af alkymi og mysticisme og man kan først begynde at tale om kemien som en naturvidenskab i moderne forstand hen mod slutningen af 1700-tallet; se f.eks. Rancke-Madsen (1987). På den tid havde fysikken for længst etableret sig som det vi i dag forstår ved en egentlig naturvidenskab, og den var bl.a. karakteriseret ved en udstrakt brug af matematiske modeller og metoder. Det var imidlertid ganske uafklaret hvilken rolle matematikken kunne spille indenfor kemien. Situationen beskrives således af filosofen Immanuel Kant:

"Solange als noch für die chymischen Wirkungen der Materien aufeinander [...] kein Gesetz der Annäherung oder Entfernung der Theile angeben läßt [...] (eine Forderung, die schwerlich jemals erfüllt werden wird), so kann Chymie nichts mehr als systematische Kunst, oder Experimentallehre, niemals aber eigentliche Wissenschaft werden, weil die Principien derselben blos empirisch sind und keine Darstellung a priori in der Anschauung erlauben, [...] weil sie der Anwendung der Mathematik unfähig wird"

Immanuel Kant (1786)

Kant siger, at så længe vi ikke kender lovene for vekselvirkningerne mellem stoffets bestanddele, så kan kemi ikke blive en egentlig naturvidenskab (som fysikken), men må forblive en rent empirisk eksperimentallære, uden mulighed for en dybere forståelse, fordi matematik ikke kan anvendes. Iflg. Kant er den matematisk-fysiske videnskab et ophøjet ideal for andre naturvidenskaber. Denne opfattelse er udtrykt af mange videnskabsfolk gennem tidens løb, ikke mindst af matematikere og fysikere. Den belgiske matematiker Adolphe Quetelet er således citeret for følgende udsagn:

"The more progress physical sciences make, the more they tend to enter the domain of mathematics, which is a centre to which they all converge. We may even judge the degree of perfection to which a science has arrived by the facility with which it may be submitted to calculation"

L. A. J. Quetelet, citeret af E. Mailly (1874)

Et andet eksempel er fysikeren Ernest Rutherford, der skulle have udtalt: "All science is either physics or stamp collecting" (i den sammenhæng er det bemærkelsesværdigt at Rutherford i 1908 modtog nobelprisen, ikke i fysik, men i kemi!).

Kant var pessimistisk mht. til lovene for de kemiske vekselvirkninger ("chymischen Wirkungen"); han forudså at vi aldrig ville opnå kendskab til disse love. Filosofen Auguste Comte, positivismens grundlægger, var endnu mere radikal:

"Every attempt to employ mathematical methods in the study of chemical questions must be considered, now and always, profoundly irrational and contrary to the spirit in chemistry. [...] If mathematical analysis should ever hold a prominent place in chemistry - an aberration which is happily almost impossible - it would occasion a rapid and widespread degeneration of that science"

Auguste Comte (1830)

Han havde den opfattelse at kemien nødvendigvis er og altid vil være en rent empirisk videnskab. Anvendelsen af matematiske modeller indenfor kemien vil være en fatal misforståelse, der vil føre til kemiens undergang som seriøs videnskab! Dette er en ekstremt positivistisk opfattelse: Sand viden om virkeligheden kan kun opnås gennem direkte eksperimentelle observationer, og eftersom vi principielt ikke har nogen mulighed for at observere materiens inderste væsen er det nytteløst at spekulere i matematiske modeller. Matematiske modelforestillinger indenfor kemien vil ikke handle om virkeligheden, men vil være ren spekulation og mysticisme, og vil derfor betyde et katastrofalt tilbageskridt.

Der var dog også dem der så optimistisk på mulighederne for matematisk analyse i kemien. Franskmanden Gay-Lussac, én af den moderne kemis grundlæggere, havde store forventninger:

"We are perhaps not far removed from the time when we shall be able to submit the bulk of chemical phenomena to calculation"

Joseph Louis Gay-Lussac (1808)

Gay-Lussac opdagede loven om reagerende gassers volumenforhold, "gasser reagerer med hinanden i simple

volumenforhold", og det har åbenbart givet ham anledning til store forventninger med hensyn til matematikkens anvendelighed i kemien. Endnu større forventninger havde englænderen *Charles Babbage*, mest kendt for sine opfindelser af yderst avancerede mekaniske regnemaskiner:

"All of chemistry, and with it crystallography, would become a branch of mathematical analysis which, like astronomy, taking its constants from observation, would enable us to predict the character of any new compound and possibly the source from which it might be anticipated"

Charles Babbage (1838)

Babbage forudser udviklingen af matematisk-kemiske modeller der kan beskrive stoffernes egenskaber og forudsige nye kemiske forbindelser (måske ligesom de mekaniske modeller af planetsystemet der kan beskrive planeternes bevægelser og forudsige eksistensen af nye, ikke tidligere observerede planeter?). Babbage forudser i sin vision hvad der svarer til vore dages "molecular modelling" og "computational chemistry".

Som man kan se var der stærkt divergerende opfattelser og forventninger mht. matematikkens mulige rolle i kemien. Ikke desto mindre gjorde kemien meget store fremskridt i løbet af 1800-årene. Atomteorien blev indarbejdet, og man udviklede forestillinger om bl.a. affinitet og valens, kemisk binding, og molekyler og deres rumlige gestalt. Vejen til indsigt var ofte intuitiv og ikke altid i overensstemmelse med moderne videnskabsteoretiske principper! Se f.eks. Berson (2003). Denne udvikling foregik på rent empirisk grundlag og uden kendskab til atomernes opbygning og de grundlæggende love for vekselvirkningerne mellem atomerne. Omkring århundredskiftet kunne man således læse i en dansk kemilærebog:

"Grundstofferne kan forekomme frit i Naturen, f.Eks. Svovl og Guld, men i almindelighed findes de i Forbindelse med hverandre. Dette beror paa, at de har kemisk Tiltrækning (Affinitet) til hverandre og derfor forener sig til kemiske Forbindelser. Den kemiske Tiltrækning er en ejendommelig og selvstændig Naturkraft, der ligesom de andre Naturkræfter (Varme, Tyngde osv.) kun kjendes af sine virkninger, men ikke i sit Væsen"

Chr. Christensen (1901)

Med andre ord: Vi kender fænomenet kemisk binding, men vi har ingen anelse om fænomenets årsag. Den kemiske binding må tilskrives en ukendt kemisk naturkraft.

Men nu begyndte der at ske noget helt nyt og meget betydningsfuldt indenfor fysikken. Omkring år 1900 indledtes udviklingen af den moderne kvanteteori, med navne som bl.a. Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Louis de Broglie, Werner Heisenberg og Erwin Schrödinger. Resultatet var kvantemekanikken eller bølgemekanikken, der blev formuleret i årene 1925-1926. Her skal vi ikke komme nærmere ind på dette gennembrud indenfor fysikken, men det havde stor betydning for den teoretiske kemi: Nu forelå endelig en grundlæggende matematisk-fysisk teori for vekselvirkningen mellem atomerne.

Den første eksakte kvantemekaniske behandling af et system med en kovalent kemisk binding blev gennemført af danskeren *Øjvind Burrau* på Niels Bohrs Institut for teoretisk Fysik i København, og resultaterne blev offentliggjort i foråret 1927. Burrau betragtede hydrogenmolekylionen H_2^+ , et system bestående af to protoner og en elektron. Indenfor den model, der senere er blevet kendt som Born-Oppenheimer tilnærmelsen, løste han schrödingerligningen numerisk for elektronen i feltet fra de to protoner. Følgende figur viser systemets totale energi som funktion af kerne-kerne afstanden. Vi ser her den første eksakte beregnede molekylære "potential-kurve", et udtryk for den kraft der virker mellem kernerne i molekylet (Burrau 1927):

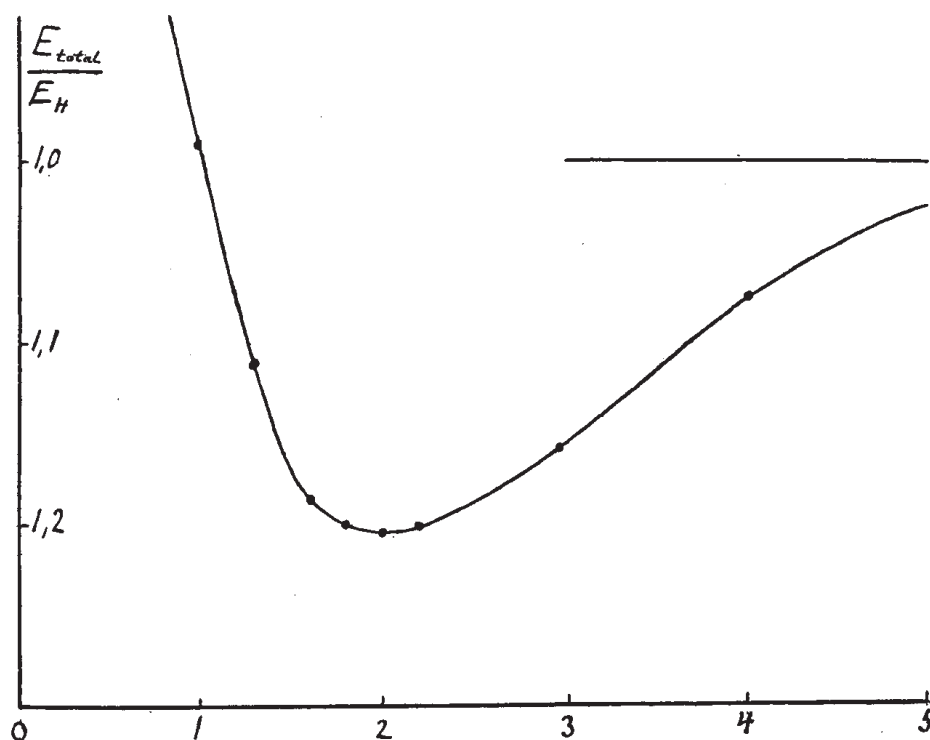
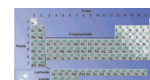


Fig. 2.



Næste figur viser en afbildning af den beregnede "elektrontæthed" (dvs. kvadratet på elektronbølgefunktionen). Det er det første præcise billede af det vi i dag kalder en molekylorbital (Burrau 1927):

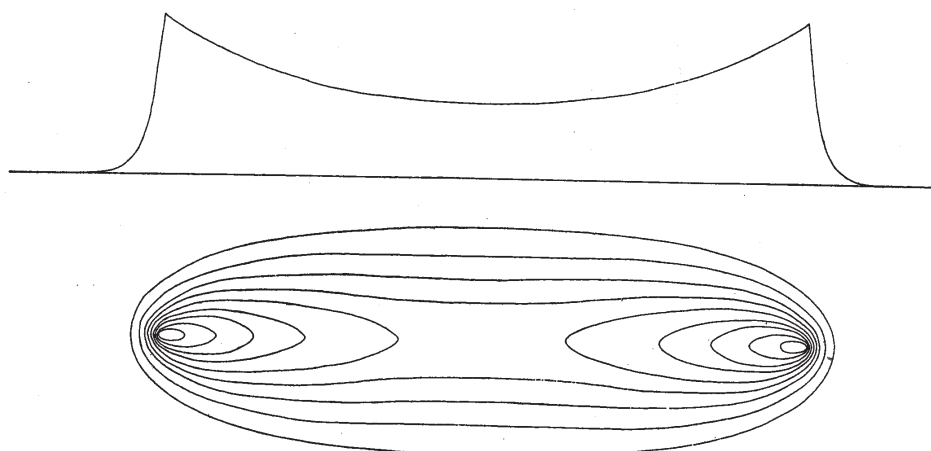


Fig. 8.

Burraus pioner-indsats kan betragtes som fødselen af den teoretisk-kemiske disciplin, der benævnes *ab initio*-kvantekemi (se f.eks. Kragh 2000). Burrau gjorde efterfølgende en glimrende karriere, ikke som kvantetoretiker, men som geodæt; han blev leder af Danmarks geodætiske Institut og statsgeodæt.

Disse og andre resultater, f.eks. nordmanden Hylleraas' beregninger på heliumatomet (et system med én kerne og to elektroner), bekræftede at kvantemekanikken var empirisk korrekt. Den britiske fysiker *Paul Dirac* kunne i 1929 slå fast at de eneste kræfter der er ansvarlige for kemiske fænomener er elektrostatiske, dvs. af rent fysisk natur. Der er således ingen særlige kemiske kræfter, hvilket stadig var en udbredt opfattelse. Med kvantemekanikken har vi den savnede matematisk-fysiske teori for vekselvirkningerne mellem atomerne:

"The underlying physical laws necessary for the mathematical theory of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty is only that the application of these laws leads to equations much too complicated to be soluble. It therefore becomes desirable that approximate practical methods of applying quantum mechanics should be developed, which can lead to an explanation of the main features of complex atomic systems without too much computation"

P. A. M. Dirac (1929)

"Dirac's Dictum" har været heftigt diskuteret, se f.eks. Kutzelnigg (2000). Citatets første sætning er blevet udlagt som en påstand om at kemi kan reduceres til fysik. Det er ikke usandsynligt at det var Diracs opfattelse, men det er strengt taget ikke det han siger her. Han hævder at alle de fundamentale fysiske love der er nødvendige for at forstå kemiske fænomener er kendte; han siger ikke at alle kemiske fænomener og begreber kan udledes fra dis-

se love. Men det er en diskussion der stadig føres blandt filosoffer og videnskabsteoretikere (se f.eks. Primas (1981,1985), Kutzelnigg (2000), Trinajsti & Gutman (2002), samt litteratur citeret i disse arbejder).

I årene omkring 1930 trådte den kemiske videnskab således ind i en ny fase. Kemien kunne nu betragtes som en "egentlig naturvidenskab" i den Kant'ske forstand! Den amerikanske fysiker *John C. Slater* havde den opfattelse at formuleringen af kvantemekanikken betød at der nu ikke længere var nogen grund til at skelne skarpt mellem fysik og kemi. I indledningen til sin lærebog fra 1939 skriver han således:

"It is probably unfortunate that physics and chemistry ever were separated. Chemistry is the science of atoms and of the way they combine. Physics deals with the interatomic forces and with the

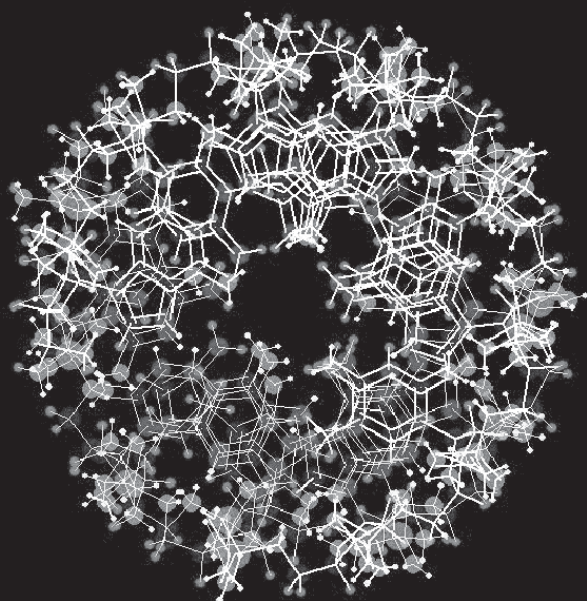
large-scale properties of matter resulting from those forces. So long as chemistry was largely empirical and nonmathematical, and physics had not learned how to treat small-scale atomic forces, the two sciences seemed widely separated. But with statistical mechanics and the kinetic theory on the one hand and physical chemistry on the other, the two sciences began to come together. Now that statistical mechanics has led to quantum theory and wave mechanics, with its explanation of atomic interactions, there is really nothing separating them any more"

John C. Slater (1939)

Denne udvikling blev imidlertid ikke modtaget med udelt begejstring. Kemikerne havde gennem århundreder kæmpet sig frem til betydelig indsigt, ved metodisk arbejde i laboratorierne og systematisk indsamling og katalogisering af empiriske data. Og nu kom der her nogle skrivebordsteoretikere der ikke vidste noget om praktisk kemi og bildte sig ind at de kunne beregne sig frem til det hele! Den britiske organiske kemiker *H. E. Armstrong* kan opfattes som en eksponent for denne holdning (selv om hans udtalelse ikke er specielt rettet mod de nye kvantekemikere, men mod "fysiske kemikere" generelt):

"The fact is, there has been [...] the addition of a new class of worker into our profession people without knowledge of the laboratory arts and with sufficient mathematics at their command to be led astray by curvilinear agreements; without the ability to criticise, still less of giving any chemical interpretation. [...] The fact is, the physical chemists never use their eyes and are most lamentably lacking in chemical culture. [Ö] It is essential to cast out from our midst, root and branch, this physical element and return to our laboratories"

H. E. Armstrong (1936)



Polynucleotide

Kilde <http://www.exorga.com/>

Kvantemekanikken var vanskeligt tilgængelig, og der skulle gå endnu en del år før de nye teoretiske ideer fik betydning for praktisk arbejdende kemikere. Et bemærkelsesværdigt gennembrud i denne proces var opklaringen af reaktionsmekanismerne for de såkaldte pericykliske reaktioner i den organiske kemi ved hjælp af "Woodward-Hoffmann reglerne" (1970). Disse "regler", baseret på kvalitativ molekylorbital teori og symmetriargumenter, forklarede med ét slag disse reaktioners specifikke stereokemiske forløb, hvis årsag hidtil havde været et mysterium. Forenklede orbital modeller, kombineret med overvejelser på grundlag af symmetri- og topologi-forhold, har haft stor indflydelse på den almene begrebsdannelse indenfor kemien og har for længst fundet plads som selvfølgelig elementer i den grundlæggende kemiundervisning (i hvert fald på de højere læreanstalter). Samtidig er udviklingen og anvendelsen af mere eksakte kvantekemiske beregningsmetoder til løsning af kemiske problemer blevet af stadig voksende betydning, i takt med den teknologiske udvikling på databehandlingsområdet, og "computer-kemikere" er i dag blandt de mest umættelige forbrugere af avanceret EDB-kapacitet.

Ovenstående lille historiske oversigt handler om anvendelsen af matematisk-fysiske modeller indenfor kemien, en udvikling der som nævnt nåede en foreløbig kulmination med formuleringen og anvendelsen af kvantemekanikken i årene omkring 1930. Den matematik der indgår i disse fysik-baserede modeller hører typisk til den *kontinuerte* matematik. Det skal imidlertid ikke glemmes at den *diskrete* matematik har mange vigtige kemiske anvendelser, og disse er normalt ikke knyttet til en underliggende fysisk teori. Et spørgsmål som "hvor mange isomere alkaner findes med formlen C_NH_{2N+2} ?" er i det væsentlige et kombinatorisk problem. Kemiske formelbilleder, molekylstruktur og substitutionsmønstre kan analyseres ved hjælp af grafteori og gruppeteori. Enhver kemiker kender til betydningen af molekylers symmetri-egenskaber; disse behandles elegant ved hjælp af mate-

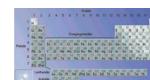
matisk gruppeteori. For en glimrende oversigt over forskellige anvendelser af diskret matematik i behandlingen af kemiske problemer henvises til Trinajsti & Gutman (2002).

Referencer

- Armstrong, H. E. (1936). "Tonomania in Extremis", *Chemistry and Industry* **14**, 916.
- Babbage Ch. (1838). Quoted in *Faster than Thought*, B. V. Bowden, ed., Sir Isaac Pitman Sons, Ltd, London, 1953, p 12.
- Berson, J. A. (2003). *Chemical Discovery and the Logicians' Program. A problematic Pairing*, Wiley-VCH, Weinheim.
- Burrau, Ø. (1927). "Berechnung des Energiewertes des Wasserstoffmolekel-Ions (H_2^+) im Normalzustand", *Die Naturwissenschaften* 16-17 (NäZuschrift", 22. November 1926).
- Burrau, Ø. (1927). "Berechnung des Energiewertes des Wasserstoffmolekel-Ions (H_2^+) im Normalzustand", *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddelelser* **7**, 1-18.
- Christensen, Chr. (1901). *Lærebog i Kemi*, August Bangs Boghandels Forlag, København.
- Comte, A. (1830). *Cours de philosophie positive*, Schleicher, Paris.
- Dirac P. A. M. (1929). "Quantum Mechanics of Many-Electron Systems", *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, **123**, 714.
- Gay-Lussac, J. L. (1808). *Memoires de la Societe d'Arcueil* **2**, 207.
- Kant, I. (1786). *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Hartknoch, Leipzig.
- Kragh, H. (2000). "Quantum Interdisciplinarity. Friedrich Hund and Early Quantum Chemistry", *Hosta*, No. 4, 1-17 (<http://www.ifa.au.dk/ivh/hosta/home.dk.htm>)
- Kutzelnigg, W. (2000). "Perspective on ÔQuantum mechanics of many-electron systems' [Dirac (1929)]", *Theoretical Chemistry Accounts* **103**, 182.
- Mailly, E. (1874). *Eulogy on Quetelet*.
- Primas, H. (1981). *Chemistry, quantum mechanics and reductionism*, Springer, Berlin.
- Primas, H. (1985). "Kann Chemie auf Physik reduziert werden?", *Chemie in unserer Zeit* **19**, 109, 160.
- Rancke-Madsen, E. (1987). *Kemiens Fødsel*. Gads Forlag, København.
- Slater, J. C. (1939). *Introduction to Chemical Physics*, McGraw-Hill, New York
- Trinajsti, N., Gutman, I. (2002). "Mathematical Chemistry", *Croatia Chemical Acta* **75**, 329.
- Woodward, R. B., Hoffmann, R. (1970). *The conservation of orbital symmetry*, Verlag Chemie, Weinheim/Bergstrasse.

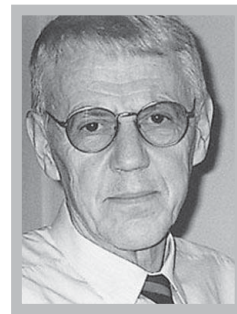
Note

Baseret på et foredrag holdt 29. april 2004 i forbindelse med "16. RUC-modeldag" arrangeret af IMFUFA, RUC (<http://mmf.ruc.dk/SEMINAR/modeldag16.htm>).



Kvantekemi

En matematisk disciplin?



Af: Jan Linderberg
Kemisk Institut,
Aarhus Universitet
email: jan@chem.au.dk

Kvantekemien opstod i Zürich, hvor to fysikere, Fritz London og Werner Heitler, ville undersøge hvordan Erwin Schrödingers bølgemekanik kunne bruges til at beregne vekselvirkningen mellem to brintatomer på afstand fra hinanden, den så kaldte van der Waals kraft. De var i stand til at fremlægge deres resultater ved en konference i Freiburg i juni 1927 og kunne vise at deres *ansatz* også beskrev den kovalente binding mellem brintatomer ved ligevægtsafstanden. Således begyndte en ny og spændende epoke i kemien.

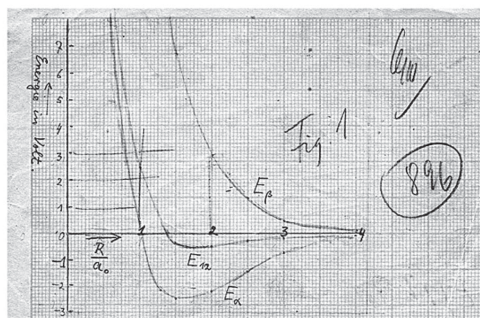
Tredive år senere blev jeg trukket ind i den kvantekemiske cyklon som var ved at udvikle sig i med øjet i Uppsala og som fik sin energi fra Per-Olov Löwdin. Han var docent i matematisk fysik og mekanik og havde i nogle år dyrket kvantemekanikken og dens brug ved analyse og beskrivelse af atomers, molekylers og faste stoffers elektronstruktur. Han søgte i foråret 1957 medarbejdere med interesse for numeriske beregninger og i min naivitet troede jeg, at det var en mulighed for at tjene nogle kroner ved aftenarbejde med elektromekaniske regnemaskiner. Sådanne maskiner havde jeg nogen erfaring med efter et par sommerjob ved AB Bofors ballistiske afdeling. Det viste sig, at der var tale om fuldtidsarbejde og at der nok også skulle blive mulighed at opnå akademiske grader med tiden, måske i Uppsala og ellers i USA.

Interessen for regning og geometri havde jeg tidligt. Min far, der var modelsnedker, havde lært om Pythagoras sætning og om udtrækning af kvadratrødder i nogle års aftenskole. Han viste mig hvordan man udregnede diagonalens længde i bordplader og lignende. Min fortrolighed med matematik styrkedes i gymnasietiden. Det første år fandt jeg i Karlskoga stadsbibliotek Kokomoors bog *Populär Matematik*. Den havde mange gode kapitler og er i mine øjne en bedre bog end Høgbens *Matematik for millioner*, som jeg modtog som bogpræmie ved slutningen af det første år i gymnasiet.

Der blev lejlighed for min kone, vores førstefødte søn og mig til at komme til Gainesville, Florida, i 1960 for at deltage i opbygningen af *Quantum Theory Project* ved universitet som et søsterprojekt til Löwdins gruppe i Uppsala. Vi kom til at leje en møbleret bolig på en villavej nær ved campus. Vores genbo var Frank Kokomoor og hans kone. Jeg var en 25 års fløs med en filosofisk kandidateksamene og mente ikke at en matematikprofessor ved et

amerikansk universitet kerede sig om hvor vidt jeg kunne lide hans bog eller ej. Det burde jeg have ladet komme an på en prøve, mener jeg i dag. Det ærgrer mig fortsat, at jeg ikke brugte muligheden at vise ham min begejstring.

Matematisk færdighed og overblik er en nødvendig forudsætning for teori- og metodeudvikling i kvantekemi. Da jeg kom til Århus i 1966 og skulle starte et nyt førstedelsfag, Kemi 6, i 1967, fik jeg mulighed at påvirke indholdet i Vibeke Borchsenius' Matematik A og B. Resultatet blev et glimrende pensum. De studerende lærte,



Tegning af den beregnede elektroniske energi som funktion af afstanden mellem protonerne i brintmolekylet fra Fritz Londons arkiv ved Duke University, Durham, NC. David Beratan har venligst digitaliseret billedet.

foruden analyse med reelle tal, også lineær algebra og vektor analyse, teorien for endelige grupper samt kompleks analyse med residueregning. De fleste af de andendels- og specialestuderende, som kom til afdelingen for teoretisk kemi, havde denne ballast og forstod at bruge den. Pensummet var godt, men det var også Vibekes enestående pædagogiske formåen, som førte til gode resultater. Jeg blev selv engageret som instruktør ved øvelser i Matematik B i nogle år og oplevede på nært hold de studerendes engagement og tilegnelse af stoffet. En mindre konference i Roskilde for et par år siden gav vidnesbyrd om den brede indflydelse som Vibeke Borchsenius' undervisning har haft blandt kemikere fra Århus.

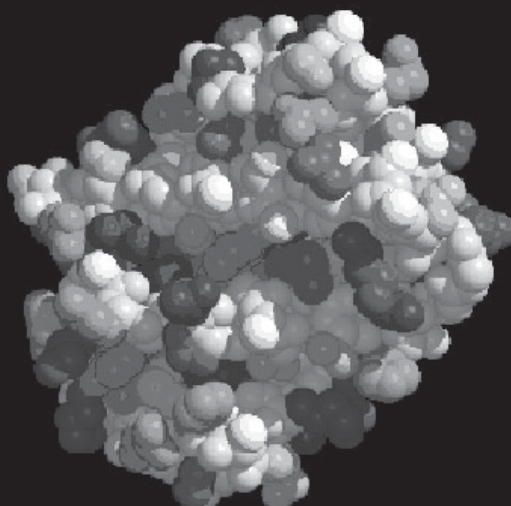
Da Borchsenius fratrådte, forandredes studieplanerne. Hendes kursus strakte sig over to semestre med halvanden times forelæsning og halvanden times øvelse per uge. En nyordning medførte, at kun et semester var til rådighed og at tolv eller tretten ugers undervisning i det samme pensum skulle klares. Min oplevelse af dette var ikke positiv. Et tre timers pas med øvelser kan ikke erstatte to pas à halvanden time med en uge imellem. Den fornødne fordøjelse af stoffet opnås ikke og jeg oplevede, at de afleverede besvarelser blev ringere. Matematiske begavelser klarer sig altid, men de, som må bruge hårdt arbejde, får dårligere betingelser, da der bliver mindre tid til at lade matematikken hvile i det underbevidste.

Vibeke Borchsenius' noter er forbilledligt direkte og koncise. De er nærmest sammenlignelige med en klassiker som *Inequalities* af Hardy, Littlewood og Polya, hvor præcise formuleringer og klare beviser gør læsningen til en ren fornøjelse. Bogen blev mig anbefalet af Bo Kjellberg da jeg læste første års matematik i Uppsala, men der gik desværre flere år før jeg fik den anskaffet.

Courant og Hilberts *Methoden der mathematischen Physik I* er en anden klassiker, som jeg har brugt meget. Det første kapitel, som handler om lineære transformationer og kvadratiske former, indeholder materiale, som jeg mener også burde have en plads i vor tids lærebøger.

Endnu en vigtig bog skal omtales: *Handbook of Mathematical Functions* fra National Bureau of Standards med Milton Abramowitz og Irene A. Stegun som redaktører. Dens numeriske tabeller er ikke så væsentlige i dag hvor ens Mac (eller PC) ofte har et program for symbolsk algebra som kan beregne tabeller hurtigere end man kan interpolere en værdi fra den trykte form. Min brug af denne bog gælder for det meste at finde varianter af relationer mellem funktioner, rekursive relationer, integralfremstillinger og lignende. Jeg kunne på den måde finde nøjagtig den form af de hypergeometriske funktioner, som jeg havde brug for ved en analyse af en model for kemiske reaktioner¹.

Til slut har jeg nogle betragtninger om matematikkens plads i kvantekemien. Gruppeteorien var ugleset blandt fysikere og kemikere i trediverne. John Slater var specielt kritisk og fremhæver i sin berømte studie af atomare elektrontilstande, at resultaterne var opnået uden brug af gruppeteori. Udtrykket "gruppenpest" udtrykte den modstand som rådede. En grund til Slaters utilfredshed var sikkert manglen på gode lærebøger. Eugene Wigners bog kom først i trediverne, men ansås for svært tilgængelig og ikke engang hans svoger, Paul Dirac, var begejstret for teorien om grupper. Adskillige forfattere har siden følt sig kaldet at skrive om gruppeteori for kemikere og nogle har haft held med det. Den så kaldte andenkvantisering, en algebraisk teknik ved behandling af mange-elektron teorien, var også dømt ude i mange år. Man mente ikke, at den var relevant for ikke-relativistisk elektronstrukturteori. Kvanteelektrodynamikken kunde beholde teknikken for sig selv. Slater havde også her den opfattelse, at det var tale om en ikke ønskelig abstraktion og selv om teknikken blev mere almindeligt brugt i tresserne, holdt han fast i sin vurdering fra tidligere. I dag må den anses at være accepteret og dens værktøjer er naturlige at bruge. Populariseringen kom til stor del via Feynmans diagrammer. De anskueliggjorde led i rækkeudviklinger



Hemoglobin

Kilde <http://www.exorga.com/>

og viste vej til summering af formelt divergente rækker som ellers var vanskeligt tilgængelige.

En relativt moderne matematisk indflydelse i kvantekemien er den såkaldte komplekse skalering. Arbejder af Erik Balslev og andre viste, at Schrödingers ligningens spektrum transformerer på en interessant måde, når man lader alle rumlige koordinater blive komplekse. Resonanser i det kontinuerte spektrum kan da isoleres og deres energier og levetider bestemmes.

En af mine venner fra Uppsala, Erkki Brändas, havde fatet interesse for dette og ved et besøg i Århus i efteråret 1976 kunne han forbavse Balslev med, at det gik at bruge denne teknik ved numeriske beregninger. Det resulterede i et flerårigt samarbejde mellem matematikere, fysikere og kvantekemikere.

Det har været flere kvantekemikers lod at finde ansættelse ved matematiske institutter. Charles Coulson var Rouse Ball Professor i Oxford i mange år, før han blev professor i teoretisk kemi. Han beskriver i sin tiltrædelsesforelæsning² forholdet mellem matematik og kemi med henvisninger til Kant, Sylvestre, Frankland og Schützenberger, som alle forudså den stigende indflydelse som matematikken ville få i kemien. Det er uklart for mig, om denne udvikling vil fortsætte eller om de eksperimentelt arbejdende kemikere vil lade sig nøje med computersimuleringer.

Noter:

- 1 J. Linderberg og Y. Öhrn, *Propagators in Quantum Chemistry*, 2nd Ed. (Wiley-Interscience, Hoboken, NJ 2004) Appendix F, p.251.
- 2 C. A. Coulson, *Theoretical Chemistry, Past and Future* (Clarendon, Oxford 1974) p.9

Matematik i det offentlige satiriske rum for hundrede år siden



Af: Henrik Kragh Sørensen
Høgskolen i Agder, Kristiansand, Norge
e-mail: mail@henrikkragh.dk

Resumé

Historien om matematikkens rolle i samfundet og denne rolles udvikling i takt med matematikkens og samfundets modernisering i årtierne omkring 1900 kan fortælles på mange forskellige måder. Her er den illustreret gennem en række satiriske og humoristiske kilder, som spydigt, men ofte kærligt spiddende, forsyner os med nye vinkler på offentlighedens opfattelse af matematik og matematikere. Det fremkommende billede fokuserer især på den bredere befolknings forhold til matematikundervisningen — som oftest i form af en "matematikforskrækkelse" — og på den samme befolknings opfattelse af matematikerne, hvis beskæftigelse ofte var "utilgængelig" og "ubeskrivelig".

Indledning

I sidste del af det nittende og første del af det tyvende århundrede var matematik et skolefag, der havde en lang ubrudt undervisningstradition i grundskolen og gymnasiet. Alle havde mødt matematik i en eller anden form og udstrækning. Derfor var matematik også noget, som mange kunne forholde sig til. Men iblandt de mange mulige billeder af matematikken, som kunne tegnes, synes specielt et at have været fremherskende for mange: Billedet af matematikken som en verdensfjern og uvedkommende videnskab, og måske især af matematikeren som en distræt personlighed.¹

I denne artikel illustreres og diskuteres det offentlige billede af matematik og matematikere ud fra et udvalgt kildemateriale af satiriske fremstillinger. I en tid, hvor hovedparten af informationsstrømmen gik gennem de trykte medier, giver analyser af det satiriske medie en unik vinkel på den stiltiende fælles forståelse, som er en nødvendighed for at humor skal fungere. Udvalget af eksempler er langt fra utømmende, og meget mere kan siges om matematik — og videnskab mere generelt — i de satiriske medier.²

I det følgende præsenteres og analyseres et antal eksempler på humoristiske og satiriske repræsentationer af matematik og matematikere fra årtierne omkring 1900. Disse spænder fra matematikundervisningen over selve matematikkens indhold og til matematikerne. Derved giver de en ny og anderledes — omend lidt fragmentarisk —

vinkel på matematikkens rolle og stilling i Danmark for hundrede år siden.

Matematikundervisning

Igennem det 19. århundrede var der blevet undervist i matematik (og regning) i den lærde skole. Matematikundervisningen omhandlede især den euklidiske geometri, idet denne blev anset for at være "dannende" for logisk tænkning. Den euklidiske lærebygning udgjorde nemlig det paradigmatisk eksempel på hypotetisk deduktiv videnskab, og deduktiv og rationel tænkning blev fremhævet som vigtige for åndslivet.

Trods mange gode intentioner og en tiltagende diskussion af de pædagogiske mål og midler var undervisningen i geometri langt fra altid lige "dannet" og "dannende" for intellektet — EUKLID'S autoritet var så stor, og lærerens forståelse ofte så lille, at undervisningen i stedet udviklede sig til udenadslære og terperi. De euklidiske formuleringer — al deres præcision til trods eller måske på grund deraf — blev til udviklede formularer, som skulle gentages præcist, mere som salmevers uden tilhørende versefødder end som bevidstgjort tænkning.

I figur 1 er afbildet en situation, som må have fundet ganske udbredt genkendelse, både i 1800-tallet og i begyndelsen af 1900-tallet. FRITZ JÜRGENSEN'S (1818–1863) tegning, som daterer sig fra 1860'erne, men først blev trykt efter tegnerens død og siden genoptrykt flere gange, viser en eksamenssituation, hvor en elev overhøres i den euklidiske størrelseslære.³ I baggrunden sidder de andre elever bænket langs væggen, sikkert nervøst ventende på, at de bliver kaldt frem. Den eksaminerede elev bliver stillet et spørgsmål, som sigter til et af EUKLID'S centrale aksiomer, nemlig aksiom I.1. Til trods for sin udviklede formulering handler aksiomet egentlig om almindelig sund fornuft: hvis to størrelser begge er lige så store som en tredje, må de også være lige store med hinanden. Men det formår eleven ikke at svare. I stedet roder han sig ud i kryptiske formularer, der — selvom de er sande — ikke er, hvad læreren søger efter. Da rettes spørgsmålet til en anden elev, som formår at give det "korrekte" svar og derfor roses.

JÜRGENSEN'S tegning er både komisk og tragisk; komisk

¹For matematikkens rolle i Danmark i perioden, se fx (Sørensen 2005, Sørensen 2006b).

²Forfatteren arbejder på en mere omfattende analyse af videnskabens repræsentation i *Blæksprutten*.

³For en biografi af JÜRGENSEN, se (Bjerring 1999).



- “- Siig mig, hvad kan man slutte om to Størrelser, der ere lige store med en og samme tredie?
 - At ... At ... de inte er større end hverandre og heller inte mindre.
 - Nu snakker Du hen i Taaget. Kan Du No. 17 besvare mig dette Spørgsmaal?
 - At ... naar to Størrelser er ligestor med en og samme tredie saa er de indbyrdes ligestore!
 - Fuldkommen rigtigt. Flink Dreng den No. 17, det er en lille Jokumsen, Søn af Kirkeværgen, De veed.”

Figur 1: Fritz Jürgensen om en overhøring i euklidisk størrelseslære; Jürgensen 1972, 18.

fordi den viser den underviste matematiks absurditeter, men tragisk fordi matematik blev brugt som et “sorteringsfag”, og mange havde større eller mindre traumer i den anledning. At overhøringen som her foregik foran den samlede klasse og i overværelse af eksterne censorer, gjorde ikke betydningen af at klare sig godt — eller presset på eleven — mindre.

Det indtryk af matematikkens verden som absurd, som kan skimtes i figur 1, var et gennemgående tema i de satiriske mediers dækning af matematik i den behandlede periode. I en tid, hvor videnskabens anvendelighed i stigende grad blev efterspurgt — krævet og hævdet — i en tiltagende moderniseret verden, fremstod matematik i mange sammenhænge som uanvendelig eller unødvendig. Blikket rettedes her både mod den matematik, som blev undervist i skolen — hvor regning var et særskilt fag — og den matematik, som der blev forsket i ved de højere læreanstalter. De tekniske anvendelser af matematik — og hele polyteknikkens og videnskabens matematiske grundlag — fandt meget sjældnere vej til disse medier.

I figur 2 er gengivet endnu en af JÜRGENSEN’S tegninger, denne gang forestillende en ansættelsessamtale for en dreng i en ikke nærmere specificeret branche, måske som bud. Den unge mands kvalifikationer indenfor regning, skrivning etc. understreges, men da han spørges, om han kan noget matematik, må han svare afkræftende. Reaktionen er imidlertid det interessante: det gør ingen forskel! Matematik var altså en kundskab, som kunne undværes i det praktiske liv.

At figurteksten til figur 2 afsluttes med, at det understreges, at der intet forlysteligt er ved matematik, er bemærkelsesværdigt i sig selv.⁴ I denne sammenhæng underbygger det blot den “matematikforskrækkelse”, som store dele af befolkningen må have lidt under, for at figurer-

ne 1 og 2 har kunnet fungere som satire. Man kommer til at tænke på ROBERT STORM PETERSEN’S (1882–1949) noget senere *Flue*: “Livet er svært, men matematik er sværere” (se figur 5(a), nedenfor), som nok er ment som en trøst, dog næppe for matematikerne.

JÜRGENSEN’S beskrivelse af matematik som unødvendig kan suppleres med en lettere — tilsyneladende mindre spydig — form for humoristisk kritik af matematik. Hvert år udkom *Blæksprutten* med en blanding af vers og artikler, komponerede nyheder og humoristiske tegninger og kommentarer med udgangspunkt i årets begivenheder. Umiddelbart under overfladen i den lette leg med matematiske termer og deres flertydighed, som er gengivet i figurene 3 og 4 ligger to centrale informationer gemt.

For det første viser figur 3, at matematiske termer udgjorde dele af det almindelige sprog. Dette er næppe bemærkelsesværdigt for ord som “cirkel” og “vinkel”, selvom de jo her netop knyttes til ikke-matematiske situationer. På tilsvarende vis kunne der gøres nogen humor med mere særprægede ord som “hypotenuse” og “topvinkel”.

Det er ikke let at rekonstruere referencernes mening så mange år senere. *Markussen & Vinkel* henviser formentlig til et større auktionsfirma eller galleri i København, STEENVINKEL — eller mere præcist VAN STEENWINKEL — er navnet på en fremtrædende hollandsk kunstnerslægt, som arbejdede i Danmark i 1600-tallet, og AXELINE LUND (1836–1918) var en forfatterinde, som var gift med maleren F. C. LUND (1826–1901) og formentlig et fremtrædende navn i de højere klassers sociale liv.

Teksten i figur 3 bærer tydelige forbindelser til formuleringerne i EUKLID’S *Elementerne* og *Data*. Den første observation i figuren, at den lige linje sjældent er den korteste i den praktiske verden antyder også et tema, som kommer tydeligt til udtryk i den følgende figur 4, nem-

⁴For yderligere om denne illustration og om forskningsmatematikens fremmedgørelse fra den brede befolkning, se også (Sørensen 2006a).



“- Naa; af det allerede erfarede synes at fremgaa, at Du har noget Begreb om Regning, Skrivning, Religion, Svømning og saa fremdeles. Siig mig endvidere: kan du nogen Mathematik?

- Næ.

- Det gjør intet til Sagen. Men hvad bringer Dig til at smile? Der er aldeles ikke noget Forlystende ved Mathematik — tvertimod!”

Figur 2: Fritz Jürgensen om matematikkens unødvendighed; Jürgensen 1861.

Matematik. Der skal gøres opmærksom paa, at i det praktiske Liv er den lige Linje langt fra den korteste Vej og at Langelinje er den smukkeste. Af Vinkler skal Vinkel og Magnussen kendes personligt og Steenvinkel af Omtale. Af Cirkler skal de kvindelige Studenter kende den, for hvilken Fru Axeline Lund var en skattet Formand.

Figur 3: “Danske Studenter”; Blæksprutten 1916, side 34.



Moderne Reguladetri

Alle kender det gamle Regnestykke: Naar et Bund Kirsebær koster 2 Mark og 8 Stilling, hvad koster saa en Parfumbillet? Nu om Stunder kunde man fristes til at spørge:

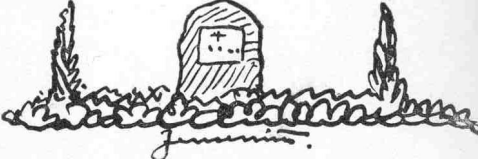
Naar et Bund Kirsebær koster 2 Kr. og 80 Ore, hvad koster det saa at kalde den Handlende en Varefordyrer?



Naar det koster 50.000 Kr. at faa skrevet den bedste folkelige Roman til Gyldebrand, hvormange Solbjergs har det saa kostet at faa Homer til at skrive Odysseen?



Naar det efter Dr. Sindhedes Udsagn, selv med det nuværende Prisniveau, kun koster 8 Ore om Dagen at leve, hvad koster saa et Gravsted paa Vestre Kirkegaard?



Figur 4: “Moderne Reguladetri” (uddrag); Blæksprutten 1921, side 22.

lig at der er mange "vigtige" spørgsmål, som matematik ikke kan svare på.

Selvom man kan sin "reguladetri" (*regula de tri*) kan man med matematikken ikke løse næsten tilsvarende problemer, hvor forbindelsen mellem forudsætningen og spørgsmålet har en mere indviklet struktur. Men ved at bruge matematikkens velkendte skematiske form som ramme formår *Blæksprutten* at stille kritiske og humoristiske spørgsmål til tidens større begivenheder og personligheder. I det udvalg fra de ialt otte opgaver, som er gengivet i figur 4 får både pristigninger, Gyldendals 50-års jubilæum (og hele forlagsverdenen) og Dr. HINDHEDE'S diætetiske anbefalinger en tur med filen.

Matematikens store eksponering i skolen havde altså et dobbelt resultat: mange kendte til matematikkens — det vil især sige geometriens — særegne sprog, men samtidig havde mange et meget anstrengt forhold til skolematematikken. I det følgende afsnit betragtes nogle udvalgte eksempler på præsentationen af den akademiske matematik i de samme medier.

Matematik og matematikere

Offentlighedens komplicerede forhold til skolematematikken havde også forbindelser til billedet af matematik som et videnskabsfag. De akademiske matematikere, som i kraft af deres positioner tillige var offentlige personer, blandede sig sommetider i debatter om matematikkens natur og nytte. Men deres egen forskning var som oftest isoleret fra den offentlige sfære. For eksempel, når pressen rapporterede fra de skandinaviske matematikeres kongresser, var selve indholdet som oftest erklæret for uforståeligt for avisernes læsere, medmindre det da lige drejede sig om matematiske teorier for vejret.⁵

Matematikernes problemer med at "sælge" deres viden til den brede offentlighed er på fremragende vis illustreret i figur 5(b), som er tegnet af STORM PETERSEN og bragt i *Berlingske Aftenavis* den 13. november 1946.⁶ Professoren i matematik ved *Københavns Universitet*, H. G. ZEUTHEN (1839–1920), som godt nok havde været død i årtier, er afbildet som en rejsende dørsælger med "antalsgeometri" som sit sortiment. ZEUTHEN havde gjort denne særlige gren af den algebraiske geometri til sit speciale, og havde opnået international anerkendelse som en af de førende eksperter på området. Men for den lettere forundrede husmoder står antalsgeometri ikke på indkøbslisten. Faktisk er det meget svært at beskrive for den brede offentlighed, hvilken "gavn" antalsgeometrien gør; dens berettigelse var især af intern matematisk natur.

Selvom ZEUTHEN altså ikke formåede at interessere husmoderen i sin matematiske forskning, forgik der jo faktisk matematisk kommunikation også i det semi-offentlige rum udenfor Universitetet. Endnu en tegning af JÜRGENSEN illustrerer (figur 6), hvordan matematikere — som typisk var mænd — foretrækker faglig diskus-

sion i en social sammenhæng, hvor de ellers forventedes at være galante, belevne og høflige. JÜRGENSEN'S karakter "Sophie" — som deler navn med tegnerens søster — finder ikke mændenes samtale interessant, og matematisk snak er blevet stemplet som "nørdet" for at bruge et meget nyere ord.

Når nu offentligheden ikke forstod — og egentlig ikke interesserede sig særligt for — indholdet af den matematiske forskning, var muligheden åbnet for at provokere smilebåndet ved at fremstille forskningens genstandsfelt på en humoristisk måde. Figur 7 viser et uddrag af en større illustration i *Blæksprutten*, hvor 9 forskellige professorer er afbildet i deres respektive forskningssituationer, således som *Blæksprutten* forestillede sig dem. De store smil skyldes, at tegningen er en illustration, som ledsager en udtalelse om, at professorerne ikke behøver højere løn, idet de jo blot gør, hvad de synes allerbedst om.

På tegningen er gengivet to af de centrale danske matematikere anno 1919, NIELS NIELSEN (1865–1931) og HARALD BOHR (1887–1951), på dette tidspunkt ansat på henholdsvis *Københavns Universitet* og *Polyteknisk Lærestalt*. I de to følgende afsnit vender vi tilbage til yderligere afbildninger af netop disse to matematikere. Den højere matematik lader sig ikke beskrive, så i stedet præsenteres de to matematikere, som om de beskæftiger sig med tal, hvilket var en populær opfattelse (og definition) af matematikkens væsen. Men i hvert fald fra begyndelsen af 1900-tallet var denne karakteristik ved at miste sin berettigelse — matematik kom i stadig højere grad til at handle om meget mere abstrakte objekter. HARALD BOHR fremstilles i karrikaturen som lettere distræt eller sløset omkring sin påklædning, mens NIELSEN vel nærmest kommer til at fremstå som påholdende, når han således arbejder med ganske almindelige tal fra et husholdningsregnskab. Deres højere lærdom er fuldstændig anonymiseret, og det kommer i yderste konsekvens til at fremstå som om professorerne blot driver den af med deres "hobby" for Statens penge.

Nu var illustrationen som sagt bragt som en kommentar til EDVARD BRANDES' (1847–1931) forslag om ikke at forhøje professorernes lønninger, så denne udlægning kan ikke tages som udtryk for *Blæksprutten*'s holdning i sagen. Men det fremgår klart, at den matematiske forsknings indhold — og dermed vel også dens nytte — ikke lod sig beskrive til den brede befolkning ad disse populære kanaler. Til gengæld var smilet hos læseren formentlig sikret ved stikpillerne til akademikernes små sociale "synder".

En sjælden kombination af talenter: Harald Bohr

Matematikeren HARALD BOHR, som blev omtalt ovenfor, var yngre bror til den senere så berømte fysiker NIELS BOHR (1885–1962). Men i 1910'erne var HARALD BOHR

⁵Se (Sørensen 2006a).

⁶Forfatteren retter en tak til Jens Bing ved Storm P.-Museet på Frederiksborg for hjælp til at identificere udgivelsen af denne *Flue*.

⁷For BOHR'S biografi og hans fodboldkarriere, se (Ramskov 1995, Ramskov 2000).



(a) Matematik er svært, ifølge Storm P.; Petersen 1950, 101.



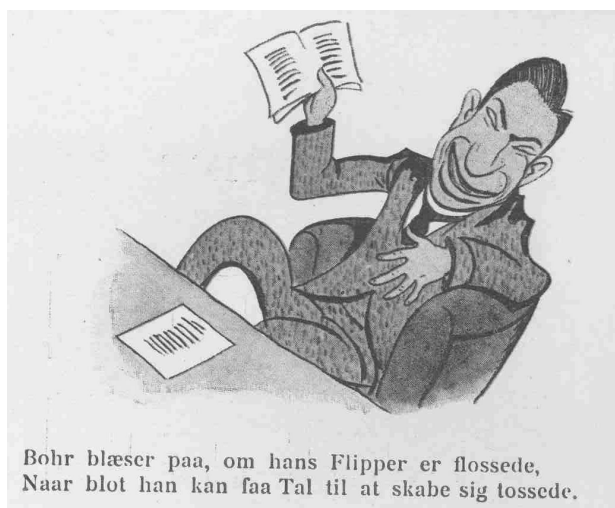
(b) Zeuthen som dørsælger af matematik i Storm P.'s tegning; Petersen 1947, 23, se også Petersen og Vagner 2003, 93.

Figur 5: To af Storm P.'s *Fluer* om matematik.



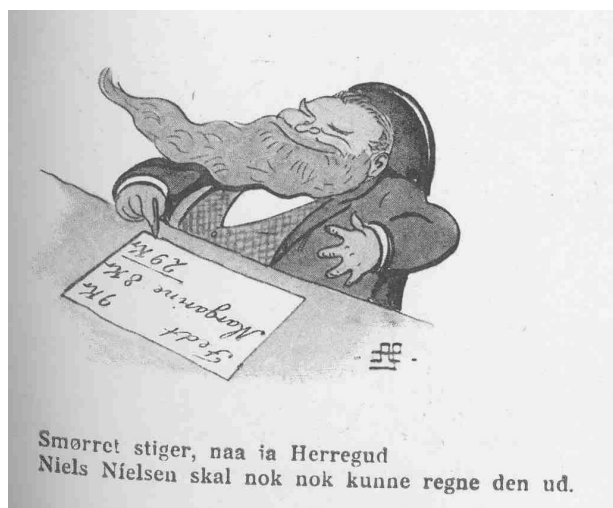
— Sophie interesserer sig ikke for deres Samtale om Mathematik.

Figur 6: Fritz Jürgensen om kvinders interesse for matematik; Jürgensen 1972, 37.



Bohr blæser paa, om hans Flipper er flossede,
Naar blot han kan faa Tal til at skabe sig tossede.

(a) Harald Bohr.



Smørret stiger, naa ia Herregud
Niels Nielsen skal nok nok kunne regne den ud.

(b) Niels Nielsen.

Figur 7: Harald Bohr og Niels Nielsen. Uddrag fra "Aandens Arbejdere", *Blæksprutten* 1919, side 31.

faktisk den mest kendte af de to brødre; ikke så meget i kraft af sin videnskab som på grund af en karriere som fodboldspiller.⁷ Gennem en karriere i AB og på landsholdet (blandt andet to mål og en sølv-medalje ved OL i 1908) blev HARALD BOHR en offentlig person i Danmark, og såvel hans doktordisputats som hans udnævnelse til professor ved *Polyteknisk Lærestanstalt* fandt vej til spalterne i såvel aviserne som kavalkaden *Blæksprutten* (se figur 8). I begge tilfælde spillede de små illustrationer kraftigt på dette dobbelte talent: fodboldspilleren, der også var en fremragende, ung forsker og akademiker.

Dækningen af HARALD BOHR'S akademiske karriere i *Blæksprutten* fremhæver et gennemgående forhold omkring hans offentlige person, idet hans matematik netop ikke lader sig beskrive populært uden at inddrage hans sportskarriere. Ved ikke at kunne berette, hvad HARALD BOHR beskæftigede sig med indenfor sit fag, kommer fodboldspilleren til at stå i forgrunden, og vurderingen af HARALD BOHR'S videnskabelige meritter er helt overgivet til de akademiske autoriteter.

Så sent som i 1936 — i forbindelse med den internationale matematikerkongres i Oslo — optrådte denne dualitet i et interview, som HARALD BOHR gav til den norske avis *Aftenposten*. Efter at have diskuteret professorens besvær med at finde sin bagage blandt de mange kongresdeltagere og kongressens faglige og politiske betydning afsluttes interviewet således:

“—For å tale om noget helt annet, hr. professor, hvordan går det med fotballen? Harald Bohr var i sin tid en av Kjøbenhavns støttespillere, hurtig i opløpet og en ren kanon foran mål. Cirkulens kvadratur som ingen matematiker nogensinne har klart å løse på den sorte tavle, har Bohr gjentagne ganger demonstrert på Idretsparkens grønne teppe.” (*Aftenposten*, 13. juli 1936, 5)

Det er selvfølgelig bemærkelsesværdigt, at fodboldspilleren HARALD BOHR stadig er relevant så mange år senere, men billedet med cirkulens kvadratur har også en direkte forbindelse til det næste, og sidste, eksempel.

En utidssvarende matematiker: Niels Nielsen på Rådhuspladsen

I *Blæksprutten* 1923 finder man en af de mest ekstraordinære afbildninger af en matematikers møde med den omgivende verden (se figur 9 på bladets bagside). Man ser NIELSEN med sit karakteristiske fuldsæk og røde hår — sammenlign med figur 7(b) — stående på Rådhuspladsen i København, angiveligt en tidlig morgen. Hvad NIELSEN laver på Rådhuspladsen en så tidlig morgen fremgår ikke helt klart for beskueren; han er tilsyneladende alene på den store plads, så måske er han heller ikke selv helt klar over, hvad han foretager sig der. NIELSEN er afbildet, mens han står og betragter mønstre på vejen. Om det er kørebaner eller sporvognsskinner, er ikke helt let at se. Pile kunne også antyde, at mønstrene ikke er reelle, men måske kun kan ses i denne form af NIELSEN, som overvejer, om de mon skulle være et forsøg på at løse cirkulens kvadratur!

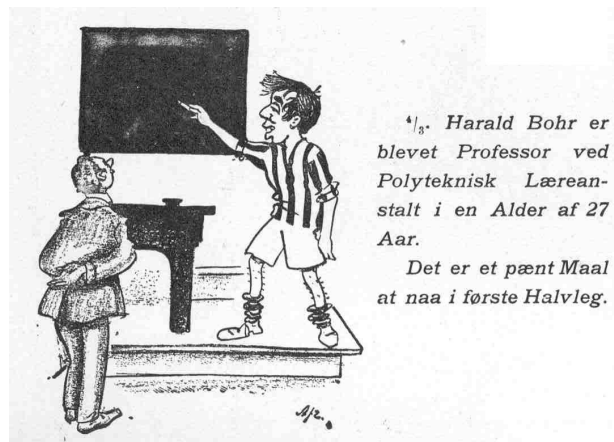
Cirkulens kvadratur er et matematisk problem fra den græske geometri, som er gået over i det almindelige sprog som et af tre prototypiske svære klassiske problemer. Det går ud på — med de græske geometriske hjælpemidler: passereren og linealen — ud fra en given cirkels radius at konstruere et kvadrat med samme areal som den givne cirkel.

I løbet af 1800-tallet studerede matematikere løsningsbetingelserne for ligninger, herunder de ligninger der karakteriserede den græske geometri. For cirkulens kvadratur var det afgørende skridt, at det i 1882 blev bevist af FERDINAND VON LINDEMANN (1852–1939), at π er *transcendent*, dvs. ikke lader sig udtrykke som rod i nogen polynomiell ligning med rationale koefficienter. Dermed var det bevist at være umuligt at konstruere et kvadrat med samme areal som en given cirkel.

Men dette komplicerede argument var ikke bredt kendt i offentligheden. Etablerede matematikere modtog (og modtager nok stadig) jævnligt breve fra amatørmatematikere, som hævdede at løse cirkulens kvadratur. Typisk



(a) Bohrs doktordisputats. *Blæksprutten* 1910, side 36.



(b) Bohrs professorat ved Polyteknisk Læreanstalt. *Blæksprutten* 1915, side 48.

Figur 8: Matematikeren og fodboldstjernen — eller er det omvendt? — Harald Bohr, i *Blæksprutten* 1910 og 1915.

var forsøgene enten grundet i en misforståelse af selve opgavens indhold (fx at konstruktionen skal være *geometrisk*) eller i mere eller mindre trivielle fejlslutninger. Men som figur 9 på bagsiden viser, var problemets sværhed — hvis ikke dets uløselighed — en del af den tavse, offentlige viden.⁸

Når NIELSEN således står helt alene på Rådhuspladsen og i sporvognsskinnernes eller kørebanernes mønstre intuitivt ser noget matematisk, er det en afbildning af en stereotyp: matematikeren som et verdensfjernt menneske, hvis hele tilværelse drejer sig om matematikken. Matematikeren, her NIELSEN, fremstår som distraet og isoleret. Han er ude af takt med det omgivende samfund, som gennemgår en rivende modernisering, som matematikeren kun forsøger at forstå på sine egne præmisser.

Sammenfatning

De satiriske medier giver en anledning til at analysere matematikken for 100 år siden fra en ellers svært tilgængelig vinkel, nemlig offentlighedens opfattelse af matematikken. Vi får belyst et billede, hvor afsmittningen fra den rigide matematikundervisning i skolen til en slags "matematikforskrækkelse" kan ses. Og vi får at se, at selve den matematiske forsknings indhold er ubeskriveligt i disse medier over for offentligheden, hvorfor de i stedet fokuserer på "ydre" omstændigheder, når matematikernes verden skal beskrives.

Begge disse aspekter hører med til den moderniseringsproces, som matematikken gennemgik i den behandlede periode, i Danmark såvel som internationalt. Matematikkens rolle som skolefag blev i høj grad diskuteret, og

anvendelses-orienterede argumenter kom i stigende grad til at spille en rolle som alternativer til den entydige fokuseren på logisk dannelse. Samtidig blev forskningen i matematik stadig mere specialiseret i en sådan grad, at det ikke blot var svært at beskrive forskningen til offentligheden, men endog til kolleger som arbejdede inden for andre grene af matematikken. Dette er aspekter, som er af underliggende nødvendighed for at forstå, hvordan satiren kom til at fungere som humor.

Og ved at fokusere på de satiriske mediers præsentation af matematik og matematikere til offentligheden får vi belyst både nogle af diskussionerne og nogle af stereotyperne. Måske kan vi endda identificere nogle af dem i senere matematik-opfattelser. Måske satiren — smilet og grinet — faktisk kan træde ud af sin tid og appellere til os, også 100 år senere.

Litteratur

- Bjerring, C. (red.): 1999, *Fritz Jürgensen: Jeg fortæller kun noget som angår mig selv*, Christian Ejlers' Forlag, København. Et udvalg af tegninger og malerier, dagbøger og breve.
- Jürgensen, F.: 1861, *20 Tegninger*, Jacob Lund, København.
- Jürgensen, F.: 1972, *Tegninger*, Forlaget Mikro, Aarhus. Redigeret af B. Andersen.
- Petersen, P. B. og Vagner, S. (red.): 2003, *Studentereksamensopgaver i matematik 1806–1991*, Matematiklærerforeningen, København.

Forts. s. 25

⁸Se også (Sørensen 2006a) for et andet eksempel, hvor cirkelns kvadratur bruges i denne betydning i en svensk humoristisk tegning.

Lille dialog om Riemannsummer



Adrien Douady
Département de mathématiques
Université Paris-Sud Orsay
F-91405 Orsay

- Jeg vil vise dig noget mærkeligt. Tag funktionen $f(x) = (\sin x/x)^2$, med $f(0) = 1$.
- Jeg tager den. Den er analytisk, og går mod 0 for $x \rightarrow \infty$.
- Jeg ser på integralet: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.
- Det kan udregnes. Det skulle være...
- Ja, men det er ikke det, der interesserer mig. Se på Riemann summerne $S(\epsilon) = \epsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\epsilon)$.
- De konvergerer mod integralet: f er kontinuert og begrænset af $1/x^2$ som er integrabel og aftagende, så halen vil ikke lægge nogen hindring i vejen.
- Ja, men *hvor hurtigt*?
- En forskel der kan være $O(\epsilon)$, eller måske $O(\epsilon^2)$.
- Ja. Faktisk meget bedre end det.
- $O(\epsilon^4)$?
- Endnu bedre!
- $o(\epsilon^k)$ for ethvert k ?
- Ja, ja, ja ...
- mmlmmmmmlm...
- Det er endnu mere "lille o" end du sagde.
- Jeg har ikke sagt noget.
- Det er "lille o" af hvad du tænker.
- Hvordan kan du vide hvad jeg tænker?
- Det behøver jeg ikke at vide.
- Mener du, at det er en identitet, og at $S(\epsilon) = I$ for ethvert ϵ ?
- Nej, det er ikke sandt.
- Nåh! Hvorfor ikke det?
- Hvis du tager $\epsilon = n\pi$ er der kun leddet med $k = 0$ og det giver $S(\epsilon) = \epsilon = n\pi$.
- Men du har jo lige sagt, at $S(\epsilon) = I$ er "lille o" af hvadsomhelst! Mener du at $S(\epsilon) = I$ for ϵ mindre end et vist ϵ_0 , men ikke for større værdier af ϵ ?
- Ja, sådan er det.
- Men er det ikke i modstrid med analytisk fortsættelse?
- Det kunne man tro, men det er det ikke.
- Er $S(\epsilon)$ ikke en analytisk funktion af ϵ ?
- Afsnitsfølgen konvergerer ligeligt, det sikrer kontinuitet, men ikke analyticitet.
- Hvad hvis vi går ud i den komplekse plan? Funktionen f er holomorf og opad begrænset af k/x^2 i en strimmel $|y| \leq m$.
- Det er ikke tilstrækkeligt. Man skulle have haft en bergrænsning i en sektor omkring den reelle akse, og det har man ikke. Faktisk er $S(\epsilon)$ kun defineret for $\epsilon \in \mathbb{R}$.
- Men hvordan kan du se, at $S(\epsilon) = I$ for ϵ tilstrækkelig lille?
- Det følger af Poissons formel.
- Mind mig lige om hvad den siger.
- Hvis du tager en Dirac kam: $P_h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kh}$, så er dens Fouriertransformerede igen en Dirac kam, nemlig $1/h P_h$.
- Og hvad så?
- Riemann summen $S(\epsilon)$ er skalarproduktet $\epsilon \cdot \langle P_\epsilon, f \rangle$. Ifølge Plancherels formel giver det $\langle P_{1/\epsilon}, \hat{f} \rangle$, dvs $\sum \hat{f}(k/\epsilon)$.
- Ah ha...

– I denne sum er det midterste led $\hat{f}(0)$ integralet af f , og forskellen $S(\epsilon) - I$ er summen af de andre led. For en funktion f som er tilstrækkelig pæn, aftager $\hat{f}$ hurtigt, og de andre led er givet i punkter k/ϵ der ligger langt væk. På den måde kan man også se at Riemannsummer konvergerer mod integralet.

– Men det virker kun fordi punkterne i Riemann summen har præcis samme afstand. Ikke særligt fleksibelt! ... Nuvel, men hvad giver den Fouriertransformerede i vores tilfælde?

– Den Fouriertransformerede $\hat{f}$ af vores funktion er en telt-funktion:



Den har kompakt støtte.

– Så for ϵ tilstrækkelig lille er det kun den midterste tand i 'kammen' $P_{1/k}$ der bidrager til støtten for $\hat{f}$. Nu forstår jeg. Elegant! Det er nu stadigvæk overraskende.

– Hvorfor det?

– Hvad sker der for større værdier af ϵ ?

– For enhver værdi af ϵ er det kun et endeligt antal tænder i kammen $P_{1/\epsilon}$ som findes i støtten for $\hat{f}$. Så længe dette tal ikke ændrer sig er $S(\epsilon)$ en regulær funktion – det er faktisk en Möbius transformeret – af ϵ . Når en ny tand kommer ind (mon ikke det er for $\epsilon = k\pi$?) opstår et hjørnepunkt.

– Det kan man ihvertfald regne ud. Det vil være et "sup" af et uendeligt antal Möbius transformationer. Er det ikke lidt foruroligende?

– Jo det er. Det er derfor jeg gerne ville tale om det. Det har nok forstyrret videnskabsfolk i slutningen af det nittende århundrede. Indtil da var en funktion noget der var givet ved en formel. Hvis du bruger én formel for nogle værdier af den variable, og en anden for andre så fortjener et sådant vægelsind næppe at blive kaldt en funktion.

Jeg tror Fourier var den første der stødte på funktioner af typen $\sum (1/n) \sin(nx)$, som på den ene side er defineret ved en formel, og på den

anden side er sammenstykket som en "Tuborg"-funktion. På den tid var dette foruroligende, og genstand for heftige debatter. Sikker en væsentlig grund til den store indsats for at præcisere analysen som det afstedkom.

I hvert fald, det foruroligende vi ser her, viser hvor meget princippet om analytisk fortsættelse er spontant rodfæstet i matematikernes tanker.

— o —

En let korrektion af Douady's danske er fortaget af H.H. Rugh, B. Branner og P.G. Hjorth

forts. fra side 23

Petersen, R. S.: 1947, *104 Fluer*, Fischers Forlag, København.

Petersen, R. S.: 1950, *107 Fluer*, Fischers Forlag, København.

Ramsgov, K.: 1995, *Matematikeren Harald Bohr*, Licentiatafhandling, Institut for de eksakte videnskabers historie, Aarhus Universitet.

Ramsgov, K.: 2000, Lille Bohr: matematikeren Harald Bohr, i J. Lützen (red.), *Fakultære højdepunkter. Episoder fra Det naturvidenskabelige Fakultets 150-årige historie*, Det naturvidenskabelige Fakultet, Københavns Universitet, København, pp. 77–84.

Sørensen, H. K.: 2005, Eksakte videnskaber — mere eller mindre: De matematiske videnskaber, i H. Kragh (red.), *Natur, Nytte og Ånd, 1730–1850*, bind 2 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, Aarhus Universitetsforlag, Aarhus, kapitel 9, pp. 293–301.

Sørensen, H. K.: 2006a, En udstrakt broderlig hånd: Skandinaviske matematikerkongresser indtil slutningen af 1. verdenskrig. Udkommer 2006 i *Normat*.

Sørensen, H. K.: 2006b, Matematik og statistik, i P. C. Kjærgaard (red.), *Lys over Landet, 1850–1920*, bind 3 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, Aarhus Universitetsforlag, Aarhus, kapitel 7. Udkommer 2006.

(den Internationale Matematiske Union)

Af: Hans J. Munkholm, sekretær for
nationalkomiteen for IMU
e-mail: hjm@imada.sdu.dk



Teksten, der følger, er udarbejdet til brug for det internationale udvalg under Forskningsrådet for Natur og Univers. Den skal – sammen med tilsvarende redegørelser fra andre fagområder – danne baggrund for en indstilling til Det Frie Forskningsråd om fortsatte bevillinger til betaling af kontingenter m.v. til diverse internationale unioner.

IMUs hjemmeside

<http://www.mathunion.org/>

Formel status (direkte citat fra hjemmesiden)

IMU is an international non-governmental and non-profit scientific organization, with the purpose of promoting international cooperation in mathematics. It is a member of the International Council for Science (ICSU).

Formål (direkte citat fra hjemmesiden)

The objectives of the International Mathematical Union (IMU) are:

1. To promote international cooperation in mathematics.
2. To support and assist the International Congress of Mathematicians and other international scientific meetings or conferences.
3. To encourage and support other international mathematical activities considered likely to contribute to the development of mathematical science in any of its aspects, pure, applied, or educational.

Faglig dækning Unionen dækker de matematiske fag

i stor bredde. Udover diverse forgreninger af de fire klassiske "rene" matematikområder (algebra/talteori, analyse, geometri/topologi og logik/grundlag) bl.a. sandsynlighedsregning/statistik; matematisk fysik; kombinatorik; matematiske aspekter af informationsvidenskab; numerisk analyse og scientific computing; kontrolteori og optimering; undervisning og popularisering; matematikkens historie.

Denne bredde afspejles også i sammensætningen af Nationalkomiteen, som udover medlemmer udpeget af Videnskaberne Selskab og Dansk Matematisk Forening også har repræsentanter fra Dansk Selskab for Teoretisk Statistik, Datalogisk Selskab og Dansk Center for Anvendt Matematik og Mekanik.

Deltagerlande

Ialt 68 lande er medlemmer af IMU. De fordeler sig således på kontinenterne: Afrika 5; Amerika 10; Asien 17; Australien og Stillehavet 2; Europa 34.

Medlemskontingent og stemmetal

Medlemslandene er opdelt i fem grupper, benævnt I - V. Et medlemslands gruppeplacering bestemmer, dels hvor mange stemmer landet har ved IMUs generalforsamling (og ved brevafstemninger), dels hvilket medlemskontingent landet betaler. Følgende tabel viser antallet af medlemslande i hver gruppe med tilhørende stemmetal og kontingent. Kontingentet er i statutterne angivet i "unit contributions". For tiden er 1 "unit" 1320 SFr, svarende til 6335 DKK.

Gruppe	Antal lande	Stemmer/land	Årlig kontingent
I	33 lande	1 stemme	1 unit = 6.335 DKK
II	15 lande	2 stemmer	2 units = 12.670 DKK
III	5 lande	3 stemmer	4 units = 25.340 DKK
IV	5 lande	4 stemmer	7 units = 44.345 DKK
V	10 lande	5 stemmer	10 units = 63.350 DKK

Som det kan ses, vokser kontingentet kraftigere med gruppeplaceringen end stemmetallet. Gruppeplaceringen kan ændres, hvis medlemslandet søger IMU derom og en afstemning (på en generalforsamling eller arrangeret pr. e-mail) viser flertal for ansøgningen. **Danmark er placeret i gruppe II, betaler således et årligt kontingent på 12.670 DKK, og har 2 stemmer ved generalforsamlingen og andre afstemninger.**

International Congress of Mathematicians (ICM)

Mange af IMUs vigtigste aktiviteter er knyttet til den internationale matematikerkongres, som afholdes hvert

fjerde år. Der er især grund til at pege på følgende:

- Uddeling af Fields medaljen.
Denne er kendt som "Matematikkens Nobelpris". Første uddeling var i Oslo i 1936. Siden da er der ved hver kongres uddelt 2 - 4 stk., dvs højst én pr. år.
- Uddeling af Rolf Nevanlinna prisen.
Denne pris blev oprettet i 1982 med speciel henblik på matematiske aspekter af informationsvidenskab. Der uddeles én pris ved hver kongres.

- Uddeling af Carl Friedrich Gauß prisen (første gang i 2006).
Denne nye pris vil blive tildelt som anerkendelse af fremragende matematisk forskning af fundamental betydning i et felt uden for matematikken.
- Udpegning af kongressens plenarforedragsholdere.
Ved hver kongres er der et meget begrænset antal plenarforedrag, typisk mindre end 20.
- Udpegning af fagområderne for kongressens specialektioner.
For hver kongres udpeges der et begrænset antal matematiske fagområder (op mod 20), inden for hvilke der afholdes specialiserede foredrag.
- Udpegning af foredragsholdere til specialektionerne.
I hver sektion inviteres der fra ca 5 til ca 15 foredragsholdere.

Beslutninger vedrørende ovennævnte træffes af udvalg nedsat af eksekutivkomitéen for IMU.

Andre aktiviteter

Blandt IMUs andre aktiviteter er der grund til at nævne det arbejde, der forgår i følgende kommissioner og udvalg.

- International Commission of Mathematical Instruction (ICMI).
Denne kommission nedsættes af IMU. Den virker bla ved hvert fjerde år at afholde ICME (= International Congress of Mathematical Education).
- Commission on Development and Exchanges (CDE).
Denne kommission yder støtte til udviklingslandenes deltagelse i internationalt samarbejde inden for matematik, herunder specielt til afholdelse af konferencer.
- International Commission on the History of Mathematics (ICHM).
IMU udpeger to medlemmer af denne kommissions eksekutivkomité.
- Committee on Electronic Information and Communication (CEIC).
Et udvalg, der har til opgave at rådgive matematikmiljøerne omkring den nødvendige navigation mellem traditionel papir-publikation og moderne elektronisk informationsbehandling.

Publikationer

IMU redegør for sine aktiviteter gennem de elektronisk tilgængelige IMU Bulletin og IMU-Net. Via kommissionen ICMI publiceres den tilsvarende ICMI Bulletin samt tidsskriftet L'Enseignement Mathématique.

Eksempler på dansk deltagelse i de seneste år

Ved den seneste International Congress of Mathematicians (afholdt 2002, i Beijing) var Professor Uffe Haagerup, SDU, blandt de ialt 20 plenarforedragsholdere. Professor Ib Madsen, AU, var formand for det panel der udvalgte foredragsholderne i sektionen for Topology. Professor Mogens Niss, RUC, og lektor Kirsti Andersen, AU, var medlemmer af panelerne for hhv Mathematics Education and Popularization og History of Mathematics. Der var to danske matematikere, som holdt sektionsforedrag, nemlig Professor Vagn L. Hansen, DTU, og Lars Hesselholdt, Ph.D., MIT.

Programmet for den næstkommende International Congress of Mathematicians (Madrid 2006) er endnu ikke offentliggjort, men i nationalkomitéen ved vi i hvert fald, at to af komitéens medlemmer, Ib Madsen og Mikael Rørdam, er blandt de inviterede foredragsholdere.

Professor Christian Berg, KU, er medlem af det udvalg under IMU, som skal nominere kandidater til valget af ny eksekutivkomité for IMU ved generalforsamlingen i 2006.

Den 10. International Congress of Mathematics Education afholdtes i Danmark i 2004.

Betydningen af Dansk medlemskab af IMU

Det er afgørende vigtigt, at Danmark fortsat kan være med, når der træffes afgørelser om de internationalt set mest prestigefulde anliggender for de matematiske fag.

Placeringen i gruppe II er i sammenligning med andre landes placering acceptabel, omend der set ud fra landets økonomiske forhold og dets indsats i den matematiske forskning kunne argumenteres for, at vi burde rykke op i en højere gruppe for derved økonomisk at bidrage mere til det internationale arbejde. Det kan i den forbindelse nævnes, at de andre nordiske lande er placeret således: Island i gruppe I; Finland og Norge i gruppe II (ligesom Danmark); Sverige i gruppe IV.

Ønsker om rejse- eller andre bevillinger

I Nationalkomitéen skønnes det, at det, bortset fra IMU medlemsgebyret, vil være muligt at dække udgifterne via de involverede personers deltagelse i rammebevillinger e.l.



Ski og matematik januar 2006

Torsdag 5 januar til søndag 8 januar 2006

Rondablikk Høyfjellshotell

Tilmeldingsfrist: 1. december

Nærmere oplysninger

<http://www.matematikkforeningen.no/ski2006/>



Axel Hunding
Kemisk Inst., KU.



Niels Wessel Larsen
Kemisk Inst., KU.

Matematik er på universitetsniveau et servicefag i mange sammenhænge, herunder også naturvidenskabelige uddannelser i kemi. Vi bringer her en beskrivelse af, hvordan MatIntro – et stort indledende matematikkursus på Københavns Universitet – er organiseret som en fælles studieenhed der er obligatorisk for studerende i bl.a. kemi og biokemi. Beskrivelsen er forfattet af to af underviserne fra Kemisk Institut.

Introduktion til matematik (MatIntro) ved Københavns Universitet

Fra efteråret 2004 har ny studerende ved KU's naturvidenskabelige fakultet oplevet en studieordning, der brød med den tidligere semesterstruktur. Kurserne gives nu i intensive blokke, enten

(A) af 7 ugers varighed med efterfølgende evaluering i de følgende 2 uger, eller

(B) af 9 ugers varighed med løbende evaluering.

Førsteårsstuderende på de matematiske linjer, Matematik, Statistik, Forsikringsvidenskab og Matematik-økonomi, de fysiske linjer Fysik, Astronomi, Biofysik, Geofysik og Meteorologi, Nanoteknologilinen, samt de kemiske fag Kemi og Miljøkemi og endelig Biokemi, har i 1. efterårsblok mødt faget MatIntro, med et omfang på ugentlig 3 forelæsninger, 20(1,5 + 1,5) timers regneøvelser og 1,5 time computerøvelser (Maple). Kurset retter sig således mod mange forskellige grupper af nyoptagne studerende, og er fagligt set i en vis forstand et kompromis mellem ønsker fra mange forskellige studieretninger. Faget har løbende evaluering (B-modellen) med 2 individuelle multiple choice prøver i midten og slutningen af blokken, samt 6 pointgivende afleveringsopgaver og 3 lynopgaver, der alle besvares af hold på 2-3 stud.

Erfaringerne med denne blokstruktur har vist, at få, men intensive kurser kan have den fordel, at studenterne holdes til, der opstår ingen læsesump med stof, der udskydes til jule- og påske-ferielæsning. Skal der peges på generelle problemer ved blokstrukturen kan vi nævne, at alle lærere har undervisning samtidig (af skemagrunder, modulsammenpasning) derfor er sygdom (vikar), kongresser eller anden mødeaktivitet et problem. Tilsvarende for studenterne: sygdom i en uge er ikke så let at absorbere som under semesterstrukturen.

Omfanget er mindre end det tidligere Mat A. De studerende, vi har undervist (fra de kemiske fag samt Biokemi) tilbydes senere et ekstra kursus MatFysK, Videregående matematik og introduktion til kvantemekanikken (obligatorisk for kemikere, valgfrit for biokemikere). Som en meget positiv nyskabelse bliver pensum rigt illustreret med Mapleøvelser.

Præsentationen af faget (forelæsningerne) gives ved lærere fra Matematisk Institut ('slotsaftapning'), mens de enkelte holds klasselærere er hentet fra aftagerfagene. Det har været et ønske, at denne konstruktion kunne føre til en række tonede opgaver, der illustrerer de omhandlede matematiske emners anvendelse i aftagerfaget. Det er i nogen grad muligt. Eksempler er emner som simple sædvanlige differentialligninger til beskrivelse af kemisk kinetik, og Taylorudvikling illustreret med sammenhængen mellem anharmonisk intramolekylært potential og harmonisk oscillator potential. En generel vanskelighed er naturligvis, at et (simpelt) MatIntro-begreb ikke vinder ved at blive forsøgt illustreret med (bio)kemisk stof, der ikke er kendt eller nemt at opfatte af 1. årsstuderende. Det er imidlertid vort indtryk, at studenterne oplever det som positivt med en lærer, der selv anvender matematik i sin (bio)kemiske forskning.

Omvendt er det betryggende, at faget er forankret hos matematikere, så man undgår, at begreberne udvandes. Som eksempel kan nævnes, at vore studenter i senere kurser i termodynamik ofte får brug for sammenhængen mellem de partielle afledede af en funktion $\Phi(x, y)$ og de tilhørende funktioner $x(\Phi, y)$ og $y(\Phi, x)$, hvor produktet

$$\frac{f_{\Phi} f_x f_y}{f_x f_y f_{\Phi}}$$

ikke er 1 (som man naivt kunne tro), men som bekendt – 1. Det anvendes som emne for en af de ovennævnte pointgivende afleveringsopgaver.



Løsninger

Summen på højre side har differensen i n

$$\sum_{k \text{ ulige}} \frac{\binom{n}{k}}{k} - \sum_{k \text{ ulige}} \frac{\binom{n-1}{k}}{k} =$$

Summer

Vis identiteten

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \binom{n}{k}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1, k \text{ ulige}}^n \frac{\binom{n}{k}}{k}$$

Opgaven er stillet af i 2004 af Gregory Galperin og Hillel Gauchman, Eastern Illinois University, Charleston, i Am. Math. Monthly, 111,8 som nr. 11103.

Morsomt, at de i det væsentlige har genopdaget et stykke norsk husflid, Tor B. Stavers formel,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} = (n+1) \cdot 2^{-n-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

som findes i Norsk Matematisk Tidsskrift, 29, (1947), p. 97–103, Om summasjon av potenser av binomialkoeffisientene.

Venstre side er

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \binom{n}{k}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} = \\ &= 2^{-n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \sum_{k \text{ ulige}} \binom{n}{k} + \sum_{k \text{ lige}} \binom{n}{k} &= \sum_k \binom{n}{k} = 2^n \\ \sum_{k \text{ lige}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ ulige}} \binom{n}{k} &= \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k = 0 \end{aligned}$$

får vi

$$\sum_{k \text{ ulige}} \frac{\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{k}$$

De tre andre opgaver er fra den internationale opympiade i Ungarn, 1982, og de to sidste er løst af Ebbe Thue Poulsen, den sidste tillige af Per Wennerberg Karlsson.

Diophantisk

Lad n være et naturligt tal. Vis, at hvis ligningen

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

har en heltallig løsning (x, y) , så har den mindst 3 sådanne løsninger.

Har vi en løsning, da er tillige $(-y, x - y)$ en løsning. Men så er også $(y - x, -x)$ en

løsning. Er to af disse ens, så er $n = 0$.

Sekskanten

$$f(9999) = 3333$$

Diagonalerne AC og CE i en regulær sekskant, $ABCDEF$ deles af indre punkter hhv.

Bestem $f(1982)$.

M og N således, at der gælder

$$f(1982) = 660.$$

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = \lambda$$

Da

Hvor stor er λ , hvis B , M og N ligger på ret linie?

$$f(m+n) \geq f(m) + f(n) \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

er f ikke aftagende og der gælder

$$\forall k \in \mathbb{N} : f(km) \geq kf(m) \quad (2)$$

Lad G betegne midtpunktet af AC , og antag, at B , M og N ligger på en ret linie.

og der gælder, at

Cevas sætning anvendt på denne linie og $\triangle GCE$ giver

$$\forall k < \ell : f(km) > kf(m) \Rightarrow f(\ell m) > \ell f(m). \quad (3)$$

$$\frac{|MG|}{|MC|} \cdot \frac{|NC|}{|NE|} \cdot \frac{|BE|}{|BG|} = 1$$

Heraf følger, med brug af (2), at

altså

$$\frac{\frac{1}{2} - \lambda}{1 - \lambda} \cdot \frac{-\lambda}{1 - \lambda} \cdot 4 = 1$$

$$\forall k < \ell : f(\ell m) = \ell f(m) \Rightarrow f(km) = kf(m). \quad (4)$$

hvoraf λ findes.

Af (2) fås $3333 = f(9999) \geq 3333f(3)$, altså $f(3) \leq 1$, dvs. $f(3) = 1$, og af (4) får vi derefter, idet $f(3333 \cdot 3) = 3333f(3)$, at

Interpolation

En funktion er defineret for alle naturlige tal og antager kun hele, ikke negative værdier. Der gælder for alle m og n :

$$\forall k \leq 3333 : f(k3) = kf(3). \quad (5)$$

$$f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}$$

$$f(2) = 0$$

$$f(3) > 0$$

Af (2) og (5) fås

$$\forall k \leq 3333 : 3f(k) \leq f(3k) = k, \quad (6)$$

som, da $f(k)$ er hel, medfører, at $f(k) \leq$

Nyt censorkorps i matematik

Ansøgningsfrist 15/1 2006.

Som bekendt er der et fælles censorkorps for matematik (inkl. matematikkens didaktik, matematisk statistik, matematik-økonomi og forsikringsmatematik) ved KVL og DPU samt universiteterne i København, Roskilde, Syd-danmark, Århus og Ålborg. Beskikkelsesperioden for det

nuværende korps udløber d. 31. marts 2006, og proces-sen med at finde et nyt korps er gået i gang.

I den anledning vil de nuværende censorer blive fore-spurg om deres interesse i at fortsætte. De censorer, der har tilkendegivet, at de accepterer kommunikation via e-mail vil blive spurgt ad den vej; de øvrige pr. brev.

Desuden vil de relevante matematikrelaterede insti-tutter snart modtage opfordringer til at indstille, hvilke

$\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$. Da f er ikke aftagende og $k \geq 3 \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$, har vi på den anden side $f(k) \geq f(3 \lfloor \frac{k}{3} \rfloor) = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$, og dermed

234532286,

$$\forall k \leq 3333 : f(k) = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \quad (7)$$

som specielt giver $f(1982) = 660$.

Det bemærkes, at forudsætningen $f(2) = 0$ er overflødig.

men desværre er dette resultat ukorrekt. Cifrene er de rigtige, men kun det afsluttende 6-tal er korrekt placeret.

Find de tre tal.

NYE OPGAVER

En sum

Vis formelen

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \frac{1}{ij} = \frac{1}{n^2}$$

Et kvadrat

Find alle hele tal som selvanden med sit kvadrat skrives med cifrene fra 1 til 9, hver brugt netop én gang.

Tre tal

Givet tre tal, der hver skrives med de tre forskellige cifre, a , b og c , i en rækkefølge, nemlig (abc) , (bca) og (cab) , hvor

$$(abc) = 100a + 10b + c.$$

Kubiktal mm.

Find alle naturlige tal med den egenskab, at tredie- og fjerdepotensen skrives tilsammen med brug af cifrene 0, 1, ..., 9, hvert ciffer brugt netop én gang.

Endnu et kvadrat

Find alle naturlige tal (> 1) med den egenskab, at kvadratet er lig med femtepotensen af tallets tværsom.

Diophantisk

Vis, at ligningen

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891$$

ikke har heltallige løsninger.

af de nuværende censorer, der ønskes genbeskikkert, og hvilke personer, der ønskes nybeskikkert.

Hvis du har interesse i korpsets sammensætning, kan du gøre dine synspunkter gældende enten gennem dit institut e.l. eller direkte til undertegnede. Specielt er det muligt at bringe sig selv i forslag. En blanket hertil findes på korpsets hjemmeside

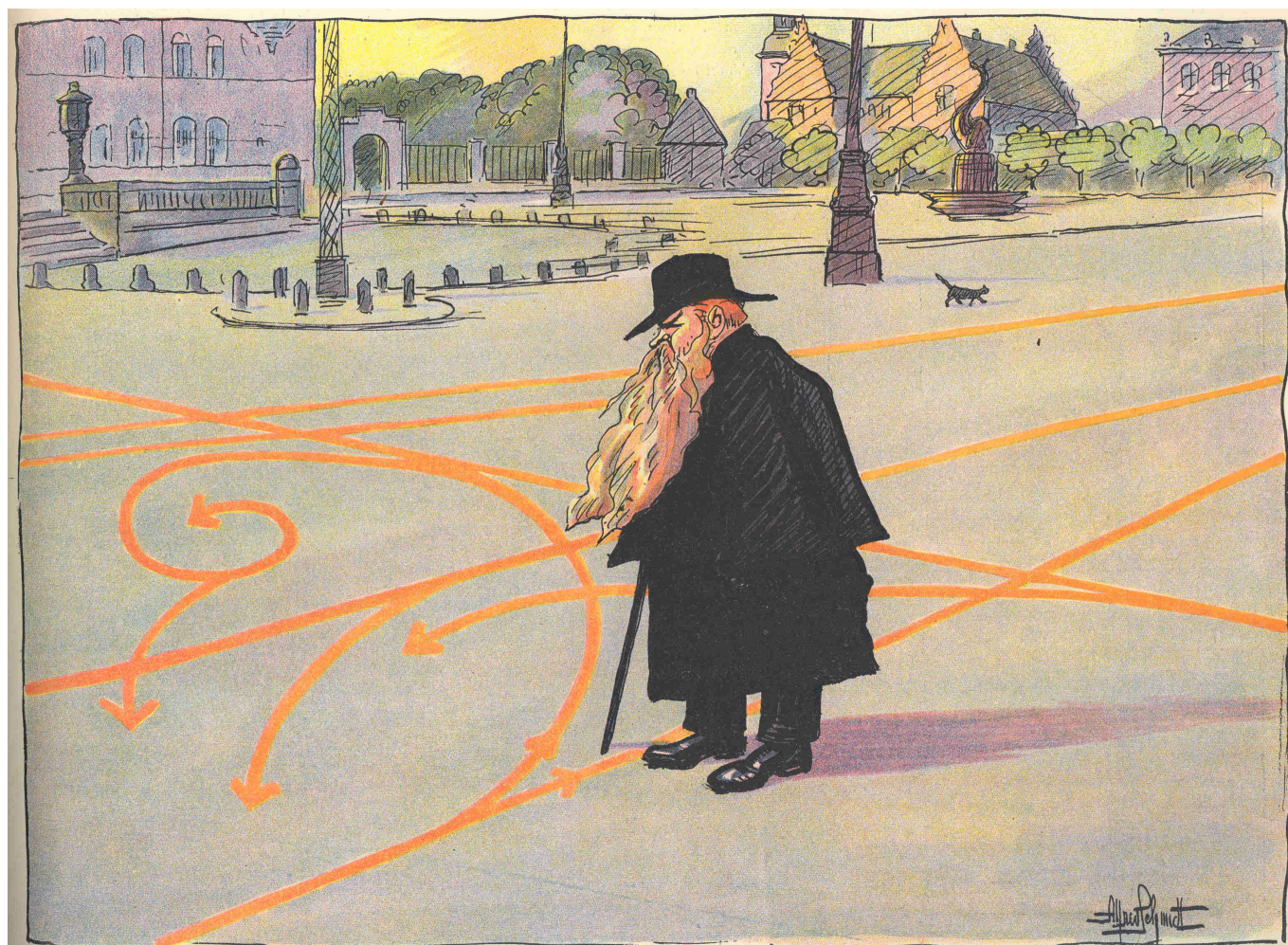
<http://www.imada.sdu.dk/~hjm/censorliste.html>

Sidste frist for forslag er den 15. januar 2006.

Odense, d. 10/10 2005

*Hans J. Munkholm,
formand for det afgående korps.*

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:
Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø



Figur 9: "Tidlig Morgen paa Raadhuspladsen: Professor Niels Nielsen: Hm! Skulde det mon være et Forsøg paa Løsningen af Cirkelns Kvadratur?" *Blæksprutten* 1923, side 43.

(Illustration til artiklen: *Matematik i det offentlige satiriske rum for hundrede år siden*)