

mat

M A T I L D E

Tema:

MATEMATIKHISTORIE



NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR.

15

MARTS

2003

Tinne Hoff Kjeldsen,
IMFUFA,
Roskilde Universitetscenter,
Postboks 260
4000 Roskilde
e-mail: thk@ruc.dk



Matematik og matematikhistorie: et gensidigt forhold?

Dette nummer af Matilde har historie som tema, men hvad har matematik og matematikhistorie med hinanden at gøre? Hvad er matematikhistorie egentlig for en størrelse, og hvorfor skal matematikeren overhovedet beskæftige sig med den? Svarene er langt fra entydige, og selv om spørgsmålene ikke kan besvares blot nogenlunde fyldestgørende på den plads, der er til rådighed her, vil jeg vove pelsen og forsøge at give nogle bud.

Matematikhistorie er ikke matematik, og matematikhistorisk forskning er ikke matematisk forskning. Matematikhistorie har matematik som sit genstandsområde og søger at forstå og kortlægge matematikkens historiske udvikling indholdsmæssigt, sociologisk og institutionelt. I dag er matematikhistorie et selvstændigt internationalt forskningsområde med egne tidsskrifter, foreninger, årligt tilbagevendende konferencer og møder, uddannelseskurser og lærebøger. Det udgør således et forskningsfelt inden for hvilket, man også kan meritere sig. I Danmark skrives der matematikhistoriske specialer og ph.d.-afhandlinger, og der forskes i matematikhistorie på flere af landets uddannelsesinstitutioner. Der findes dog ingen institutter direkte for matematikhistorie. Matematikhistorikere er som oftest ansat på videnskabshistoriske eller matematiske institutter, men de kan også findes på pædagogiske institutter eller på institutter for almen historie. Det illustrerer netop det særegne ved matematikhistorie (og videnskabshistorie i det hele taget), at det er en videnskabelig aktivitet med et ben i både den naturvidenskabelige og den humanistiske forskningsverden.

Matematikhistorikere har traditionelt haft matematikere som deres hovedpublikum, og mange steder er matematikhistorie opstået som resultat af matematikeres interesse for deres fags historie. I 1960'erne og 1970'erne etablerede matematikhistorie sig som et selvstændigt forskningsområde, men selv om matematikhistorikere i deres fagtidsskrifter og ved deres internationale møder hovedsageligt henvender sig til andre matematikhistorikere lever de to fag i Danmark i en slags symbiotisk forhold, der især kommer til udtryk i matematikuddannelserne, hvor matematikhistorie indgår fra det gymnasiale niveau, og ved at matematikhistorikere visse steder er ansat på matematiske institutter.

Selv om matematikhistorie i teorien sagtens kunne eksistere uden nutidens matematiske forskning, er det svært at forestille sig i praksis. Det omvendte virker derimod ikke så urealistisk, så man kan måske med rette spørge, hvilken betydning matematikhistorie kan have for matematik. Her er der flere forhold, man kan pege på. For det første kan den være med til at gøre matematikken levende i al almindelighed og i matematikuddannel-

serne på alle niveauer i særdeleshed, idet den kan være med til at synliggøre matematikkens natur, og gøre skoleelever og studerende m.fl. bevidste om, at matematikken er en menneskelig aktivitet i stadig udvikling, og altså ikke noget statisk "der faldt ned fra himlen" en gang. Den er en form for viden, der skabes dagligt af rigtige mennesker af kød og blod, somme tider alene, men oftest i dialog med andre mennesker. Historien kan også bidrage til erkendelse af, at matematik er indlejret i en offentlighed, som både støtter og fortolker matematiske aktiviteter, og at det har indflydelse på den historiske udvikling af faget, hvilket samtidig demonstrerer, at matematikken ikke lever i et vakuum upåvirket af og upåvirkelig over for den øvrige verden.

For det andet kan matematikhistorie spille en vigtig rolle i matematikuddannelserne. Den kan synliggøre dynamikken i matematisk forskning. Det er ofte svært at illustrere for studerende, før de når langt op i deres studium, som oftest først på specialniveau, og tit lykkes det ikke engang der, fordi matematisk forskning i dag er så specialiseret, at man efter endt studium måske ikke engang har erhvervet sig den viden, som frontforskningen i ens specialeområde hviler på. Men i matematikhistorien kan man følge datidens frontforskning inden for områder, som i dag hører til 1. dels stof på uddannelserne, og derigennem få en oplevelse af og en fornemmelse for den matematiske forskningsproces. Matematikhistorie kan også vise matematikunderviseren, hvor der ligger vanskeligheder i matematikken og kan i nogle tilfælde antyde bedre (ind)læringsmåder. I nogle tilfælde kan historisk stof endog hjælpe eleven og den studerende til bedre at forstå matematiske begreber og sammenhænge.

For det tredje har matematikhistorie en oplagt funktion som et dannelseselement, der kan være med til at fremme matematikstuderendes og -elevers matematiske modenhed og matematikkulturelle bevidsthed.

Endelig er matematikere rent faktisk interesserede i matematikkens historie. De fleste er interesseret i at kende den historiske proces, som de selv er en del af, og ikke så få dyrker historien som fritidsbeskæftigelse og nogle også mere professionelt.

Matematikhistorie kan bedrives ud fra forskellige vinkler og med forskelligt indhold. Det er historien om matematikkens sociale og institutionelle forhold, historien om matematikkens indhold, matematiske ideer, begreber og teories opståen og udvikling, og det er historien om matematiske personligheder. Artiklerne i dette temanummer belyser de fleste af disse synsvinkler samt aspekter af matematikuddannelsernes historie og matematikhistoriens rolle heri.

**Matilde – Nyhedsbrev for
Dansk Matematiske Forening
medlem af
European Mathematical Society**

Nummer 15 – februar 2003

Redaktion:

**Martin Raussen, AAU
(ansvarshavende)**

**Tinne Hoff Kjeldsen, RUC
(TEMAREDAKTØR)**

**Tage Bai Andersen, AU
Carsten Lunde Petersen, RUC
Jørn Børling Olsson, KU
Poul Hjorth, DTU
Mikael Rørdam, SDU
Carl Winsløw, DPU**

Adresse:

**Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø**

Fax: 3532 0704

e-post:

matilde@mathematics.dk

URL:

www.matilde.mathematics.dk

ISSN: 1399-5901

Tryk & lay-out: DPU-repro

**Matilde udkommer 4 gange
om året**

**Indlæg til næste nummer
skal være redaktionen i hænde
senest 28. maj 2003.**

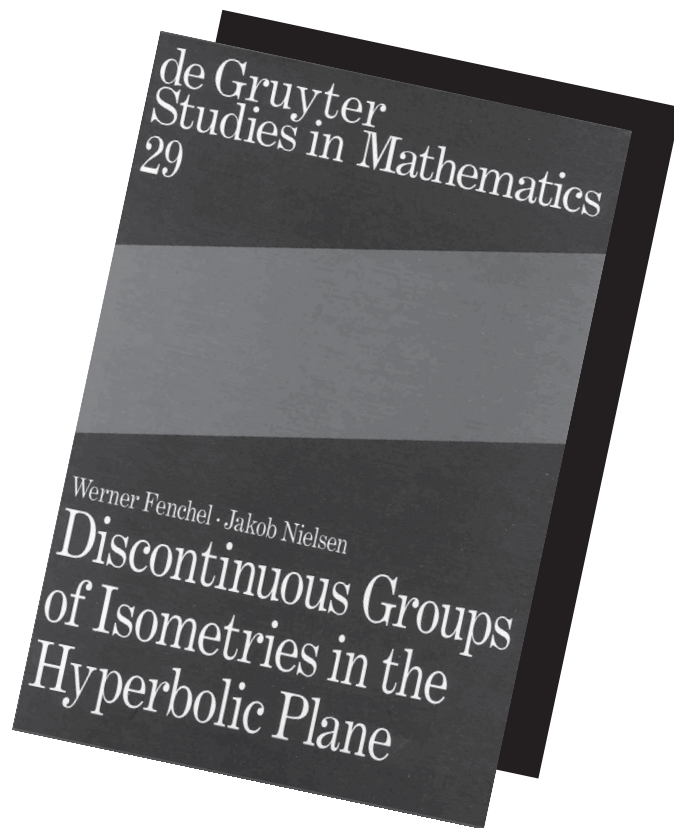
Indhold:

Leder 2

TEMA:

Matematikhistorie

Forsideillustration: Arkimedes' død (Städelsches Kunstinstitut, Frankfurt).
Er den berømte mosaik fra oldtiden eller renæssancen? Som i matematikkens historie
kan man få forskellige svar afhængigt af hvem man spørger.



Af: Asmus L. Schmidt,
Institut for Matematiske Fag,
Københavns Universitet
e-mail: aschmidt@math.ku.dk

Om udgivelsen af Fenchel-Nielsen manuskriptet

Tilblivelsen af den netop udkomne bog [7] af Jakob Nielsen (1890-1959) og Werner Fenchel (1905-1988) har en lang og kompliceret historie, som jeg skal beskrive i det følgende.

Jakob Nielsen blev født på Als og på et tidspunkt, hvor Sønderjylland hørte til Tyskland. Hans uddannelse som matematiker foregik ved Kiels universitet, og han blev i 1920 udnævnt til professor ved den tekniske højskole i Breslau. Efter genforeningen i 1920 optrådte han for Danmark, med Børge Jessens ord [10]: "Jakob Nielsen var kommet til os som en gave fra genforeningen".

Nielsen blev i 1925 professor i Rationel Mekanik ved Polyteknisk Læreanstalt i København. Hans banebrydende arbejder om de lukkede orienterbare fladers topologi (Acta Mathematica: 1927, 1929, 1932; se [12]) gjorde ham internationalt berømt. Og den omstændighed, at fundamentalgruppen for en lukket orienterbar flade af genus >1 er repræsenteret ved visse

diskontinuerte grupper af flytninger i den hyperbolske plan, bevirkede, at han også måtte beskæftige sig med at udvikle den generelle teori for sådanne diskontinuerte grupper.

I 1938-39 afholdt Nielsen en forelæsningsrække på Københavns Universitet om diskontinuerte grupper af flytninger i den hyperbolske plan. Blandt andet viste han følgende diskontinuitetssætning: En ikke abelsk flytningsgruppe bestående af orienteringsbevarende afbildninger, som udover identiteten kun indeholder translationer, er diskontinueret (dvs. ingen af banerne for gruppens virkninger fortættede sig i den hyperbolske plan). Som en opfølgning af disse forelæsninger skrev Nielsen under den tyske besættelse de to første kapitler af en monografi om emnet (på tysk), og dermed var grunden til bogen [7] lagt. Nielsens initiativer på dette område gav også inspiration til fremkomsten af Svend Lauritzens disputats [11] i 1942.

Werner Fenchel kom også til Danmark som en gave, men på en mere dystre baggrund. Han var født i Berlin og uddannet ved universitetet der,

hvorefter han fik en stilling ved universitetet i Göttingen som assistent for den navnkundige Edmund Landau. Her mødte han i 1929 de danske matematikere Harald Bohr, Jakob Nielsen, Tommy Bonnesen og Børge Jessen, som alle fik stor betydning for hans senere tilværelse. Han besøgte i 1931 for første gang Danmark og specielt Københavns Universitet. Et foredrag: "Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze" i DMF i efteråret 1931 bekræfter dette. I Tyskland forringedes forholdene så meget, at Fenchel i 1933 efter invitation af Harald Bohr besluttede at flytte til København. Her udgav han i 1934 (sammen med Bonnesen): "Theorie der konvexen Körper" og udarbejdede senere en tysk oversættelse af Jakob Nielsen: "Rationel Mechanik". Hans betydningsfulde arbejder om blandede volumener (Fenchel-Alexandrovs ulighed) er også fra denne tid. Derudover publiceredes en række arbejder i samarbejde med Harald Bohr og navnlig med Børge Jessen.

I 1943 måtte Fenchel med sin familie flygte videre til Sverige, men





Werner Fenchel
(kilde: Videnskabernes Selskab)



Jacob Nielsen
(kilde: Videnskabernes Selskab)

efter sin hjemkomst i 1945 blev han af Nielsen involveret i udarbejdelsen af monografien. Da Nielsen i perioden 1945-58 var stærkt optaget af internationalt arbejde for UNESCO, blev det overladt til Fenchel at være pennefører for det videre arbejde. Og i 1948 forelå den første samlede version af Fenchel-Nielsen manuskriptet (på engelsk), som forfatterne planlagde at udgive i Princeton Mathematical Series. Denne udgivelse blev imidlertid ikke til noget, da udviklingen inden for emnet var forløbet så hurtigt, at de to forfattere fandt, at der burde foretages væsentlige justeringer før en udgivelse. I øvrigt flyttede Nielsen i 1951 til et professorat ved Københavns Universitet, men han frasagde sig sin stilling allerede i 1955. I perioden 1956-1974 var Fenchel professor ved Københavns Universitet.

Efter Nielsens død i 1959 var Fenchel alene om udgivelsen af manuskriptet, men travlhed på andre fronter gav ham ikke megen tid hertil. I begyndelsen af 1960-erne gennemførtes en omfattende reform af matematikundervisningen ved Københavns Universitet, og Fenchel var primus motor ved noteskrivning inden for algebra og geometri. I sin forskning koncentrerede han sig om konveksitet,

og han organiserede "International Colloquium on Convexity" i København i 1965. I perioden 1953-1972 var han en meget samvittighedsfuld redaktør for det nystartede tidsskrift "Mathematica Scandinavica".

Hans mangeårige virke som sekretær for Dansk Matematisk Forening og formand (1958-1962) bidrog til, at han ved foreningens 100 års jubilæum i 1973 blev udnævnt til æresmedlem. I perioder havde han også bistand med manuskriptet fra yngre medarbejdere ved Matematisk Institut, Nils Andersen, Troels Jørgensen og undertegnede. Dette bidrog givetvis til at afluse manuskriptet for fejl og uklarheder, men bragte ikke en udgivelse nærmere.

Efter sin fratræden fra universitetet fik Fenchel tid til at færdiggøre en anden bog om hyperbolsk geometri [5]. Ved fremstillingen havde han stor hjælp af Christian Siebeneicher, Bielefeld, og fru Obershelp, som renskrev manuskriptet. Fenchel døde imidlertid kort før manuskriptet blev formelt accepteret, men heldigvis var Siebeneicher i stand til at bistå ved udgivelsen. Heinz Bauer, der var en god ven af danske matematikere, siger i sin editorial: "Werner Fenchel was born in Berlin in 1905. In Berlin he studied

mathematics and physics during the years 1923-1928. He had to leave Germany in 1933, a few months after Hitler's take-over. The publisher and editors are happy that - more than half a century later - Werner Fenchel's last mathematical work will appear in his hometown Berlin".

Med de samme to medarbejdere fra Bielefeld havde Fenchel også nået at få fremstillet en renskrevet udgave af det gennem mange år reviderede og korrigerede Fenchel-Nielsen manuskript, skrevet på en kuglehoved skrivemaskine med matematiske tegn. Dette renskrevne manuskript indeholder de første 26 paragraffer af Fenchel-Nielsens manuskriptets 27 paragraffer. Den sidste med titlen: "The fundamental group" er udeladt.

Fenchel nåede også at medvirke ved udgivelsen af Nielsens samlede artikler [12]. Specielt bidrog han med artiklen [4], der i meget høj grad indeholder hans kommentarer til den udvikling, der er sket efter fremkomsten af Fenchel-Nielsen manuskriptet, som i et begrænset antal kopier har cirkuleret blandt fagfæller. Således kan man om diskontinuitetssætningen læse, at den findes i et antal versioner, hvoraf den stærkeste tilhører Troels Jørgensen. Den version, der fin-

des i bogen [7] er iøvrigt identisk med den, der findes i det første manuskript (på tysk) omtalt ovenfor.

Efter Fenchels død diskuterede Jørn Børling Olsson (elev af Käthe Fenchel) og jeg, hvad der skulle ske med Fenchel-Nielsen manuskriptet. Med accept fra arvingerne til de to forfattere, repræsenteret ved Tom Fenchel og Søren Asmussen (barnebarn af Jakob Nielsen), besluttede vi i 1990 for at komme en udgivelse nærmere at lade det nyligt renskrevne manuskript skrive i AMS TeX. Dette blev dygtigt udført af sekretærerne Dita Andersen og Lise Fuldbj-Olsen ved vort institut.

På grund af mit nøje kendskab til manuskriptet accepterede jeg at være editor for udgivelsen. Dog lykkedes det at få en aftale med Siebeneicher om, at han som medarbejder ville levere de over 100 figurer i færdig elektronisk form, hvorved mit arbejde ville blive mere overkommeligt. Efter sammen med Jørn at have gennemført en grundig korrekturlæsning af TeX-manuskriptet, indføjede vi efter vanlig TeX-stil starten og afslutningen af beviser. Endvidere har jeg på mangfoldige måder testet manuskriptet for en konsistent brug af terminologi. Det kan ikke overraske, at et manuskript med en 50-årig tilblivelseshistorie vil udvise et skred i terminologi, og det viste sig da også at være tilfældet.

Det således sanerede TeX-manuskript indsendte jeg i 1992 til forlaget Walter de Gruyter, som til min store glæde og lettelse straks var imødekommende over for en udgivelse i serien *Studies in Mathematics*, hvor også Fenchels tidligere bog [5] var udkommet. Desværre viste det sig, at produktionen af de mange figurer skulle blive et stort problem og en forsinkende omstændighed, idet det i 1997 blev klart, at Siebeneicher ikke ville kunne finde tid til at levere disse. Heldigvis kunne forlaget foreslå en løsning bestående i, at jeg skulle levere præcise blyantsskitser af alle figurerne, hvorefter forlaget ville organisere selve den elektroniske produktion af disse. For kapitlerne I-III havde sådanne præcise skitser længe foreligget fra Fenchels hånd, men for kapitel IV-V måtte de produceres på grundlag af beskrivelser i Fenchel-Nielsen manuskriptet og de af Nielsens håndtegnede figurer i margin af dette manuskript. Det var en stor

hjælp, at jeg efter åbningen af Fenchel-arkivet [6] kunne benytte originalmanuskriptet, idet figurerne heri fremtræder meget tydeligere end i kopier af dette. Originaliteten af dette manuskript fremgår bl.a. af, at det i betydeligt omfang er skrevet (på maskine med symboler indføjet i håndskrift) på bagsiden af Nielsens uforbrugte brevpapir. I lys af, at Fenchels eksemplar af det originale manuskript blev stjålet fra en parkeret bil (se [8]), må originalmanuskriptet i arkivet derfor oprindeligt have været Nielsens. Dette er så på et tidspunkt overtaget af Fenchel. Denne antagelse bekræftes yderligere af, at manuskriptet indeholder (af Nielsen) håndskrevne spørgsmål til Fenchel.

I løbet af 2001 kunne jeg aflevere filerne til det samlede manuskript og præcise blyantstegninger af samtlige figurer til forlaget. Produktionen af figurerne i elektronisk form blev udført af Marcin Adamski (Warszawa), som selv er matematiker. Selve TeX-manuskriptet blev af forlaget konverteret til LATEX før den endelige produktion. Den afsluttende korrekturlæsning, som skulle tage højde for alle tænkelige fejl, blev meget mere omfattende, end jeg havde forestillet mig, idet der viste sig en række uoverensstemmelser med originalmanuskriptet, som i næsten alle tilfælde var til fordel for sidstnævnte. Forklaringen er, at Fenchel tydeligvis ikke havde nået at udføre en grundig korrektur af det i Bielefeld maskinskrevne manuskript i relation til originalmanuskriptet.

Endvidere skal jeg nævne, at Bent Fuglede har skrevet en kort biografi af de to forfattere, hvis fotografier (udlånt af Videnskabernes Selskab) også er inkluderet. Endelig har jeg udarbejdet en liste over "Symboler og definitioner" og en relativt kort litteraturliste, der især indeholder relevante monografier. Fenchel har markeret "Litteratur" som et punkt i indholdsfortegnelsen, men han har ikke efterladt sig noget forslag hertil.

Bogen udkom umiddelbart før jul 2002, og den fremtræder i enhver henseende utrolig flot. Mange medarbejdere hos forlaget Walter de Gruyter, og især Dr. Manfred Karbe, som har været leder af projektet siden 1992, har gjort en bemærkelsesværdig indsats for at opnå dette resultat.

Litteratur:

- [1] B. Fuglede: Werner Fenchel (3.5.1905-24.1.1988), Videnskabernes Selskabs Årbog (Oversigten) (1989), 163-171.
- [2] H. Bohr: Et Tilbageblik, Matematisk Tidsskrift A (1947), 1-27.
- [3] W. Fenchel: Jakob Nielsen in memoriam, *Acta Mathematica* 103 (1960) VII-XIX.
- [4] W. Fenchel: Nielsen's Contributions to the Theory of Discontinuous Groups of Isometries of the Hyperbolic Plane. In: J. Nielsen: *Collected Mathematical Papers* 2 (1986), 427-440.
- [5] W. Fenchel: *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*, De Gruyter Studies in Mathematics 11, Walter de Gruyter (1989).
- [6] W. Fenchel: Efterladte papirer, Arkiv ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet. Hjemmeside: <http://www.math.ku.dk/arkivet/fenchel/wfepap.htm>
- [7] W. Fenchel, J. Nielsen: *Discontinuous Groups of Isometries in the Hyperbolic Plane*, Editor: A. L. Schmidt, De Gruyter Studies in Mathematics 29, Walter de Gruyter (2003).
- [8] V. Lundsgaard Hansen: Om Jakob Nielsen (1890-1959), *Normat* 2 (1992), 63-74.
- [9] V. Lundsgaard Hansen: Jakob Nielsen (1890-1959), *The Mathematical Intelligencer* 15, No 4 (1993), 44-53.
- [10] B. Jessen: Fra mine læreår, Københavns Universitets Matematiske Institut (1977).
- [11] S. Lauritzen: En Indledning til en gruppeteoretisk Behandling af de ikke orienterbare Flader, Jul. Gjellerup, København (1942).
- [12] J. Nielsen: *Collected Mathematical Papers* 1-2, Editor: V. Lundsgaard Hansen, Birkhäuser, Boston - Basel - Stuttgart (1986).
- [13] F. Damhus Pedersen: *Dansk Matematisk Forening 1923-1973*, København (1973).



Thieles talmønstre

– gulvfliser og komplekse heltal

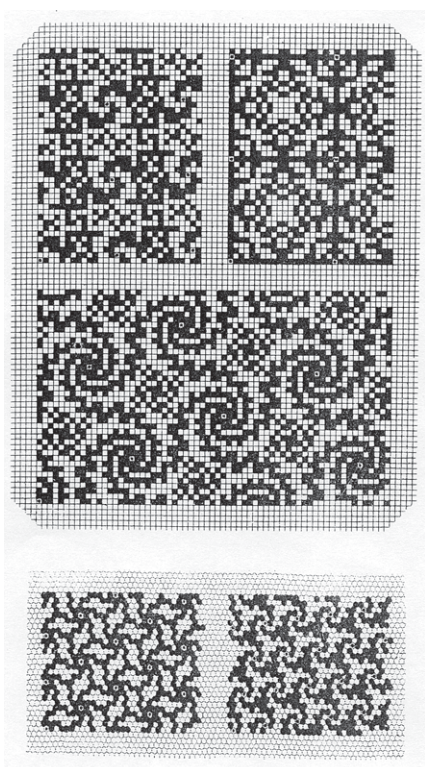
Hvorfor denne artikel?

For nylig lykkedes det mig at færdiggøre en bog om danskeren T. N. Thiele (1838-1910) og hans pionerindsats indenfor statistikkens teori og metode (Lauritzen 2002).

Mens jeg lagde sidste hånd på værket, stødte jeg på et referat af et foredrag, som Thiele havde holdt ved de Skandinaviske Naturforskeres Møde i København i 1873 (Thiele 1874). Her beskrev Thiele, hvordan egenskaber ved komplekse heltal kunne repræsenteres som smukke mønstre, og han fremførte så den påstand,

"...at der endog gives en Kunstart, i hvilken Mathematikken selv, uden at iklædes en lunefuld Fantasis udfyldende og tilslørende Dragt, kan frembringe fuldt færdige Billeder, der neppe ville blive betegnede som stive og kedelige."

Ved foredraget havde Thiele omdelt billeder af de komplekse primtal og andre mønstre, som vil blive nærmere omtalt senere i denne artikel.



Af: Steffen L. Lauritzen
Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet,
email: steffen@math.auc.dk

Otto Larsen, en århusiansk gymnasielærer som i sin tid havde haft Thiele som lærer på Universitetet, skrev i sine "Universitetsminder" fra 1954, at Thiele havde fået lavet en kakkelovnsskærm til sit hjem efter et sådant talmønster, og at flisemønstret i et af gulvene i Hafnias hus på Gammelholm også blev konstrueret på denne måde.

Min nysgerrighed var vakt! Kakkelovnsskærmen kunne nok ikke opdrives længere, men gulvet måtte jeg absolut se, hvis det stadig fandtes. En henvendelse til Jan Parner, Codan A/S, resulterede i et besøg i Hafnias tidligere hovedsæde (nu overtaget af Codan), og det stod omgående klart, at gulvet i forhallen i hvert fald ikke var helt almindeligt. På den anden side var det heller ikke direkte magen til nogle af de mønstre, som var aftrykt i Thieles foredrag, så der var et mysterium, som krævede sin løsning. På bagsiden af dette nummer af Matilde ses et fotografi af gulvet.

Hvem var Thiele?

Thorvald Nicolai Thiele blev født i København den 24. december 1838 og døde den 26. september 1910 i en alder af 71 år. Thiele blev kendt som astronom, aktuar, matematiker og statistiker. Han var professor i astronomi ved Københavns Universitet fra 1875 til 1907 og samtidig direktør for Universitetets Astronomiske Observatorium.

Thiele var initiativtager og medstifter både af Dansk Matematisk Forening, som blev stiftet i 1873, og af

Dansk Aktuarforening, som blev stiftet i 1901. Han var også medstifter af Danmarks første private livsforsikringsselskab Hafnia (stiftet 1872) og beklædte stillingen som matematisk direktør der indtil 1901. Han var desuden formand for Hafnias bestyrelse fra 1903 og indtil sin død i 1910. Ved Thieles 70 års fødselsdag fik Dansk Aktuarforening slået en guldmedalje til hans ære. Denne medalje findes i dag i London på museet hos Institute of Actuaries.

Thiele og tallene

Thiele havde en svær bygningsfejl på begge øjne og blev til sidst næsten helt blind, så det var meget pinefuldt



Thorvald Nicolai Thiele

for ham at virke som observerende astronom. Måske var det derfor, at han slog sig på den mere teoretiske side af astronomien, "Iagttagelseslæren", eller den teoretiske statistik, som vi ville sige i dag. Thieles bidrag til statistikkens teori og metode er usædvanligt originale og dybtgående, og han må regnes blandt fagets største pionerer, selvom flere af hans vigtigste bidrag var så langt forud for deres tid, at de gik i glemmebogen og måtte genopdages af andre på et senere tidspunkt. Hans hovedværk er utvivlsomt hans avancerede lærebog i statistik (Thiele 1889) selv om hans artikel om analyse af observationer indsamlet over et tidsforløb (Thiele 1880) om muligt er endnu mere original.

I sit virke som aktuar var Thiele også banebrydende såvel på det teoretiske som på det praktiske område, mens det er uklart for mig, hvorledes hans rent matematiske arbejder skal vurderes, og det samme gælder hans indsats indenfor astronomi. Han har skrevet en talteoretisk afhandling (Thiele 1886) hvis indhold jeg ikke kan bedømme, og der er vist noget, der hedder "Thiele oscillationer" i teorien for kædebrøker, som var et af Thieles yndlingsemner.

Men der er ingen tvivl om, at hans virtuositet og genialitet først og fremmest kom til udtryk i forbindelse med alt, hvad der havde med tal og beregninger at gøre. J. P. Gram skriver i sin nekrolog over Thiele fra 1910, at Thiele var den første dansker som anskaffede og brugte en regnemaskine. Thiele forsøgte ihærdigt (men uden held) at få oprettet et professorat i "regnende matematik", eller "scientific computing", som vi nok ville kalde det i dag. I samarbejde med H. G. Zeuthen og H. Valentiner medvirkede Thiele til, at Caspar Wessels afhandling om de komplekse tal blev oversat til fransk. Thiele bemærkede, at kvadrattallene 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 delte menneskelivet i naturlige perioder. Blandt hans mere usædvanlige synspunkter kunne man finde, at alle først burde lære at regne i 4-talsystemet, hvor man så senere kunne gå videre til base 16 og endelig til base 64 for de virkelig viderekomne. Han udarbejdede faktisk tabeller over logaritmer med grundtal 4 til brug for Hafnias beregninger. Af mange samtidige blev Thiele tydeligvis opfattet som lidt af en talmy-

stiker, omend jeg ikke selv har læst noget af ham, der peger i den retning.

Komplekse heltalsringe og kvadratiske rester

Thieles mønstre er alle baserede på komplekse heltalsringe. De fleste mønstre er lavet over ringen af gaussiske^x heltal $\mathbf{Z}[i]$ d.v.s. tallene af form $a+bi$, hvor a og b er reelle heltal. Andre mønstre er lavet over ringen af eisensteinske heltal $\mathbf{Z}[\omega]$, d.v.s. tallene af form $a + b\omega$, hvor a og b er reelle heltal og $\omega = (1 - i\sqrt{3})/2$.

For at lave mønstre med de gaussiske heltal opdeles planen i små kvadrater med sidelængde 1, så tallet $a+bi$ svarer til et kvadrat med centrum (a, b) og sider parallelle med koordinataksene, alt med hensyn til et sædvanligt, rektangulært koordinatsystem. Mønstrene opstår ved at give hvert felt en bestemt farve, alt efter om det tilsvarende tal besidder en given egenskab. For eksempel lavede Thiele på denne måde et billede af de gaussiske primtal, altså tal $z \in \mathbf{Z}[i]$ som kun kan skrives som et produkt $z=xy$ af andre gaussiske heltal når en af faktorerne er en enhed $(\pm 1, \pm i)$ i $\mathbf{Z}[i]$. Det kan vises, at et naturligt primtal, er et gaussisk primtal hvis og kun hvis $p \equiv 3 \pmod{4}$. For eksempel er $5=(2+i)(2-i)$ ikke et gaussisk primtal, mens 7 er.

For at lave mønstre med de eisensteinske heltal skal planen i stedet opdeles i regulære sekskanter og de to nederste af de mønstre, som er afbildet i referatet af Thieles foredrag, er lavet på denne måde.

De afbildede mønstre er alle baseret på såkaldte kvadratiske rester. Et tal siges at være *kvadratisk rest modulo c*, hvis der findes et tal

x så $x^2 \equiv d \pmod{c}$. Man kan fortolke dette med hensyn til forskellige heltalsringe. Tilfældet med reelle heltal er klassisk og er beskrevet i næsten enhver lærebog om talteori. Det blev blandt andet studeret i detaljer af Gauss, men mange andre matematikere har haft fingre både i det reelle og i det mere generelle til-

fælde. Legendresymbolet $\left(\frac{d}{c}\right)$ defineres til at være 0, hvis c går op i d , det har værdien 1, hvis d er kvadratisk rest modulo c og -1, hvis det ikke er tilfældet. Programmet MAPLE har en funktion, *quadres*, som beregner dette symbol i tilfældet med reelle heltal. Hvis c er et ulige primtal som ikke er divisord i d gælder $\left(\frac{d}{c}\right) \equiv d^{(c-1)/2} \pmod{c}$. For ulige primtal d og e gælder endvidere Gauss' *reciprocitetslov*, også kendt som "talteoriens juvel":

$$\left(\frac{d}{e}\right)\left(\frac{e}{d}\right) = (-1)^{(d-1)(e-1)/4}.$$

Kvadratisk reciprocitet for Gaussiske heltal blev først studeret af Dirichlet omkring 1835.

Thieles mønstre med grundtal c opstår ved at man farver feltet svarende til tallet d , hvis og kun hvis

$$\left(\frac{d}{c}\right) = 1. \text{ Hvis } c \text{ går op i } d \text{ gives fel-$$

tet en afvigende farve. Thieles fem billeder svarer på denne måde (regnet ovenfra og fra venstre mod højre) til grundtallene

$14+i, 19, 17+8i, 5+4\omega$ og $6+\omega$, hvor de to sidste er eisensteinske heltal, mens de andre er gaussiske heltal. Det skal bemærkes at grundtallene for alle disse mønstre er primtal. Mønstre baseret på sammensatte tal har generelt færre farvede felter. Det skyldes, at hvis $c=ab$ gælder trivielt $x^2 \equiv d \pmod{ab} \Rightarrow x^2 \equiv d \pmod{a} \wedge x^2 \equiv d \pmod{b}$,

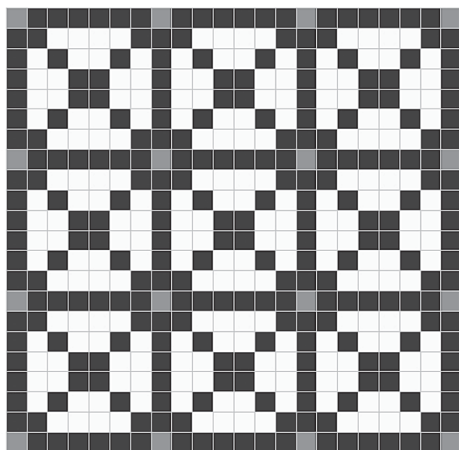
og det omvendte er tilfældet, hvis a og b er indbyrdes primiske. Så mønstre for sammensatte tal dannes som fællesmængder af primtalsfaktorernes mønstre.

Min kollega Søren Buhl har skrevet et program i det statistiske programmeringssprog R, som hurtigt beregner sådanne billeder, se eksempler nedenfor. Programmet kan hentes på adressen <http://www.math.auc.dk/~slb/kurser/basmat-02/software/tile.R> og statistikpakken R kan hentes på <http://www.R-project.org/>, hvis nogen skulle have lyst til at prøve selv.

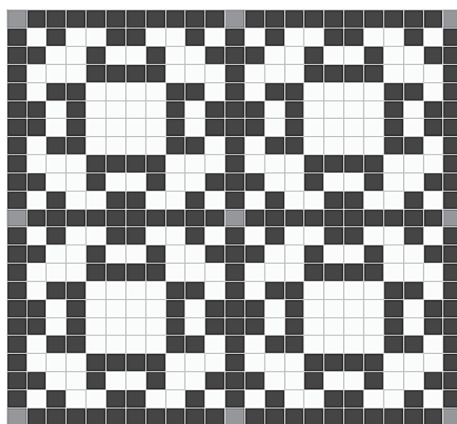
Ved hjælp af dette kan man more sig med at tegne mange flotte billeder, se eksemplerne nedenfor. Man



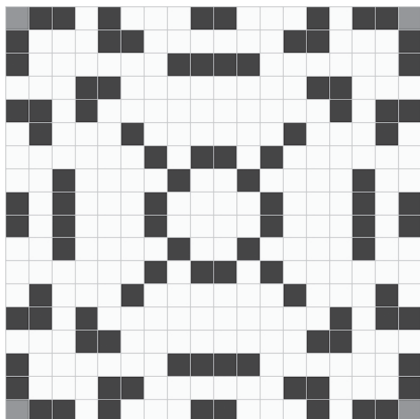
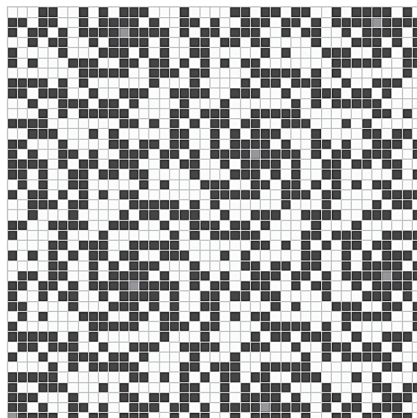
Kvadratiske rester modulo 7



Kvadratiske rester modulo 11



Kvadratiske rester modulo 17

Kvadratiske rester modulo $12 + 13i$ 

kan ikke undgå at bemærke, at billederne har en række iøjnefaldende symmetri- og andre egenskaber, afhængig af hvilket grundtal, der bruges til konstruktionen. Sommetider er hele diagonalen farvet, sommetider er hele den reelle og den imaginære akse farvet. Hvis grundtallet er ikke reelt eller rent imaginært, optræder spirallignende strukturer, o.s.v. Det overlades med stor fornøjelse til læseren at undersøge teoretisk, hvornår disse fænomener optræder og hvorfor.

Er Thieles mønstre originale?

På nuværende tidspunkt kender jeg ikke svaret. Thiele angiver ingen kilde i sit foredrag, men det var ikke usædvanligt for ham at undlade dette. Af snørklede veje er jeg stødt på et referat af et foredrag, som nordmanden O.-J. Broch holdt i 1874 i l'Association Française pour l'avancement des sciences om Thieles mønstre. Her fremstilles det, som om Thieles påfund er originalt og Broch angiver en række eksempler på mønstrene.

Men jeg er også stødt på en henvisning til en bog (Lucas 1867) af den samtidige franske matematiker Edouard Lucas (1842-1891), hvor titlen kunne antyde, at denne havde lignende ideer. Om Thiele har kendt til Lucas' arbejde eller ej, står under alle omstændigheder hen i det uvisse. Desværre er det i skrivende stund ikke lykkedes mig at komme i nærheden af et eksemplar af Lucas' bog, så jeg har ikke kunnet undersøge, hvad den mere præcist indeholder.

Hvad forestiller gulvet i Hafnia?

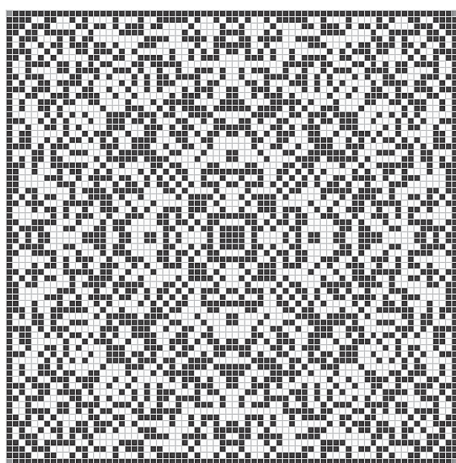
Selvom man nu har et billede af gulvet i Hafnias bygning foran sig, er der et stykke vej til at afgøre, hvordan det er konstrueret, og om det overhovedet er konstrueret som beskrevet ovenfor.

Da jeg i efterårssemestret 2002 skulle være projektvejleder på basisuddannelsen, var det derfor naturligt at foreslå et projekt om talmønstre. De studerende skulle gerne have et projektemne som kunne aktivere dem, som lå indenfor deres matematiske rækkevidde umiddelbart efter gymnasieskolen, som gerne måtte være lidt spændende, og hvor de ikke kun-

ne undgå at lære både noget matematik og noget om den matematiske arbejdsproces. I sagen om talmønstrene startede studenter og vejleder stort set på samme sted, nemlig på bar bund. Til min store glæde var der ikke mindre end tre projektgrupper med i alt 19 studerende som bed på krogen, og der måtte hidkaldes hjælp fra to kolleger (Poul Svante Eriksen og Hans Hüttl) for at alle grupperne kunne få en vejleder.

Min glæde blev ikke mindre, da det i løbet af november måned lykkedes min egen projektgruppe at løse gulvets gåde, i hvert fald delvist. Konkret var det en enkelt af de studerende (Thomas Ellebæk), som til slut ved hjælp af empiri og systematisk ihærdighed kunne identificere, at gulvet på den ovenfor beskrevne måde var et billede af de kvadratiske rester for det komplekse primtal 71. Der er dog et par modifikationer, som jeg skal komme tilbage til. Det viste billede af de kvadratiske rester modulo 71 er beregnet ved hjælp af Søren Buhls program.

Kvadratiske rester modulo 71



Nu kunne jeg så ærgre mig grundigt over ikke at have gættet på dette tal fra starten. Hafnias bygning blev påbegyndt i 1910 og stod færdigt i 1912. Talmystikeren Thiele var netop 71 år gammel i 1910, som også blev hans dødsår. Så gulvet markerer uden tvivl hans egen alder på det pågældende tidspunkt. Om Thiele ligefrem selv har vidst, at det skulle blive hans gravmæle, er vel tvivlsomt, men det er dog tankevækkende.

Men hvori består modifikationerne? Jo, for det første er Hafnias gulv trefarvet, idet de farvede fliser i mønstret enten er røde eller grønne. Det

er hverken lykkedes de studerende eller de involverede vejledere, at finde ud af, hvad forskellen er på de røde og grønne felter. Så det forbliver en udfordring til foreningens medlemmer. Men herudover er der i alt 9 fliser, som ikke ligger korrekt i forhold til det beregnede mønster.

Den ene af disse bryder mønstrets symmetri. Mønstret er symmetrisk omkring de to hovedakser og de to hoveddiagonaler i forhallen. Men hvis koordinatsystemet orienteres således, at førsteaksen går vinkelret på fotografens synsline og andenaksen peger væk fra kameraet, er flisen med koordinater (25,45) farvet rød, mens alle spejlinger af denne flise i symmetriakserne er ufarvede. Nu siges det at være en gammel tradition blandt fliselæggere, at der skal være en enkelt fejl i sådant et gulvmønster for at det ikke skal bringe uheld over byggherren. Det er efter al sandsynlighed forklaringen på den enkelte forkerte flise.

De resterende 8 ukorrekte fliser består af flisen med koordinater (27,35) og de syv spejlbilleder af samme. De tilsvarende komplekse tal er kvadratiske rester modulo 71, men er ikke farvede i gulvet. Igen er det uklart, hvad forklaringen er. På grund af symmetrien kunne det i princippet være en fejl i Thieles beregninger, som derefter er blevet spejlet 7 gange, men Thiele lavede nu meget sjældent fejl.

Fejlen er snarere opstået under byggeprocessen. Det ville i hvert fald være menneskeligt, og siden symmetrien ikke er brudt, bemærker man næppe noget, medmindre man er usædvanlig skrap til hovedregning med komplekse kvadratiske rester.

Hvad nu?

Der er flere løse ender i denne sag. Dels kunne det være morsomt at se, hvordan man i dag ville lave en egentlig talteoretisk undersøgelse af den slags mønstre og deres symmetriegenskaber, samt algoritmer til at konstruere dem. Dels er der stadig gåden om de grønne og de røde felter, som kræver en løsning. Men nogen må også på jagt i Hafnias kældere efter papirer, som beskriver, hvorledes mønstret rent konkret blev beregnet i sin tid. Der findes papkasser med papirer fra byggesagen, men endnu er der ikke fundet noget i dem,

som direkte vedrører gulvet i forhallen.

Under alle omstændigheder er det fantastisk i sig selv, at der findes sådan et stykke matematisk kunst i Danmark. Det bør sikres, at gulvet og dets historie ikke går til.

Tak

En tak til alle, som har hjulpet mig på den ene eller den anden måde med denne sag. Bjarne Toft fik fat i Thieles foredrag til mig, Johan P. Hansen og Martin Raussen har hjulpet mig med talteoretisk litteratur, og Anders Hald havde franske forbindelser. Mange andre er allerede nævnt direkte i selve artiklen. Uden deres hjælp og indsats var jeg ingen vegne kommet. Søren Buhl skal nævnes specielt, både for hans uvurderlige program og for præcise kommentarer til denne artikel.

Litteratur

S. L. Lauritzen. Thiele: Pioneer in Statistics. Oxford University Press, Oxford, 2002.

E. Lucas. Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers. G. Retaux, Paris, 1867.

T. N. Thiele. Om talmønstre. Forhandlingerne ved de skandinaviske Naturforskernes 11te Møde i København, Juli 1873, side 192-195. København, 1874.

T. N. Thiele. Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en 'systematisk' Karakter. Det kongelige danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 5. Række, naturvidenskabelig og matematisk Afdeling, 12:381-408, 1880.

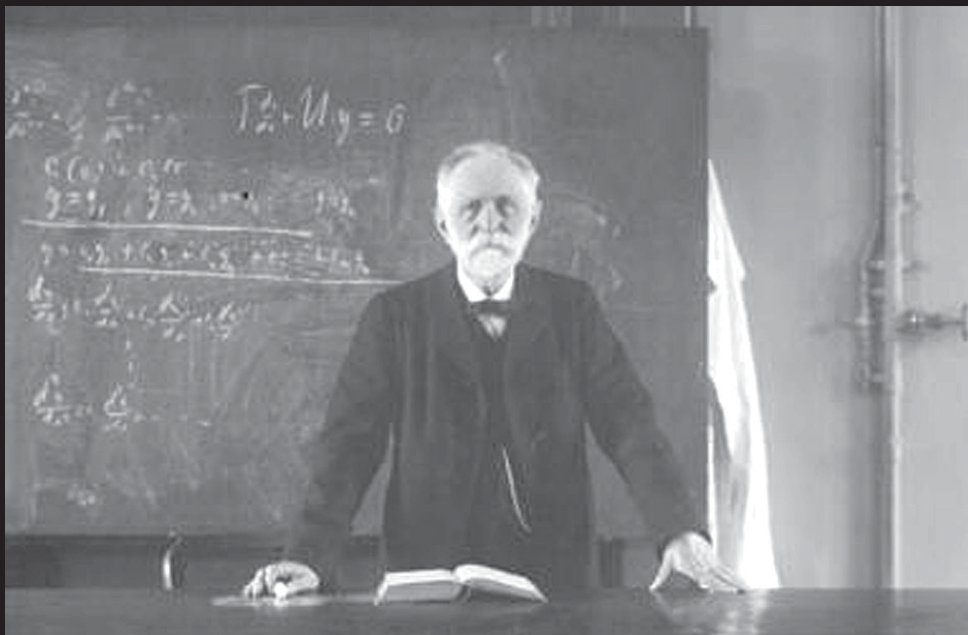
Fransk version: Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés.} C. A. Reitzel, København, 1880.

T. N. Thiele. Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. Det kongelige danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6. Række, naturvidenskabelig og matematisk Afdeling, 2:453-514, 1886.

T. N. Thiele. Almindelig Iagttagelseslære: Sandsynlighedsregning og mindste Kvadraters Methode. C. A. Reitzel, København, 1889.



H.G. Zeuthens



Matematikhistorie

Af Jesper Lützen, Matematisk
Afdeling, KU
email: lutzen@math.ku.dk



Ved et matematikhistoriemøde i Oberwolfach for nyligt fortalte en af deltagerne mig, at hun havde tænkt sig at lære dansk, fordi alle danskere tilsyneladende var interesseret i matematikkens historie. Jeg måtte naturligvis skuffe hende; men historien afspejler nok, at det danske bidrag til dette felt er stort i forhold til landets størrelse. Danske matematikere er generelt interesserede i deres fags historie og støtter studiet heraf. Denne interesse kan spores over 100 år tilbage i tiden til landets første internationalt anerkendte matematiker i nyere tid Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920), som også var en af sin tids mest betydningsfulde matematikhistorikere.

Som studerende ved Københavns Universitet viste Zeuthen så store evner for matematik, at han efter afsluttet magistergrad i 1863 fik et stipendium til at tage til Paris, for at studere antalgeometri (eller ennumerativ geometri, som denne gren af algebraisk geometri kaldes i dag) hos datidens største geometer Michel Chasles. Da han kom hjem igen, skrev han doktorafhandling om *Systemer af Keglesnit der ere underkastet 4 Betingelser*. Det blev startskuddet til en række meget vigtige arbejder om antalgeometri også for højereordens algebraiske mangfoldigheder. Han blev så anerkendt i udlandet at han fik til opgave at skrive artiklen om antalgeometri i *Encyclopädie der Mathemati-*

schen Wissenschaften i 1906. Otte år senere afsluttede han sin matematiske karriere ved at publicere monografien *Lehrbuch der abzählende Methoden der Geometrie*, der stadig anses for en klassiker.

Zeuthens matematiske arbejder gav ham et platonisk syn på matematik. Han mente at matematik handlede om uforanderlige ideer, som han også med filosofen Höfddings ord kaldte helhedserkendelser. Disse kunne opdages ved en slags heuristisk intuition eller helhedsfornemmelse med Höfddings ord, men skulle efterfølgende udtrykkes og bevises i mere konkret form. For eksempel kunne algebraisk geometriske sætninger indses intuitivt; men de måtte

udtrykkes og bevises i en algebraisk form eller i en geometrisk form. Zeuthen foretrak her den geometriske form, fordi den efter hans mening bedst afslørede den bagvedliggende helhedserkendelse. Han erklærede sig direkte uenig med sin lærer Adolph Steen, som i Weierstrasske vendinger havde fremført, at stringente beviser nødvendigvis måtte foregå "ved regning".

Hvor de matematiske ideer ifølge Zeuthen var eviggyldige og uforanderlige, så mente han til gengæld at den form, som de udtrykkes i, ændrer sig med tiden. Denne matematikopfattelse fik direkte indflydelse på den måde, han bedrev matematikhistorie.

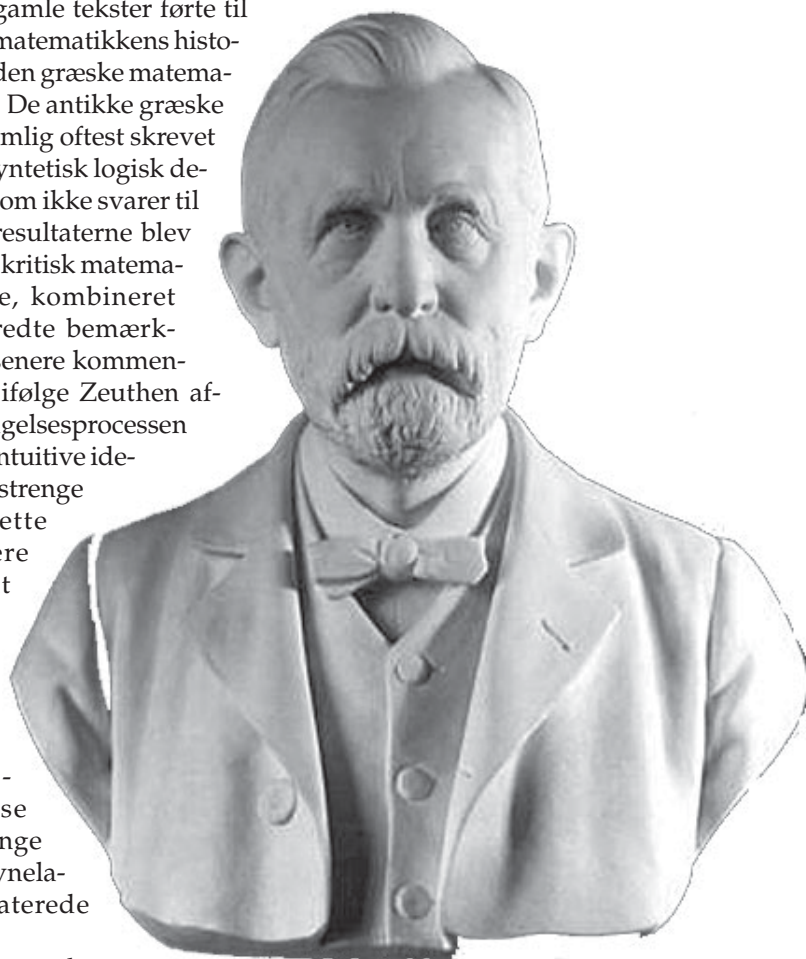
Han mente, at eftersom ideerne er uforanderlige, kan en nutidig matematiker, qua sin nutidige matematikuddannelse, sætte sig ind i et stykke matematik skrevet for over 2000 år siden. En antik Græsk matematiker er hans kollega, som han deler matematiske ideer med; blot er de gamles ideer måske udtrykt i en fremmedartet form. Når en moderne matematiker laver matematikhistorisk forskning, er det efter Zeuthens opfattelse hans opgave at trænge ind bag formen og afdække de bagvedliggende ideer. Zeuthen understregede dog, at man skal være meget opmærksom også på formen, fordi man ellers ikke vil kunne forstå, hvordan de gamle kom frem til deres resultater, og heller ikke hvorfor det var vanskeligt eller umuligt for dem at komme frem til andre resultater.

Hvad mente Zeuthen så, at en matematiker kunne få ud af sådanne omhyggelige analyser af tidligere tiders ideer og metoder? Han havde både matematiske og historiske mål. Han mente, at matematikere på den måde kan lære om glemte metoder, som måske er mindre elegante og generelle end moderne metoder, men som kan lede til en dybere forståelse af konkrete tilfælde. Desuden kan kendskab til tidligere tiders metoder, ifølge Zeuthen, føre til en strømning af den moderne fremstilling, hvis man indser, at den er tynget af unødvendige rester af en tidligere form.

Zeuthens første matematikhistoriske arbejder var mest af didaktisk natur. Han valgte emner, der kunne kaste lys over et velkendt stykke matematik, for at udvikle især yngre læsers matematiske sans og indsigt. Men efterhånden opdagede han, at

hans matematisk analyserende tilgang til de gamle tekster førte til ny indsigt i matematikkens historie, specielt den græske matematiks historie. De antikke græske tekster er nemlig oftest skrevet i en streng syntetisk logisk deduktiv stil, som ikke svarer til den måde, resultaterne blev opdaget. En kritisk matematisk analyse, kombineret med de spredte bemærkninger hos senere kommentatorer kan ifølge Zeuthen afdække opdagelsesprocessen og de mere intuitive ideer bag den strenge facade. Dette kan videre medføre, at man kan rekonstruere tabte værker, forstå tågede hentydninger og se sammenhænge mellem tilsyneladende urelaterede resultater.

Hvilke emner kastede Zeuthen sig da over, og hvilke resultater kom han til? Han begyndte først at publicere om matematikkens historie efter ti års ren matematisk forskning. Alligevel kan man nok spore emnet for hans første historiske artikel *Fra Matematikkens Historie I. Brahma-Guptas Trapez* (1876) tilbage til hans tid i Paris, idet indisk matematik var et yndlingsemne for hans lærermester Chasles, som også var meget historisk interesseret. Zeuthen vendte sig dog snart mod de græske mestre Euklid, Diofant og specielt Apollonios, hvis keglesnitslære han selv havde videreudviklet i sine egne algebraiske geometriske arbejder. I 1885 udgav han sin måske mest betydningsfulde matematikhistoriske bog: *Keglesnitslæren i Oldtiden*, hvori han gav den til dato mest indgående analyse af Apollonios' værk. Blandt andet afklarede han, hvad Apollonios kunne have ment, når han hævdede, at han havde løst det såkaldte tre- og fire-linie lokus problem i bog 3. Desuden mente Zeuthen, at han kunne afdække den tidligere udvikling af keglesnitslæren, bl.a. hvordan grækerne i det hele taget var blevet ledt



Hieronymus Georg Zeuthen
(1839-1920)

til at betragte keglesnit.

Apollonios' typiske syntetiske stil havde ført til spekulationer om, hvordan han og de tidligere græske matematikere havde opdaget deres resultater om keglesnit. Flere matematikere i det 19. århundrede mente, at de gamle havde brugt analytisk geometri, men havde holdt metoden hemmelig for at kunne imponere deres læsere. Zeuthen fandt denne ide smagløs. Omvendt havde Descartes påstået, at grækerne ikke besad nogen metode til at opdage deres resultater og derfor blot samlede de sætninger, de tilfældigvis faldt over. Dette afviste Zeuthen også. I stedet argumenterede han for, at grækerne havde besiddet en metode, som på mange måder var ækvivalent med moderne algebra, men som dog var udtrykt i en anderledes geometrisk form. "Opdagelsen" af denne "geometriske algebra" som han kaldte den, var nok et af Zeuthens mest centrale bidrag til matematikkens historie, og, skal



det tilføjes, også et af de mest omdiskuterede.

Paul Tannery havde i 1882 påpeget, at bog II og VI af Euklids Elementer indeholdt geometriske sætninger og problemer, der svarede til løsning af andengrads ligninger. Zeuthen gik videre. I Euklids bog II fandt han en hel deduktiv teori, som i geometrisk sprog udtrykker og beviser mange af de relationer, som vi i dag udtrykker ved hjælp af algebra. For eksempel svarer formelen

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

til Euklids proposition II 4:

Når en ret linie er delt vilkårligt, er kvadratet på hele linien lig summen af kvadraterne på stykkerne og to gange det rektangel, der indesluttet af stykkerne.

Efter Keglesnitslæren i Oldtiden gik Zeuthen videre med et omfattende studium af den antikke matematik, bl.a. areallæren og den såkaldte exhaustionsmetode. Han forelæste over disse emner og udgav sine resultater i bogen *Forelæsning over matematikens Historie: Oldtid og Middelalder*. Ti år senere kom fortsættelsen *Forelæsning over Matematikens Historie i XVI. og XVII. Aarhundrede*, hvori Zeuthen bl.a. undersøgte, hvordan den geometriske algebra i 1600-tallet blev omdannet til analytisk geometri, og hvordan Newton og Leibniz og deres forgængere omdannede den antikke exhaustionsmetode til differential- og integralregning. Specielt fremhævede han Barrows indsigt i den inverse sammenhæng mellem tangent- og arealbestemmelse, svarende til infinitesimalregningens hovedsætning.

Zeuthens analyser havde ledt ham til at formode, at grækerne havde benyttet sig af infinitesimale teknikker til at finde de resultater om arealer og volumener, som de efterfølgende beviste ved hjælp af exhaustionsmetoden. Dette blev bekræftet af Zeuthens samtidige, den klassiske filolog J.L. Heiberg, som ved siden af en fuldtidsansættelse i gymnasiet formåede at udgive de stadigt brugte udgaver af Arkimedes', Euklids, Apollonios', Serenus', Ptolemaios', Herons og Theodosios' værker. I 1906 opdagede han i Konstantinopel et manuskript, som indeholdt et ellers tabt manuskript af Arkimedes, hvori han beskriver en metode til opdagelse af matematiske sætninger. Den bygger på vægtstangsreglen og infinitesimale overvejelser. Zeuthen, som skrev den ma-

tematiske kommentar til Heibergs udgave af manuskriptet, påpegede, at dette fund på bedste vis bekræftede styrken i hans matematikhistoriske analysemetode.

I vore dage er Zeuthen blevet beskyldt for at skrive "wig" historie, d.v.s. en slags historie, hvor man prøver at forstå fortiden ud fra nutiden i stedet for at se fortidige begivenheder i den sammenhæng, de skete i. Og det skal da også siges, at man i Zeuthens arbejder ikke finder meget om den kontekst, som den historiske matematik udviklede sig i. Og selv om han betonedede vigtigheden af den form, som gammel matematik blev præsenteret i, så var han ikke altid lige omhyggelig med at sondre mellem nutidig og fortidig matematisk form. Hans analyser af græsk matematik indeholder således af og til algebraiske udtryk, der vanskeligt lader sig oversætte i græske geometriske termer. Man kan også mene, at når Zeuthen opfattede græske konstruktioner som eksistensbeviser, så har det nok i lige så høj grad sin rod i hans samtids begyndende fokusering på eksistensbeviser som i de antikke kilder. Noget lignende kan siges om hans ide om, at Apollonios brugte projektive metoder.

Faktisk blev Zeuthen allerede i sin samtid anklaget for at være ahistorisk. Således beskyldte Moritz Cantor (som ikke var i familie med den infinitte mængdelæres fader Georg Cantor) ved flere lejligheder Zeuthen for at indlæse (hineinlesen) moderne ideer i de gamle tekster. Han indrømmede, at Zeuthens bøger om matematikkens historie var åndfulde (geistvoll); men han mente ikke, det var historie. Da Zeuthen i en polemisk artikel med titlen *M. Maurice Cantor et la géométrie supérieure de l'antiquité* beklagede sig over at Cantor i sin omfattende matematikhistorie ikke havde nævnt hans analyser vedrørende den antikke keglesnitslære, svarede Cantor med en artikel med den sigende titel: *M. Zeuthen et sa [sic] géométrie supérieure de l'antiquité*.

De fleste af Zeuthens samtidige modtog dog hans publikationer meget positivt. Han modtog således som den første det franske Videnskabsakademis Prix Binoux for arbejde inden for videnskabens historie. Hans ideer har også vist sig langtidsholdbare. Selv om moderne historikere ofte tager afstand fra hans historiske

metode og fra flere af hans konklusioner, så er der også stor enighed om, at hvis man vil vide noget om det matematiske indhold i de store værker fra fortiden, så er der stadig meget, man kan lære fra Zeuthens dybe analyser. Alle studier af den antikke græske matematik henviser til Zeuthens værker og tager ofte udgangspunkt i hans konklusioner. Således indeholder januar 2003 nummeret af det ansete tidsskrift *Archive for History of Exact Sciences* en artikel om "The Concepts of Existence and the Role of Construction in Euclid's Elements" som netop tager udgangspunkt i Zeuthen's synspunkter.

Zeuthen nød stor anseelse i sin samtid. Således blev han indvalgt i Videnskabernes Selskab i 1872 og var dets sekretær i 39 år. Det gør ham til den længst siddende sekretær i Selskabets historie. Den agtelse, der omgav Zeuthen, var nok med til at gøre matematikkens historie til et respekteret emne ved Københavns Universitet, og bidrog nok til at flere af hans efterfølgere som Niels Nielsen, Johannes Hjelmslev og Erik Nørlund publicerede inden for emnet. Da Otto Neugebauer kom til København i 1934 fik matematikkens historie et yderligere skub, og fra hans studerende Olaf Schmidt går der en lige linie til fagets nuværende danske udøvere (se Andersen 2002).

Således kom Zeuthen til at få stor indflydelse på matematikkens historie både internationalt og (især) her i landet.

Litteratur:

Kirsti Andersen: "Scandinavia". I *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*. Birkhäuser, Basel, 2002, s. 151-160.

Steven L. Kleiman: "Hieronymus Georg Zeuthen 1849-1920". I *Enumerative Algebraic Geometry*, red. S.L. Kleiman & A. Thorup. *Contemporary Mathematics* Vol. 123. AMS, Providence, 1991, s. 1-13.

Jesper Lützen: "Zeuthen, Hieronymus Georg". I *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development* Birkhäuser, Basel, 2002, s. 574-578.

Jesper Lützen og Walter Purkert: "Conflicting Tendencies in the Historiography of Mathematics: M. Cantor and H.G. Zeuthen". I *The History of Modern Mathematics Vol III*, red. D. Rowe & J. McCleary, Academic Press, San Diego, 1994, s. 1-42.

Fenchels dualitetssætning

Tinne Hoff Kjeldsen,
IMFUFA,
Roskilde Universitetscenter,
e-mail: thk@ruc.dk



1 Indledning

Fenchels dualitetsteori er et begreb, man ofte støder på i litteraturen inden for konveks programmering, hvor det er blevet karakteriseret som et af teoriens stærkeste redskaber [Magnanti, 1974]. I manuskriptet “Bidrag til de konvekse funktioners teori” beskriver Fenchel de undersøgelser, der ledte frem til dette dualitetsresultat, og det fremgår, at Fenchel gennemførte disse undersøgelser under et ophold i USA “for tre år siden” [Fenchel, 53/54, s. 1].¹ Men hvad går denne dualitetsteori ud på? Hvad var baggrunden for, at Fenchel overhovedet gik i gang med at udvikle den? Og hvad var det, der gjorde, at han i 1950/51 faktisk var i stand til det? For at svare på disse spørgsmål skal vi først en tur rundt om lineær programmering og Fenchels indførelse af begrebet konjugerede konvekse funktioner.

2 Lineær programmering og dualitetssætningen

Lineær programmering er teorien om løsning af lineære programmeringsproblemer, som går ud på at optimere en lineær funktion underlagt bibetingelser givet ved lineære uligheder.

Lineær programmering blev primært udviklet i USA, hvor det voksede ud af arbejdet med at opstille såkaldte “programmer”, som var et logistisk styringsredskab i det amerikanske luftvåben. Matematikeren George B. Dantzig arbejdede under 2. verdenskrig med disse metoder, og efter krigen nedsatte luftvåbnet en arbejdsgruppe med bl.a. Dantzig og Marshall Wood, som arbejdede på at effektivisere metoderne til at løse disse “programmer”. Gruppen endte med at opstille en model, som resulterede i følgende matematiske problem:

Minimer en lineær funktion underlagt lineære ulighedsbibetingelser.

¹Fenchels ophold i USA fandt sted i 1950/51, hvilket gør det muligt at datere manuskriptet til perioden 1953/54.

Problemet med modellen var, at den ikke var tilgængelig for analysens standardmetoder.

Dantzig blev opfordret til at tage kontakt til John von Neumann fra Institute for Advanced Study i Princeton for at diskutere løsningsproblemet med ham. Von Neumann indså, at der er en sammenhæng mellem programmeringsproblemet og et såkaldt to-personers nul-sum spil i spilteori. Von Neumanns interesse fik stor betydning for den videre udvikling af lineær programmering, idet han formentlig var en af initiativtagerne til dannelsen af en forskningsgruppe finansieret af den amerikanske flådes forskningskontor *Office of Naval Research* (ONR), der havde som opgave at studere denne sammenhæng mellem spilteori og lineær programmering. Gruppen fik hjemsted på matematisk institut ved Princeton universitetet med matematikeren Albert W. Tucker som leder.

Sammen med to studerende David Gale og Harold W. Kuhn påbegyndte Tucker i sommeren 1948 studiet af sammenhængen mellem lineær programmering og spilteori samt undersøgelser over lineær programmerings underliggende matematiske struktur. Deres resultater blev publiceret i en beretning fra den første konference om lineær programmering, som blev holdt i Chicago i juni 1949. Blandt deres resultater fremstår dualitetssætningen som noget særligt: Til et lineært programmeringsproblem kan man formulere et nyt lineært programmeringsproblem ud fra de samme data således, at hvis det oprindelige problem er et minimumsproblem, så vil det nye problem (kaldet det duale) være et maksimumsproblem. Kuhn, Gale og Tucker viste, at der om disse to problemer gælder, at det oprindelige (det primære) problem har en endelig optimal løsning hvis og kun hvis, det duale problem har en endelig optimal løsning, og i såfald vil minimumsværdien af det første problem være lig med maksimumsværdien af det andet problem [Gale, Kuhn og Tucker, 1951].



3 Ikke-lineær programmering og den manglende dualitetssætning

Dualitetssætningen er en interessant matematisk sætning, og den fangede Kuhn og Tuckers interesse i en sådan grad, at de fortsatte med projektet. De ønskede at udvide dualitetssætningen til det generelle ikke-lineære tilfælde, altså til problemet at optimere en vilkårlig funktion underlagt vilkårlige ulighedsbetingelser. Kuhn og Tucker startede dette arbejde i efteråret 1949, og den efterfølgende sommer præsenterede Tucker deres arbejde under titlen “Ikke-lineær programmering” ved et møde i Berkeley, Californien. Deres arbejde blev senere publiceret i en kongresbetretning fra mødet og blev starten på forskningsområdet “ikke-lineær programmering” [Kuhn og Tucker, 1950].

Kuhn og Tuckers udgangspunkt var, at de ville udvide dualitetssætningen for lineær programmering til det generelle ikke-lineære tilfælde, hvilket fremgår af Kuhns egne udtalelser og bekræftes af en analyse af deres ikke-lineær programmeringsartikel [Kjeldsen, 2000]. Det er derfor bemærkelsesværdigt, at der ikke er nogen overvejelser om dualitet for ikke-lineær programmering i Kuhn og Tuckers arbejde fra 1950. Direkte adspurgt om grunden hertil svarede Kuhn, at de “glemte det”.

Hovedresultatet i artiklen er den såkaldte Kuhn-Tucker sætning, som giver nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en løsning til et ikke-lineært programmeringsproblem. Udover det generelle tilfælde behandlede Kuhn og Tucker også det tilfælde, hvor de funktioner, der indgår i programmeringsproblemet udover at være differentiable, også er konkave. De viste, at under passende konveksitetsbetingelser kan der opnås pæne symmetriske resultater, hvor problemet om nødvendige og tilstrækkelige betingelser for eksistensen af en løsning kan formuleres som et saddelpunktsproblem.

4 Fenchels konjugerede konvekse funktioner

Da Fenchel nogle måneder senere ankom til Princeton, var dualitetssætningen stadig et åbent problem, og det stod klart, at konveksitetsteorien spillede en central rolle.

Fenchel opholdte sig ved Institute for Advanced Study og fik naturligt nok kontakt til Tucker og hans ONR-projekt. Det må have været meget spændende for Tuckers gruppe, at en af de førende matemati-

kere inden for konveksitetsteori meldte sin ankomst i Princeton lige på det tidspunkt. Det fremgår da også af brevvekslingen mellem Kuhn, Tucker og Fenchel i perioden lige efter Fenchels ophold ved Princeton, at det har været et yderst spændende bekendtskab. Og hvad Kuhn og Tucker ikke havde været i stand til lykkedes for Fenchel.

Tucker opfordrede Fenchel til at holde en række forelæsninger om konvekse funktioner og mængder i forårssemesteret 1951. Fenchels forelæsninger udkom som *Lecture Notes* baseret på udførlige forelæsningsnoter taget af D. W. Blackett. Udarbejdelsen samt trykningen blev finansieret af ONR gennem Tuckers projekt, og noterne udkom med nogen forsinkelse i september 1953. Disse noter fik – ligesom Fenchels monografi sammen med Bonnesen – stor betydning for den videre forskning i konveksitetsteori.

I manuskriptet “Bidrag til konvekse funktioners teori” omtaler Fenchel den “bemærkelsesværdige sætning” (dualitetssætningen for lineær programmering), som blev bevist af Gale, Kuhn og Tucker og i forlængelse heraf stiller han spørgsmålet:

Det ligger nu nær at spørge, om denne isolerede sætning kan indordnes i en almen sammenhæng og forstås ud fra kendte dualitetsprincipper. Dette er faktisk muligt og opnås ved en generalisering og modifikation af problemstillingen. [Fenchel, 53/54, s. 4]

I afsnit 6 i Princeton-noternes sidste kapitel besvarede Fenchel netop dette spørgsmål. Afsnittet har overskriften *A Generalized Programming Problem*, og heri formulerede Fenchel den første dualitetssætning for ikke-lineær programmering, den såkaldte Fenchels dualitetssætning.

Det var naturligvis kontakten til Tucker, der gjorde, at Fenchel var i stand til at stille ovenstående spørgsmål. Det fremgår flere steder bl.a i forordet til noterne, hvor Fenchel tilkendegiver, at mødet med Tucker var den direkte årsag til, at han stiftede bekendtskab med denne problemstilling:

The author [Fenchel] wishes to express his gratitude to Professor A. W. Tucker for giving him this opportunity to write this report and for calling his attention to the problems dealt with in the final sections [s. 105-137]. [Fenchel, 1953, Acknowledgement]

Af afsnittet *Historical Notes*, som er placeret til sidst i noterne, fremgår det yderligere, at dette dualitetsresultat er ikke-publiceret materiale, og i et brev til

Kuhn dateret 17. september 1952 skriver Fenchel direkte, at dette materiale var nyt eller *just developed* på det tidspunkt, hvor forelæsningserne fandt sted [Fenchel, 1952, brev, 17 sept.].

For at forstå hvorfor Fenchel var i stand til at vise en dualitetssætning for ikke lineær programmering, må vi dykke ned i Fenchels indførelse af konjugerede konvekse funktioner, som var det begreb, han baserede sin dualitetsteori i konvekse programmering på. I en artikel fra 1949 indførte Fenchel dette begreb som konsekvens af en undersøgelse af den underliggende struktur bag en del af de uligheder, der optræder i matematisk analyse. Han havde bemærket, at disse uligheder ofte kan betragtes som konsekvenser af visse funktioners konvexitet, idet der i adskillige af disse uligheder optræder

... pairs of “conjugate” functions ..., for instance pairs of powers with exponents a and α related by $1/a + 1/\alpha = 1$ [Fenchel, 1949, s. 73].

Fenchel viste i artiklen, at der til enhver konvex funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ defineret på en konvex delmængde G af $\mathbb{R}^n$ og opfyldende visse kontinuitetsbetingelser, korresponderer en konvex delmængde Γ af $\mathbb{R}^n$ og en konvex funktion $\phi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ defineret på Γ og med de samme egenskaber som f , således at uligheden

$$x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n \leq f(x_1, \dots, x_n) + \phi(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1)$$

er opfyldt for alle punkter $x = (x_1, \dots, x_n)$ i G og alle punkter $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ i Γ , og således at G , f korresponderer på samme måde til Γ , ϕ . Fenchel kaldte de to funktioner f og ϕ for hinandens konjugerede [Fenchel, 1949, s. 73-75].

Ved at definere Γ som mængden af alle punkter ξ , for hvilke udtrykket

$$\sum_{i=1}^n x_i\xi_i - f(x)$$

er opadtil begrænset for x i G , og dernæst sætte

$$\phi(\xi) = \sup_{x \in G} \left(\sum_{i=1}^n x_i\xi_i - f(x) \right)$$

viste Fenchel ovenstående resultat. Definitionen af ϕ sikrer, at uligheden (1) gælder. Fenchel viste, at mængden Γ er ikke-tom ved at betragte uligheden

$$\sum_{i=1}^n x_i\xi_i - f(x) \leq z.$$

Han omskrev den til

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^n x_i\xi_i - z$$

hvis geometriske indhold er, at hyperplanen $y = \sum_{i=1}^n x_i\xi_i - z$ i $\mathbb{R}^{n+1}$ med normalvektor $(\xi_1, \dots, \xi_n, -1)$ intet sted ligger over hyperfladen $y = f(x)$. $-z$ er denne hyperplans skæring med y -aksen [Fenchel, 1949, s. 75].

Fenchel anvendte herefter det velkendte resultat fra konvexitetsteorien, som siger, at der til den konvekse hyperflade $y = f(x)$ findes mindst én støttehyperplan, det vil sige en hyperplan, som indeholder mindst ét punkt af hyperfladen og intet sted ligger over den. Det indebærer, at der findes mindst ét punkt i Γ , og dermed har Fenchel redegjort for, at mængden Γ er ikke-tom. Yderligere gælder der, argumenterede han, at findes der en støtte hyperplan med normalvektor $(\xi_1, \dots, \xi_n, -1)$, og er $(x^0, f(x^0))$ kontaktpunktet mellem hyperplanen og hyperfladen $y = f(x)$, så er

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i^0\xi_i - f(x^0).$$

$-\phi(\xi)$ er da denne hyperplans skæring med y -aksen [Fenchel, 1949, s. 75].

5 Fenchels dualitetsteori

Vi er nu i stand til at forstå Fenchels dualitetsresultat, som han formulerede og beviste det i Princeton-noterne i foråret 1951.

Han betragtede en afsluttet, konvex funktion $f(x)$, defineret på en konvex mængde C i $\mathbb{R}^n$, og en afsluttet konkav funktion $g(x)$, defineret på en konvex mængde D . Han lod $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ betegne den konjugerede funktion til f , mens $\psi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ betegnede den konjugerede til g [Fenchel, 1953, s. 105].² Hertil opstillede han følgende to problemer:

PROBLEM I: Find et punkt x^0 i $C \cap D$, således at $g(x) - f(x)$ som funktion i $C \cap D$ har maksimum i x^0 .

PROBLEM II: Find et punkt ξ^0 i $\Gamma \cap \Delta$, således at $\phi(\xi) - \psi(\xi)$ som funktion i $\Gamma \cap \Delta$ har minimum i ξ^0 .

²I Princetonnoterne redegjorde Fenchel for, at man på tilsvarende måde kan finde den konjugerede til en konkav funktion. Den konjugerede til en konkav funktion g er defineret som $\psi(\xi) = \inf_{x \in D} (x'\xi - g(x))$, defineret i mængden Δ af alle ξ for hvilke $x'\xi - g(x)$ er nedadtil begrænset for x i D [Fenchel, 1953, s. 90].



Fenchel viste, at der om disse to problemer – under passende forudsætninger – gælder:

$$\sup_{x \in C \cap D} (g(x) - f(x)) = \inf_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} (\phi(\xi) - \psi(\xi)).$$

[Fenchel, 1953, s. 105-106]. Dette er den første dualitetssætning i ikke-lineær programmering. Fenchel viste ligeledes i Princetonnoterne, at hans dualitets-sætning indeholder dualitetssætningen for lineær programmering.

6 Konklusion

Fenchels dualitetssætning i ikke-lineær programmering er et eksempel på, hvordan kontakt til forskere, der arbejder i forskellige, men i dette tilfælde beslægtede, områder, kan bidrage med ny inspiration og drive udviklingen i et andet område af matematikken. Fenchel udviklede sit konjugerings-begreb med det formål at afdække den underliggende matematiske struktur, der lå til grund for adskillige uligheder fra analysen. Gennem sit resultat om konjugerede, konvekse funktioner lykkedes det ham at generalisere og udvikle en teori for disse uligheder. Tucker var samtidig leder af projektet støttet af ONR. Han havde finansiell mulighed for at sætte aktiviteter i gang, der handlede om matematisk programmering, spilleori og dertil relaterede emner som konveksitetsteori. Fenchels forelæsningsrække på Princeton var en sådan aktivitet, og kontakten til Tucker resulterede i, at Fenchel blev opmærksom på, at konjugerede konvekse funktioner kunne anvendes til at konstruere en dualitetssætning for ikke-lineær programmering.

Fenchel fortsatte ikke dette dualitetsarbejde for ikke-lineær programmering, men hans *Lecture Notes* kom til at præge den senere udvikling. Især R. T. Rockafellar videreudviklede Fenchels dualitetssætning og opbyggede en dualitetsteori for ikke-lineær programmering baseret på begrebet om konjugerede, konvekse funktioner.

Litteratur

Fenchel, W.: “On Conjugate Convex Functions.” *Canadian Journal of Mathematics*, 1, 1949, s.73-77.

Fenchel, W.: Brev fra W. Fenchel til H. W. Kuhn, dateret 17 september, 1952. Fenchel Arkivet, Afdeling for matematiske fag, Københavns Universitet.

Fenchel, W.: *Convex Cones, Sets, and Functions*. Lecture Notes, Department of Mathematics, Princeton University, 1953.

Fenchel, W.: “Bidrag til de konvekse funktioners teori.” Forelæsningsmanuskript, 1953/54. Box 2, Mappe: Manuskripter om konvekse mængder og funktioner. Fenchel Arkivet, Afdeling for matematiske fag, Københavns Universitet.

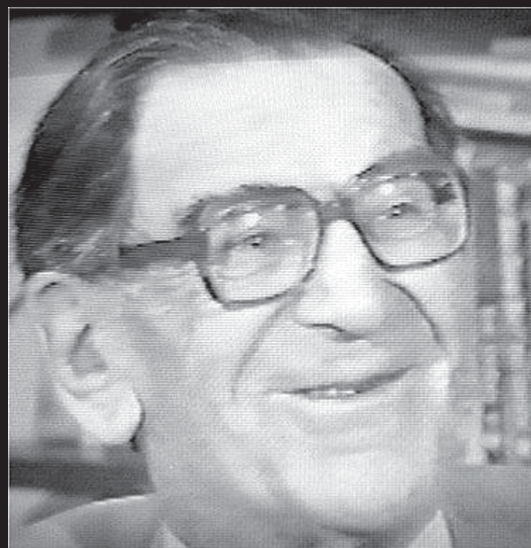
Gale, D., Kuhn, H. W. og Tucker, A. W.: “Linear Programming and the Theory of Games.” i Koopmans, T. C. (red.): *Activity Analysis of Production and Allocation*. Cowles Commission Monograph, 13, New York: Wiley, 1951.

Kjeldsen, T. H.: “A Contextualized Historical Analysis of the Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: The Impact of World War II.” *Historia Mathematica*, 27, 2000, pp. 331-361.

Kuhn, H. W. og Tucker, A. W.: “Nonlinear Programming.” i J. Neyman (red.): *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, 1950.

Magnanti, T.: “Fenchel and Lagrange Duality are Equivalent.” *Mathematical Programming*, 7, 1974, s.253-258.

Werner Fenchel



Ørsted og matematikken

Indledning

Det er velkendt, at Hans Christian Ørsted (1777–1851) kun sjældent gjorde brug af matematiske værktøjer i sine videnskabelige arbejder, og det bevidst. Det er tidligere blevet beklaget f.eks. af Kirstine Meyer, der i 1920 antydede, at hvis bare Ørsted havde kunnet noget mere matematik, kunne han have spillet en større rolle, end han rent faktisk gjorde i udviklingen af den elektromagnetiske teori efter 1820 (Meyer, 1920, s. clv–clxii). Olaf Pedersen beskrev i 1987, hvor lang tid det tog, før man ved Københavns Universitet begyndte at undervise Newtons mekanik "ordentligt," dvs. ud fra den rent matematiske beskrivelse. Ifølge Olaf Pedersen forsinkede Ørsted den udvikling ca. 80 år, dels gennem sin egen undervisning, dels gennem sin tro discipel, protégé og efterfølger Carl Holtens undervisning i faget (Pedersen, 1987). Spørgsmålet er så, om der overhovedet er mere at sige om den sag? Er Ørsteds forhold til matematik ikke bare en "mørk plet" på den danske naturvidenskabs historie? Måske, og det er ikke min hensigt i det følgende at tilbagevise ovennævnte synspunkter.

Det der er interessant i forhold til Ørsted er, at på trods af at han sjældent arbejdede matematisk, fundere han ofte over matematikkens rolle i naturlæren især i forhold til en mere intuitiv og umiddelbar fortolkning af de fysiske og kemiske genstandsområder. Han opfattede selv sidstnævnte indfaldsvinkel som mere tro mod naturvidenskaben og følte sig ofte presset til at forklare og forsvare sit standpunkt. Imidlertid var Ørsted ikke fuldstændig afvisende overfor den matematiske beskrivelse. Hvorfor ikke? Hvad skulle han bruge den til? Disse er spørgsmål, som, når de besvares i det følgende, gerne skulle give os oplysninger om nye sider af Ørsted. Naturligvis skal vi ikke vente at opdage et hidtil ukendt matematisk geni i Ørsted, men derimod nye og uddybende oplysninger om hans stræben efter at finde enhed mellem de forskellige vi-

denskabelige discipliner. Med det formål at besvare ovennævnte spørgsmål præsenterer jeg først Ørsteds syn på videnskabelig metode, og derefter ser jeg på den rolle han tildelte den matematiske repræsentation i naturlæren, specielt i hans mekaniklærebog fra 1809. Det bringer mig yderligere ind på et tilsyneladende hidtil ukendt geometri-projekt, som beskæftigede Ørsted i 1807–08, men som aldrig materialiserede sig i nogen egentlig publikation.¹

Ørsteds videnskabelige metode

I sit videnskabssyn var Ørsted stærkt præget af de tyske filosoffer Immanuel Kant og F.W.J. Schelling. I modsætning til det ellers fremherskende mekaniske og atomistiske verdensbillede var der i Schelling's naturfilosofi en forestilling om naturen som en levende organisme, eller med andre ord en dynamisk helhed. Helt i tråd med de retningslinier for naturforskningen som Schelling udstak, var Ørsted optaget af at finde helheden og enheden i naturen, enheden mellem menneskelig ånd og natur, enheden mellem videnskaberne og mellem videnskab og kunst, litteratur og filosofi, og ikke mindst enheden mellem de grundlæggende kræfter i naturen. Ørsted søgte at afdække naturens underliggende dynamiske og polære struktur dels ved at lave eksperimenter, der kunne belyse denne struktur, dels gennem spekulative teorier. Han mente, at han havde fundet et centralt bevis på denne underliggende struktur i naturen, da han opdagede elektromagnetismen i 1820.

Selvom Ørsted opbyggede et spekulativt dynamisk system, der skulle forklare kemiske, magnetiske og elektriske fænomener samt lys og varme, så distancerede han sig alligevel fra de mest spekulative naturfilosoffer, som for eksempel Schelling og Henrik Steffens, ved til stadighed at understrege vigtigheden af den



Af: Anja Skaar Jacobsen,
Institut for Videnskabshistorie;
Aarhus Universitet
email: ivhasj@ivh.au.dk

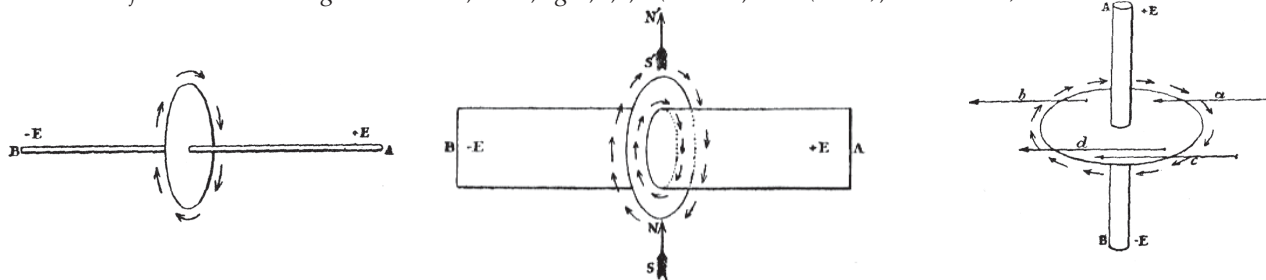
eksperimentelle bekræftelse af ens teoribygning. På den anden side foragtede han den rent empiriske praksis, som han opfattede som en ren samlen sammen af eksperimentelle og observationelle facts uden nogen overordnet teoretisk styring, en procedure som herskede i stor stil bl.a. i kemien på dette tidspunkt. Ørsted var tilhænger af en videnskabelig metode, der trak på både fornuften og erfaringen. Spørgsmålet er nu, hvilken rolle han tillagde den matematiske beskrivelse i sin videnskabelige metode, hvis nogen?

Matematikens rolle

Ørsted lærte aldrig meget matematik hverken som dreng eller senere som studerende ved Københavns Universitet. Han voksede op i Rudkøbing på Langeland, hvor der på det tidspunkt ikke fandtes nogen skole. Bortset fra farmaceutisk og praktisk kemisk optræning i faderens apotek var den undervisning han og broderen, Anders Sandøe Ørsted, modtog mere eller mindre tilfældig. De blev passet dagligt af en tysk parykmager og dennes kone (parykker var gået af mode, så parykmageren skulle ernære sig på anden vis). Her lærte de primært tysk og passager fra biblen. Ellers blev de undervist af tilfældigt overnattende i apoteket, der også fun-



Figur 1. Illustrationer af den elektromagnetiske krafts roterende effect omkring den strømbærende ledning. På alle billeder er BA den strømførende leder, hvori retningen af strømmen er AB. På to af billederne er der placeret magnetnåle i nærheden af lederen med betegnelserne SN, S'N', og a,b,c,d (Ørsted, 1830(1920), s. 360–362).



gerede som den lokale kro. Det resulterede i, at Hans Christian som dreng aldrig lærte mere matematik end de helt basale regneteknikker. Senere under studiet på Københavns Universitet tog han elementære matematikkurser ved siden af de andre forberedende kurser, inden han lagde sig efter kemien og filosofien. Matematikken inspirerede ham tilsyneladende ikke synderligt, hvilket naturligvis påvirkede hans syn på denne disciplin, men billedet er slet ikke så simpelt.

Faktisk havde Ørsted ikke noget imod matematik som sådan og heller ikke som et redskab i naturlæren. Han anerkendte, at det kunne være befordrende for en teoris udvikling, at den blev matematiseret. At en teori byggede på en matematisk model, var et modenhedstegn ved teorien, og en sådan var derfor værd at stræbe efter. Ulempen ved den matematiske beskrivelse var, ifølge Ørsted, at ofte fik den karakter af en stiv struktur, der ligesom blev tvunget nedover fænomenerne. Det var, mente han, tilfældet i f.eks. André-Marie Ampères elektrodynamiske teori. Mens Ørsteds anskuelige og ikke-matematiske teori for elektromagnetismen gik ud på, at den elektromagnetiske kraft roterede om den strømbærende leder og dermed dannede en cylindrisk symmetri om denne (se figur 1), gav Ampères matematisk funderede teori et helt andet billede af, hvad der skete i elektromagnetismen. Ifølge Ampère kunne alle magnetiske og elektromagnetiske fænomener reduceres til vekselvirkninger mellem infinitesimale strømelementer. Man skulle således forestille sig disse gensidigt vekselvirkende strømelementer placeret indeni magneten og på den måde forårsagende de magnetiske egenskaber (se figur 2). Ørsted var af den overbevisning, at hans

egen teori i modsætning til Ampères gav en umiddelbar, direkte og intuitiv forståelse af den elektromagnetiske effekt. Med andre ord, hans egen teori var langt mere anskuelig og hensigtsmæssig i formen end Ampères. Ifølge Ørsted satte hans teori ånden fri, dvs. naturforskeren blev i stand til at forestille sig det pågældende fænomen "i Aanden," som han udtrykte det. For Ørsted var Ampères teori derimod et godt eksempel på, at naturforskeren, når han tog udgangspunkt i de matematiske formler, blev fastlåst i ånden og ledt til et "forkert" billede af fænomenerne.

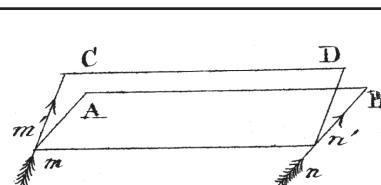
Den mere intuitive og anskueliggørende metode virkede tilsyneladende glimrende for Ørsted selv. Var det måske ikke gennem denne tilgang til videnskaben, at han opdagede elektromagnetismen? I hvert fald er det tydeligt, at han opnåede større indsigt i naturlige fænomener gennem sin egen kombination af spekulation og eksperimentel undersøgelse end ved at udlede nogle matematiske formler. Derfor kunne han også senere i livet, da han havde opnået vigtige resultater vha. sin egen fremgangsmåde, kun opfordre sine studerende til at gå samme vej som han selv. Faktisk opfordrede han sine studerende til at tage supplerende matematikkurser ved siden af studiet af fysik eller kemi, men han kunne bestemt ikke råde nogen til først at blive matematiker for siden at studere naturlæren, fordi

dette pleier at give Anledning til en mærkelig Dunkelhed og Forvirring i Naturanskuelsen: At enkelte Mænd af et særegent Geni, f.Ex. Newton, de Laplace og Gauss, med Held have gaaet denne Vei, beviser naturligvis ikke dens almindelige Tilraadelighed (Ørsted, 1847, s. 1438).

Det var Ørsteds erfaring, at hvis man underviste i naturlæren gennem den matematiske metode ville helheden og harmonien gå tabt for de studerende, som ikke havde en medfødt "udmærket Sands for Naturen." De studerende ville drukne i mangfoldigheder, det partikulære, og ikke se helheden. Med andre ord de ville miste deres intuition (Meyer, 1920, s. clxii).

Tankeeksperimenter versus matematisk bevis

I 1809 publicerede Ørsted første (og eneste) bind af hvad der ellers skulle have været en lærebogstrilogi om *Videnskaben om Naturens almindelige Love* (Ørsted, 1809). Dette første bind indeholder "Bevægelseslæren" eller mekanikken, og det som fremfor alt karakteriserer denne bog er, at Ørsted præsenterede mekanikken næsten uden brug af matematik. I stedet fremsatte han mekanikken eksperimentelt baseret. Til den eksperimentelle begrundelse hørte både hvad han kaldte "materielle Forsøg" og "Tankeeksperimenter." Med tankeeksperimenter mente Ørsted, at "man foretager i Tanken Handlinger for at



Figur 2. Illustration af to vekselvirkende, infinitesimale strømelementer mm' and nn' med vilkårlig retning i rummet. Pilene antyder strømretningen (Ampère og Babinet, 1822, Tabel I).

see, hvad derved frembringes eller deraf følge" (Ørsted, 1854, s. 7). Tankeeksperimenterne passede bedre til naturlærens præsentationsform end de matematiske beviser, syntes han:

Slige forsøg, udførte i Tankerne, ere en Art af matematiske Bevis, som bedre passer sig for Naturlæren, end de efter den sædvanlige Methode [...] Næsten alle mekaniske Forsøg lade sig behandle paa denne Maade, og derfor kan ogsaa Bevægelseslæren behjælpe sig med et langt mindre Antal af materielle Forsøg, end den dynamiske Deel (Ørsted, 1809, s. 72).

Han kunne gøre brug af tankeeksperimenter i tilfælde, hvor der ikke umiddelbart var mulighed for at efterprøve teorien med almindelige eksperimenter. Derudover kunne de fungere som en art hypoteser.

Et par år senere udtalte Ørsted følgende om den tætte forbindelse mellem mekanikken og matematikken:

Mange af Naturlærens fortrinligste Bearbejdere have alt for meget søgt at paatrykke den Matematikens, eller rettere den Euklidiske Geometries Form, hvorved den er bleven betragtet som en anvendt Mathematik. Man berøver derved Videnskaben sin naturlige Form. Matematikeren søger af det mindst mulige Antal af enkelte Grundsandheder at udlede alle sine Sætninger. For den kunstrige Strængighed i Beviserne opoffres alle andre Betragtninger (Ørsted, 1811(1920), s. 173).

Han tilsluttede sig dermed kritikken af den dominerende tendens i tiden til at betragte mekanikken som erkendelsesmæssigt analogt til Euklids geometri, dvs. som et rent aksiomatisk-deduktivt system. Hans indsigelse gik dog ikke så meget på selve den aksiomatisk-deduktive struktur som på tilstedeværelsen af matematiske beviser. Han ville gerne bevare den deduktive struktur i mekanikken, men erstatte de matematiske beviser med tankeeksperimenter og på den måde præsentere mekanikken i sin "naturlige" og "mest passende" form.

Et andet karakteristisk træk ved naturlærens mest passende form, ifølge Ørsted, var det at præsentere na-

turens fænomener i deres "vordende Tilstand." I naturfilosofien blev intet i naturen opfattet som noget statisk, og det skulle naturligvis afspejles i beskrivelsen af ethvert fænomen. Ørsted fremhævede derfor det *Virkssomme* i forklaringen af det pågældende fænomen, hvad enten det drejede sig om et kemisk stof, hårrørvirkningen, eller elektromagnetismen. Pointen var, at i Ørsteds teorikompleks blev det *Virkssomme* forklaret med vekselvirkninger (gerne en "Strid" eller en "Vexelkamp") mellem polære grundkræfter. Denne forklaringsmodel var selv sagt ofte meget kvalitativ og lidet konkret, og hvordan kunne Ørsted dog gøre sig nogen som helst forhåbning om at matematisere den, kunne man fristes til at spørge. Her er det, geometrien kommer ind i billedet. Med henvisning til mekanikken udtalte Ørsted: "Man har noksomt, vel endog for meget, nærmet Naturlæren til Mathematiken: maaske kunde det være Tid at Mathematiken forsøgte at nærme sig Naturlæren" (Ørsted, 1811(1920), s. 174). Med det for øje gjorde Ørsted geometrien emne for et intenst studium i årene 1807–08. Det der drev ham, var hans opfattelse, at:

Man kan ikke ret forstaa en Tings Væren, uden først klart at beskue dens Vorden. Derfor er al Viden Genetisk [sic]. Mathematiken kunde let overalt gaae genetisk frem (Ørsted, 1807–08, "Mathematik," s. 7).

Genetisk geometri

Som med mekanikken ønskede Ørsted at præsentere geometrien i en mere passende, dvs. anskuelig form. Meget abstrakt og måske naivt forestillede han sig, at geometrien på den måde kunne tilnærme sig naturlæren, dvs. at han på den måde kunne skabe enhed mellem geometrien og naturlæren. Ideen var, at:

alle geometriske Sætninger fremstilledes i en Række af Tankeforsøg [...] For Mathematiken selv vilde man derved aabne en langt klarere og mere umiddelbar Indsigt i den egentlige Kilde til enhver Sandhed, og for Naturlæren vilde derved vindes en langt inderligere Sammensmæltning med Mathematiken end den som nogensinde før fandt Sted (Ørsted, 1811(1920), s. 174).

Ørsted skrev i 1807 til sin nære ven Adam Oehlenschläger om sit projekt i geometrien:

Jeg har fundet en ganske ny Maade at behandle Geometrien paa, hvorved den langt inderligere sammenknytter sig med Physiken og tillige vorder langt lettere at fatte. Den forvandler sig ganske til en Bevægelseslære (Ørsted til Oehlenschläger, København, 1. november, 1807, Ørsted, Mathilde, bd. 1, s. 232–233).

"Bevægelseslære" refererer her ikke til mekanikken, men til Ørsteds indførelse af bevægelse i geometrien for på den måde at gøre den "genetisk." Et simpelt eksempel på hvordan denne ide skulle udmønte sig var, at en linie skabes når et punkt bevæges: "det er, gaae fra den ene Deel af Rummet til den anden, med Continuitet, og man seer Linien skabes af Punkter" (Ørsted, 1807–08, "Mathematik," s. 4, se også "Geometrie," s. 10–15). På lignende måde opstår en vinkel når en linie, der dækker en anden linie, begynder at rotere om sit ene endepunkt. En cirkel eller en "Kredsline," som Ørsted kaldte det, tegnes af det ene endepunkt af en linie, som bevæger sig omkring det andet endepunkt (*ibid.*, "Mathematik," s. 7–8).

Ørsted forestillede sig yderligere, at en geometri, der i sig selv var genetisk, måske kunne danne den matematiske model for de "dynamiske" fænomener, der endnu ikke var bragt på tilfredsstillende matematisk form. Det gjaldt de fænomener, der var hovedgenstanden for Ørsteds forskning: varme, lys, elektricitet, magnetisme, galvanisme, og ikke mindst kemien (Ørsted havde endnu ikke opdaget elektromagnetismen).

Ørsted udtrykte sin hensigt om "offentligen [at] forelægge den [sin genetiske geometri] Sagkyndiges Bedømmelse" (Ørsted, 1811(1920), s. 174). "Offentligen" blev det aldrig, men de håndskrevne manuskripter foreligger på det Kongelige Bibliotek (figur 3).² Måske var hans ideer i geometrien på dagsordenen for den "store mathematiske Thee," som Ørsted "gav" i 1812, og hvori deltog matematikkyndige fra det danske rige, bl.a. Christopher Hansteen, August Krejdahl, E.G.F. Thune, og en vis Krumm (Hansteen til Ørsted, Christiania, 30. august, 1814, Har-



ding, 1920, bd. 1, s. 106). Under alle omstændigheder er det sandsynligt, at Ørsted har fået en ikke særlig opmuntrende vurdering af sine ideer af en eller flere sagkyndige, og at det har været medvirkende til, at han valgte ikke at publicere sit geometriske arbejde. Ideen om indførelsen af bevægelse i geometrien tog Hansteen siden op i en elementær lærebog i geometri i 1835 (Piene, 1937, s. 63–65, Hansteen til Ørsted, dato ukendt, 1835, Harding, 1920, bd. 1, s. 164–166).

Som ventet stillede den ældre danske astronom Thomas Bugge sig kritisk overfor Ørstedes ideer i geometrien: "Vel hører man nogle unge og varme Hoveder tale om nye Metoder, nye Udsigter, nye Anskuelser af Mathematik" (Bugge, 1814, bd. 2, s. vi). Bugge og Ørsted havde været ærkefjender helt fra starten af Ørstedes karriere, uden at det præcist står klart hvorfor. Hansteen var bekendt med det forhold og bemærkede i 1815 i et brev til Ørsted: "Den gamle giftige Knecht vilde saa gjerne give Dem et Puf, naar han kunde komme til" (Hansteen til Ørsted, Christiania, 2. april, 1815, Harding, 1920, bd. 1, s. 108–109). Det er sandsynligt, at deres uoverensstemmelser bundede i Ørstedes forkærlighed for naturfilosofien og Bugges modstand mod dens indflydelse i naturvidenskaben. I hvert fald afviste Bugge pure Ørstedes ide om at "af-Euklidisere" geometrien.

Konklusion

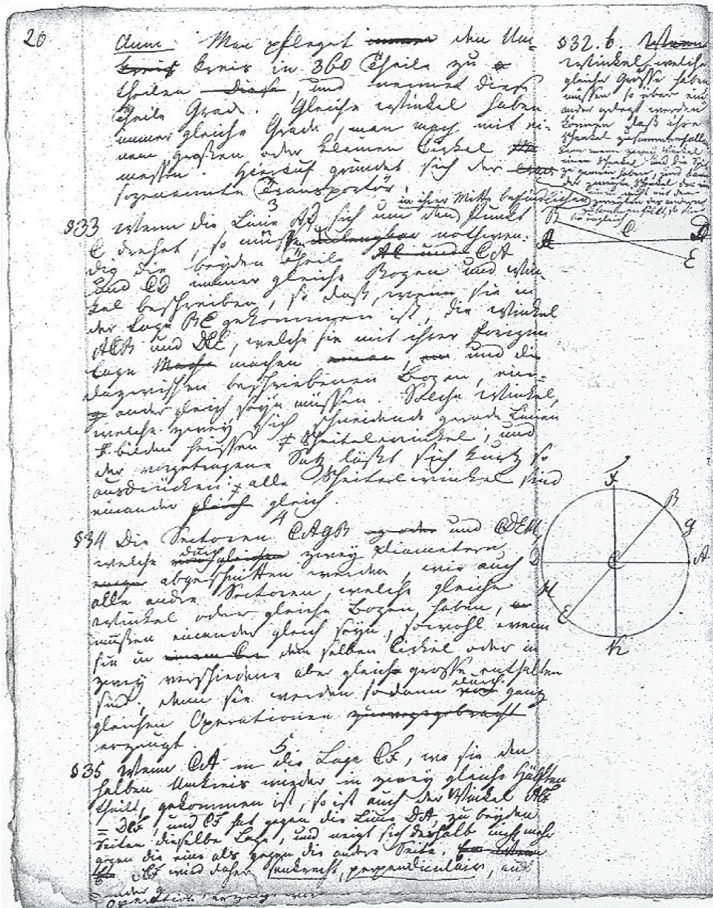
Ikke overraskende påvirkede indflydelsen fra naturfilosofien også Ørstedes syn på matematikken. Imidlertid betød det ikke, at Ørsted fuldstændigt afviste brugen af matematisk beskrivelse i naturlæren, som man måske skulle tro. Han anerkendte fuldt ud, at en matematisk model kan være befordrende for en teori. Kun var han ikke tilfreds med mulighederne indenfor den eksisterende matematik og måden den blev brugt på, når det gjaldt beskrivelsen af nye opdagelser indenfor hans eget forskningsområde, det han kaldte dynamikken, og som bestod af kemi, magnetisme, elektricitet, galvanisme, varme, og lys. Han opfattede det som risikabelt at tage udgangspunkt i den eksisterende matematik ved forklaringen af en ny opdagelse inden for dette område af naturlæren, fordi den

Figur 3.
Gengivelse af en side fra Ørstedes geometri-manuskripter (Ørsted, 1807–08, "Die Geometrie," s. 20).

fremgangsmåde kunne fastslåse ånden og lede til fejlagtig forståelse af det pågældende fænomen. Fremfor at forsøge at påtvinge de nye genstandsområder de eksisterende matematiske modeller, mente han, at man hellere skulle forsøge at ændre matematikken, således at den på tilfredsstillende måde kunne afbilde tingene i deres "vordende Tilstand." Det var det, han selv forsøgte med sin genetiske fremstilling af geometrien, et projekt der dog strandede før det rigtig materialiserede sig.

Litteratur

- Ampère, André-Marie, og Babinet, Jacques 1822: *Darstellung der neuen Entdeckungen über die Electricität und den Magnetismus von Oerstedt, Arago, Ampère, H. Davy, Biot, Erman, Schweigger, de la Rive u.s.w.*, Leipzig: Leopold Voss.
- Bugge, Thomas 1813–14: *De første Grunde til den rene eller abstrakte Mathematik*, 2. udg., 3 bd., København: Simon Poulsen.
- Harding, M. C., red. 1920: *Correspondance de H. C. Ørsted avec divers Savants*, 2 bd., København: Aschehoug.
- Meyer, Kirstine 1920: "H.C. Ørstedes Arbejdsliv i det Danske Samfund," i (Meyer, red., 1920, bd. III, s. ix–clxvi).
- Meyer, Kirstine, red. 1920: *H. C. Ørsted: Naturvidenskabelige Skrifter*, 3 bd., København: Høst & Søn.
- Pedersen, Olaf 1987: "Det længere perspektiv," i Billeskov Jansen, F. J., Snorrason, Egill, og Lauritz-Jensen, Chr., red., *Hans Christian Ørsted, IFV-energi i/s (Isefjordværket)*, s. 142–166.
- Piene, Kay 1937: "Matematikkens stilling i den høiere skole i Norge efter 1800,"



Norsk Matematisk Tidsskrift, 19: 52–68.

Ørsted, Hans Christian 1807–1808: manuskripter "Geometrie," "Mathematik," og "Die Geometrie," i pakken Geometri, Ørsted 28 Fol., Det Kongelige Bibliotek.

1809: *Videnskaben om Naturens almindelige Love I*, Kjøbenhavn: Brummer.

1811(1920): "Første Indledning til den almindelige Naturlære," (Meyer, 1920, bd. 3, s. 151–190).

1830(1920): "Thermo-Electricity," (Meyer, red., 1920, bd. II, s. 351–98). Oprindeligt publiceret i *The Edinburgh Encyclopædia*, Brewster, David, ed., LL.D., bd. 18, s. 573 89. Edinburgh.

1847: *Fædrelandet*, N. 180, s. 1435–1439.

1854: *Naturlærens mekaniske Deel*, 2. udg., C. Holtén, red., Kjøbenhavn: Reitzel.

Ørsted, Mathilde, red. 1870: *Breve fra og til Hans Christian Ørsted*, 2 bd., Kjøbenhavn: Lind.

Noter:

¹ Nærværende artikel bygger på et conferencebidrag, der publiceres i foråret 2003.

² Manuskripterne er blevet transskriberet af Kate Larsen med støtte fra projektet Dansk Videnskabs Historie (DVH), se <http://www.ivh.au.dk/dvh/dvh.dk.html>.

Fra mørsere og muddermaskiner til "Den Mægtige"

Henrik Kragh Sørensen
Institut for Videnskabshistorie,
Århus Universitet
ivhhks@ivh.au.dk



"De foresatte og curieuse og vanskelige Spørgsmål at resolve, og uddeele Belønninger til dem som ere lykkelige i at løse Knuderne."

Holberg, citeret fra Lomholt 1942-1973, III, 450.

Indledning

I 1768 — omtrent et kvart århundrede efter sin grundlæggelse — begyndte *Det kongelige danske videnskabernes Selskab* at udskrive prisopgaver til besvarelse og bedømmelse indenfor fagene historie, fysik og matematik. I 1793 blev *Videnskabernes Selskab* opdelt i klasser, hvorefter prisopgaverne blev et anliggende for hver enkelt klasse, og i slutningen af 1700-tallet udvidedes antallet af prisopgaver med en filosofisk opgave og to privatsponsorerede, praktisk orienterede opgaver. Med denne artikel vil jeg kort beskrive aspekter af formålene, indholdet og virkningen af prisopgaverne indenfor matematik fra de første opgaver i 1768 til den matematiske klasses sammenlægning med den fysiske klasse knap hundrede år senere. Jeg har udvalgt tre prisopgaver stillet i prisopgavernes guldalder i starten af 1800-tallet til at illustrere nogle centrale aspekter af matematikkens udvikling.

I den omtalte periode var opfattelsen og indholdet af matematikken i Danmark noget anderledes end vi er vant til i dag. På universitetet var matematik primært et undervisningsfag for alle studerende på første studieår (til den såkaldte andeneksamen), og forskning spillede en meget tilbagetrukket rolle. Indholdsmæssigt var matematikken mere omfattende end det senere blev tilfældet, og begge

disse forhold havde betydning for prisopgaverne i matematik. Matematik fandtes også repræsenteret andre steder i uddannelsessystemet, f.x. i latinskolen og på de militære akademier, og både den åndsudviklende og den mere faktuelle matematiske dannelse var dyder, som med forskellig vægt skulle udvikles hos de studerende — primært gennem kendskab til den euklidiske tradition som udstukket i *Elementerne*. Det er i denne lidt brogede sammenhæng, at prisopgaverne fra *Videnskabernes Selskab* skal passes ind.

Prisopgaverne som institution

Prisopgaverne i *Videnskabernes Selskab* var langt fra en enestående konstruktion — nærmest tværtimod. Mange lærde selskaber i Europa indførte i 1700-tallet forskellige, til dels konkurrerende prisopgaver, således blandt andet i Paris (1714) og Berlin (1744). Formålene med prisopgaverne var dels at promovere selskaberne og deres protektorer og dels at stimulere løsningen af presserende problemer, både praktiske og teoretiske.

Prisopgaverne i *Videnskabernes Selskab* blev indført, efter at Christian VII i 1767 afsatte renterne af 8000 rigsdaler til udsættelse af tre årlige præmier for de bedste besvarelser indenfor historie, fysik og matematik. Formålet var at fremme kontakten med lærde udenfor *Selskabets* egne rækker og derved promovere *Selskabets* aktiviteter nationalt og internationalt. Derfor blev prisopgaverne annonceret i en række udenlandske tidsskrifter. *Selskabets* medlemmer brugte — under sekretærenes overvågning — stor energi i at udtænke prisspørgsmålene og bedømme de indkomne besvarelser, og prisopgaverne opnåede at blive en vigtig del af *Selskabets* virksomhed.

I 1769 — året efter udsættelsen af den første opgave — besluttede *Selskabet* sig så for designet af den guldmedalje, som skulle tildeles vinderne af priskonkurrencerne (se figur 1). Imidlertid faldt bestræbelserne sammen med den turbulente periode under Struensees regering og fald, og man fik derfor ikke præget de første medaljer før et par år senere, hvorfor de første vindere måtte nøjes med

*Forskningen bag denne artikel er udført i efteråret 2002 og finansieret af DVH-projektet: Dansk Videnskabshistorie. DVH-projektet har basis ved Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet og skal — på grundlag af en bevilling fra Carlsbergfondet — blandt andet producere et firebindsværk om (natur)videnskaberne i Danmark fra vikingetiden til 1970. For yderligere information, se www.ivh.au.dk/dvh.

Forfatteren ønsker at takke Anita Kildebæk Nielsen og Kirsti Andersen for gode ideer og kommentarer under arbejdet med denne artikel. En tak skal også rettes til personalet ved *Det kongelige danske videnskabernes Selskab* for deres hjælpsomhed og åbne modtagelse under mine besøg i arkivet.





Figur 1: Prismedaljen fra *Videnskabskabernes Selskab* 1769. Reproduceret fra (Lomholt 1942–1973, I, 67). Portrætsiden viser den laurbærkronede Christian VII, mens reversen viser Den hidkaldte Sandhed i form af en kvinde med en laurbærkrans og en tubus.

medaljens værdi i rede penge.

Arbejdsgangen bag udskrivelsen af prisopgaverne var, at sekretæren indkaldte forslag, som så diskuteredes før en beslutning blev taget. Således kan de stillede prisopgaver i matematik benyttes som en historisk indfaldsvinkel til at undersøge, hvad der rørte sig og blev efterspurgt i det københavnske matematikmiljø.

Prisopgaverne blev — efter en turbulent start — udstedt rimelig regelmæssigt. I starten blev der nogle år udskrevet flere opgaver, hvorfor der kompenseredes ved at undlade at udskrive opgaver andre år. Efter 1800 blev prisopgaveaktiviteten mere struktureret, og de eneste år uden en matematisk prisopgave var katastrofeåret 1814, 1824 og endelig 1838, hvor der slet ingen prisopgaver blev stillet. Der indkom besvarelser både fra ind- og udland, og værdige besvarelser blev belønnet med guldmedaljen. Hvis der ingen besvarelser indkom, som var værdige til belønning, benyttede *Selskabet* af og til at genudskrive opgaven. I perioden 1768 til 1866 uddeltes ialt 20 guldmedaljer for matematiske opgaver, heraf langt hovedparten i det 18. århundrede. Interessen for at besvare prisspørgsmålene var — især blandt det internationale publikum — kraftigt aftagende i det 19. århundrede i takt med, at nye medier som f.x. de første egentlige fagtidsskrifter øgede mulighederne for hurtig kommunikation og publikation af ny viden. Men den aftagende interesse i den matematiske klasse kan også hænge sammen med det skift i opgavernes indhold, som kan spores.

Et overblik over prisopgaverne i matematik

Prisopgaverne i matematik omfattede en mangfoldighed af emner, både astronomiske, ‘rene’, ‘anvendte’, ‘praktiske’ og filosofiske. Imidlertid var skellet mellem ren, anvendt (i den polytekniske forstand som matematiseret

fysik) og praktisk matematik ikke udtalt i *Videnskabskabernes Selskab*, så det beror på en rekonstruktion at skelne mellem disse kategorier. Til den praktiske kategori henregner jeg f.x. opgaverne om “den bedste indretning af mørsere [mortere]” (1772) eller “muddermaskinen til oprensning af ferske søer” (1773), men også andre samfundstjenlige opgaver som spørgsmålet “om kanoners mest hensigtsmæssige kalibre” (1785). Disse opgavetyper var som nævnt ikke ualmindelige opgaver for et kongeligt akademi, men i *Videnskabskabernes Selskab* forsvandt de omkring år 1800 — til dels i forbindelse med oprettelsen af de privat-indstiftede priser. En vis reorientering kan eksemplificeres med opgaven “om den bane, som et cylindrisk legeme såsom en congrvisk ild-raket, beskriver” (1809), som er noget mere ‘rent matematisk’ end de ovenfor nævnte mere ‘praktiske’ opgaver, selvom en forventet samfundsnytte også her var tydelig.

En anden stor del af de stillede opgaver omhandlede astronomiske emner, som stadig blev betragtet som en matematisk disciplin. De astronomiske opgaver var tilbagevendende, selvom også de antog en mindre synlig plads, efterhånden som den ‘rene’ matematik trådte tydeligere i karakter. Foruden de astronomiske opgaver udstedtes spørgsmål indenfor et felt, som vi kan betegne som ‘matematisk fysik’. Den gruppe af opgaver, som jeg især vil fokusere på i denne sammenhæng, er de ‘rene’ matematikopgaver, og jeg har udvalgt tre prisopgaver fra det 19. århundredes andet årti som illustration af to centrale aspekter, nemlig “hvad var et spørgsmål?” og “hvilke internationale forbindelser og inspirationskilder havde matematikerne i København?”.

Hvad var et spørgsmål? Og hvad udgjorde et svar?

Når man beskæftiger sig med en historisk periode er det blandt meget andet vigtigt at undersøge og forstå, hvad der udgjorde og karakteriserede ‘problemer’ og ‘spørgsmål’ for datidens matematikere. Et interessant indblik i dette kan man få ved at studere prisopgaven for 1812. Til denne opgave, som var blevet foreslået af major J. H. Steffens (1772–1815), efterspurgtes en “summationsformel for følgende række

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \text{etc.} \dots$$

eller med et almindeligt udtryk

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{1}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \text{etc.} \dots \quad (1)$$

eller i det mindste en undersøgelse af, hvorvidt “der kunne gøres antagender”. En simpel manipulation på (1) viser, at

den er ækvivalent med

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(b+2nd)(b+(2n+1)d)} = \frac{a}{d^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{b}{d} + s} = \frac{a}{d^2} \beta\left(\frac{b}{d}\right),$$

så man havde med andre ord efterspøgt en summationsformel for det, der senere blev kendt som β -funktionen, som man i et stykke tid havde betragtet som et interessant objekt.

På denne prisopgave indløb et rekordstort antal besvarelser, nemlig 13, og der blev uddelt en guldmedalje til den retsvidenskabelige professor H. E. S. von Schrader (1779–1860) fra Tübingen. Schrader blev belønnet fordi hans “metoders nyhed og udførelsens skarpsindighed fortjente fortrinet” frem for de andre indkomne besvarelser. I 1818 blev hans besvarelse trykt i Weimar, og den opnåede en vis cirkulation i det internationale miljø.

Og hvad var det så, Schrader leverede, der var både nyt og skarpsindigt? Schrader havde — igennem længere manipulationer, mange tilfælde og 54 sider tætbeskrevet latin — givet et i hvert fald delvist svar på prisspørgsmålet i form af en formel bestående af inverse trigonometriske og logaritmiske funktioner, som under visse betingelser udtrykte β -funktionen. Schraders integration var baseret på Eulers undersøgelser af integraler af formen

$$\int \frac{x^{b-1} dx}{1-x^{2d}}.$$

Men endvidere brugte Schrader — ligesom de andre besvarere — også en del plads og kræfter på at udregne numeriske værdier, hvilket altså udgjorde en del af indholdet af en ‘besvarelse’. Dette antyder en vigtig ting omkring problemer og svar i begyndelsen af 1800-tallet, som også kan ses ved et af periodens andre varme emner, nemlig elliptiske integraler: Matematisk problemløsning handlede (endnu) ikke om at bevise generelle sætninger; man behandlede derimod ofte partikulære objekter, som man søgte at få ‘kendskab’ til — og med til kendskabet hørte reduktion til i forvejen kendte objekter, alternative repræsentationer og numeriske beregninger.

International inspiration: Forbindelsen til Gauss

Prisopgaven for 1817 viser både lighedspunkter og store forskelle fra opgaven for 1812. I 1817 efterspurgte *Videnskabernes Selskab* bestemmelsen af “den fælles grænse, hvorimod de to følger

$$a' = \frac{ma+nb}{m+n}, \quad b' = \sqrt[m+n]{a^m b^n};$$

$$a'', b''; \quad a''', b''' \quad \text{o.s.fr.} \quad (2)$$

nærmer sig, når de fortsættes i det uendelige.” Igen søgte man altså en grænse i form af et lukket udtryk for et analytisk objekt givet i form af en uendelig proces. I modsætning til 1812-opgaven indkom der kun en enkelt besvarelse, som endda ifølge protokollen “fandtes aldeles utilfredsstillende” (når man ser besvarelsen, som stadig findes i arkivet, forstår man godt vurderingen, for besvarelsen består egentlig blot af nogle enkle numeriske eksempler). Det er dermed ikke selve besvarelsen, som er interessant i denne forbindelse, men derimod baggrunden for, at *Videnskabernes Selskab* udskrev den omtalte prisopgave.

Aritmetisk-geometriske middelværdier — svarende til $(m,n) = (1,1)$ i (2) — var et område af matematikken, som C. F. Gauss (1777–1855) opdyrkede i begyndelsen af 1800-tallet, og som ledte Gauss ind på studiet af de nævnte elliptiske integraler. Bevidstheden om Gauss’ interesse var — på forskellig og forunderlig vis — nået til København. I et brev til Gauss berettede den danske astronom og geodæt H. C. Schumacher (1780–1850), som stod i nær brevvæksling med Gauss således, hvordan den ene af matematik-professorerne i København, C. F. Degen (1766–1825), havde fortalt ham om aritmetisk-geometriske middeltal, som var forskellige fra Gauss’. Gauss’ reaktion var prompte og skarp; han mindede Schumacher om, at denne havde fået lov at se Gauss’ undersøgelser og resultater indenfor netop dette emne. Endvidere påpegede Gauss, at Degens middelværdier, som Schumacher altså troede var nye, netop var præcist sammenfaldende med Gauss’ egne. Dermed tog Gauss luften af Degens (og Schumachers) undersøgelser om dette emne, og Gauss undlod heller ikke at nævne, hvor langt længere han selv var nået. Derefter havde ingen af danskerne lyst (eller mod) til at indgå i en kappestrid med “Den Mægtige”, som Gauss blev benævnt i København. I stedet bad Schumacher Gauss om at gøre sine undersøgelser tilgængelige, og det er i denne sammenhæng, prisopgaven kommer ind i billedet. Ikke kun i dette tilfælde, men også i forbindelse med prisopgaven for 1816 om “fremstilling af interpolationsteorien” var der en åbenlys kandidat i sigte, nemlig Gauss. Dermed kom prisopgaverne til at tjene et nyt formål, nemlig at lempe resultater op af Gauss’ dybe skuffer; i ingen af tilfældene lykkedes det dog. Kontakten bevirkede dog, at viden om aritmetisk-geometriske middeltal og elliptiske funktioner bredte sig til København, hvorfra den senere nåede den norske matematiker Niels Henrik Abel (1802–1829), som vidste at gøre god brug af den.

I modsætning til de fejlslagne forsøg i 1816 og 1817 på at fravriste Gauss resultater af almen interesse, havde *Videnskabernes Selskab* mere held med sig i forbindelse med prisen for 1820 — men da havde det også fået hjælp udefra. I 1816 udvekslede Gauss og Schumacher ideer til prisopgaver, og Gauss havde stillet forslaget “generelt at projicere (afbilde) en given flade på en (given) anden [flade], således at billedet er ligedannet med originalen i



de mindste dele”. Dette emne var, ifølge Gauss, bl.a. interessant i geodætiske sammenhænge hvis den ene flade var en kugle, men Gauss ønskede netop spørgsmålet behandlet generelt. Gauss’ forslag blev stillet som *Videnskabernes Selskabs* prisopgave i matematik for 1820, samme år som Gauss var blevet gjort til udenlandsk medlem. Da der ingen besvarelser var indløbet ved fristens udløb, forlængedes fristen med yderligere et år, og Schumacher lagde pres på Gauss for at sikre i det mindste en besvarelse af opgaven. Schumachers egen prestige stod på spil, og Gauss honorerede opfordringen, indsendte sin besvarelse og blev belønnet med en guldmedalje (som han senere fik ombyttet i kontanter, hvilket han — med henvisning til konens sygdom og de deraf affødte ekstra omkostninger — åbenbart manglede mere end en medalje).

I prisopgaven undersøgte Gauss betingelserne for konforme afbildninger, som han senere udviklede og udviklede i sin *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. I prisbesvarelsen lod Gauss (x, y, z) betegne koordinaterne på et punkt på den ene givne flade. Han antog så, at disse kunne udtrykkes som funktioner af to variable (t, u) ; $(x, y, z) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$. For den anden givne flade indførte han i analogi hermed $(X, Y, Z) = (X(T, U), Y(T, U), Z(T, U))$. Dernæst hævdede Gauss, at det at afbilde den ene givne flade på den anden givne flade betød at udtrykke (T, U) som en funktion af (t, u) , og gennem en “analytisk” undersøgelse fandt han ud af hvad det vil sige, at billedet er “ligedannet i de mindste dele” med originalen. Han fandt som sit hovedresultat deraf, at med betegnelserne

$$\begin{aligned} dx &= a dt + a' du, & dX &= A dT + A' dU, \\ dy &= b dt + b' du, & dY &= B dT + B' dU, \\ dz &= c dt + c' du & dZ &= C dT + C' dU \end{aligned}$$

skulle

$$\begin{aligned} \frac{aa + bb + cc}{AA + BB + CC} &= \frac{aa' + bb' + cc'}{AA' + BB' + CC'} \\ &= \frac{a'a' + b'b' + c'c'}{A'A' + B'B' + C'C'}, \end{aligned}$$

hvilket var Gauss’ måde at udtrykke, at fundamentalformerne var proportionale. Hvis denne betingelse var opfyldt ville, hævdede Gauss, samhörørende vinkler være ens og længder proportionale på de to flader. Derefter bestod resten af afhandlingen af undersøgelser af forskellige hypoteser omkring fladerne. Selvom opgavebesvarelsen fra 1822 (som blev publiceret 1825 i Schumachers *Astronomische Abhandlungen*) således indeholdt Gauss’ første fundamentalform og betingelserne derpå, er præsentationen ikke nær så generel, som Gauss skulle give den i sit differential-geometriske mesterværk *Disquisitiones generales*.

Konklusioner

Gennem udskrivelsen af årlige prisopgaver både påvirkede og afspejlede *Videnskabernes Selskab* matematikens stilling og udvikling, som den blev opfattet fra periferien af det europæiske matematiske miljø, som siden slutningen af 1700-tallet primært havde centrum i Frankrig. Generelt afspejlede opgaverne matematikkens mange forskellige roller som praktisk og anvendelig videnskab, men også de mere ‘rene’ opgaver kan fortælle mange historier.

For det første har diskussionen omkring prisopgaverne for 1812 og 1817 antydnet, hvordan opfattelserne af ‘et spørgsmål’ og ‘et svar’ afspejlede den opfattelse af matematik som værende baseret på manipulationer af formler, som var fremherskende omkring 1800. Matematik — som i denne sammenhæng betyder analyse, da der næsten ingen prisopgaver blev stillet i geometri — handlede om funktioner, funktioner var givet ved opskrifter (af en eller anden form), og viden om funktioner bestod i at manipulere dem for at nå frem til kendte og trygge objekter, eventuelt ved numeriske beregninger.

For det andet har omtalen af Gauss’ rolle i forbindelse med prisopgaverne afdækket nogle af de indre mekanismer og kommunikationer, som formede de danske matematikeres viden om disciplinens internationale udvikling. De danske matematikere prioriterede ikke internationalt orienteret forskning højt. Men især gennem Schumacher havde de en indgangsvinkel til den store Gauss i Göttingen, og det benyttede man sig af. I tredje forsøg lykkedes det endelig at interessere Gauss i de danske prisopgaver, for hvilke han blev tilkendt en guldmedalje, der egentlig var til ligeså stor ære for *Videnskabernes Selskab* som for Gauss.

Som det endelig også fremgår af prisopgaverne, så var matematik i perioden 1760–1860 en mere blandet størrelse, end vi er blevet vant til. Først i de efterfølgende tiår gennemgik den matematiske videnskab en egentlig professionalisering, hvor det blandt andet for alvor blev vigtigt for selvforståelsen at adskille den ‘rene’ matematik fra forskellige grader af ‘anvendt’ eller ‘praktisk’ matematik. Prisopgaverne afspejler denne gradvise udvikling, som samtidig hænger sammen med, hvad der kan betragtes som et godt svar på et matematisk problem. Den formel- og regningstunge matematik, som bestod af direkte manipulationer af udtryk, og som også er illustreret i de valgte eksempler, gav langsomt plads for en mere bevis- og begrebsbaseret matematik, hvor højere abstraktioner og generalitet blev uomgængelige krav.

Litteratur

Abel, N. H.: *Breve₂*, Breve om Abel, i E. Holst, C. Størmer og L. Sylow (red.), *Festskrift ved Hundredearsjubilæet for Niels Henrik Abels Fødsel*, 1902, Jacob Dybwad, Kristiania.

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Naturvidenskabelige og Mathematiske Afhandlinger. Første Deel.: 1824, Hartv. Frid. Popps Bogtrykkerie, Kiöbenhavn.

Gauss, C. F. og Schumacher, H. C.: 1860, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, Gustav Esch, Altona. 5 bind.

Gauss, C. F.: 1825, Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, *Carl Friedrich Gauss Werke*, bind 4, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, s. 189–216. Først offentliggjort: *Astronomische Abhandlungen*, Altona 1825.

Gauss, C. F.: 1828, Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Carl Friedrich Gauss Werke*, bind 4, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, s. 217–258. Præsenteret i *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften*, Göttingen den 6. oktober 1827. Først offentliggjort i *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, bind VI, 1828.

Lomholt, A.: 1942–1973, *Det kongelige danske videnskabernes Selskab 1742–1942. Samlinger til Selskabets historie*, Ejnar Munksgaard, København. 5 bind.

Molbech, C.: 1843, *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Historie i dets første Aarhundrede 1742–1842. Udarbejdet efter Kilderne*, Jens Høstrup Schultz, København.

Pedersen, O.: 1992, *Lovers of Learning. A History of the Royal Danish Academy of Sciences and Letters 1742–1992*, Munksgaard, Copenhagen.

fort. fra s. 42

ninger kan man lade eleverne erfare sig til eller postulere. Hjelmslev går endda så vidt, at han vil skrive geometrien om til den såkaldte "Virkelighedsgeometri": Alle konstruktioner foretages op til en vis måleuøagtighed, og linier er desuden endelige. F.eks. kan man udmærket tredele vinkler: Man prøver sig frem pr. øjemål - ramte man ikke rigtigt i første omgang, retter man passeren lidt til og prøver igen indtil det ser rigtigt ud. En kugle og en tangerende plan har således en cirkelskive til fælles, hvilket man kan overbevise sig om ved at smøre sod på en kugle og lægge den på et stykke papir! Hjelmslevs bøger slog ikke an i folkeskolen - der er også problemer med, at sætninger skal tages med et gran salt: F.eks. ligger tre punkter, der ligger på linie

sædvanligvis ikke på en fælles cirkel - så måske er det ikke den slags projekter, man bør lægge kræfter i, men læs alligevel H.C.'s bog. Det kan være, vi, der ikke har vores daglige gang i folkeskolen, bliver mere troværdige i debatten, hvis vi kender mere til, hvad den historiske erfaring har været med folkets skole.

Som sagt ovenfor, behandler H.C. mange andre emner, og der er mange interessante vinkler på matematikundervisning og matematikopfattelse: Uddrag fra diverse regnebogssystemer, opgaver brugt ved evaluering af elever fra forskellige skoler og områder i landet, læseplaner, og meget andet. Og alt er kommenteret og sat ind i en sammenhæng. Mit lille uddrag ovenfor er således ment som en appetitvækker, og selv den, hvis appetit ikke er vakt efter det, kan finde andre godbidder i bogen.

Bogen kan frit downloades fra

<http://www.dcn.auc.dk/Research/Prisopgaver/papers.htm>



Matematiske institutioner præsenterer sig:



IMFUFA, RUC

Lidt historisk

Matematik og fysik på RUC er samlet i et institut og lever sammen i et ægteskab båret af såvel kærlighed som fornuft. Der er ingen formel afdelingsstruktur, de to medarbejdergrupper styrer deres interne anliggender kollegialt (endnu da!). En stor del af undervisningen vedrører den naturvidenskabelige basisuddannelse, som varetages i fællesskab. Herudover varetager de hver sin overbygningsuddannelse. De to fag deler også overordnet det synspunkt at både undervisning og forskning samlet set skal reflektere fagenes forbindelser med omverdenen. Heraf instituttets navn, i akronym IMFUFA, i fuld udstrækning: *Institut for Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelse*.

Kærligheden er båret af fagenes naturlige gensidige tiltrækning og en fælles indstilling til forsknings- og undervisningsfilosofiske/politiske spørgsmål. Fornuften er kommet til udtryk i en fælles bestræbelse på at opretholdelse fagenes integritet i et tværfagligt kraftfelt, hvor det er godt at have loyale og indforståede alliancepartnere.

Lidt strukturelt.

Instituttet er oprettet i 1978 og er derfor blandt de yngre af de danske universitetsinstitutter for matematik. Så der forestår et jubilæum, der kan blive ekstra festligt fordi det vil finde sted i en netop til den tid nyindviet bygning, tegnet af Henning Larsen.

Inden denne formentlig endelige løsning har instituttet ladet sig huse forskellige steder, nødvendiggjort af at være en del af et universitet i opvækst. Vi glæder os til at komme til at bo et mere blivende sted som vi selv har været med til at indrette efter vores behov.

Det er ikke kun bygningsmæssigt at IMFUFA er indpasset i RUC som et samlet hele. Matematikuddannelsen blev planlagt i et samarbejde mellem RUCs matematikere og repræsentanter for aftagerne, først og fremmest gymnasier og seminarier, da det oprindeligt var meningen at uddanne også folkeskolelærere. Det var indbygget i disse planer at en række på det tidspunkt nye principper skulle tilgodeses: Praksisorientering, tværfaglighed og problemorientering. En række fornyelser i undervisningsformen blev også direkte bygget ind i bekendtgørelsen: problemorienteret projektarbejde i grupper med høj grad af deltagerstyring i både valg af emne og arbejdstilrettelæggelse. En fast og lige fordeling mellem projektarbejde og emne/disciplin-arbejde (som regel i kursusform) har været gældende fra starten med de obligatoriske emner fastsat i bekendtgørelser og studieordninger. For projektarbejdet er der også fastlagt nogle overordnede rammer, som sikrer at væsentlige perspektiver på matematikken dækkes:

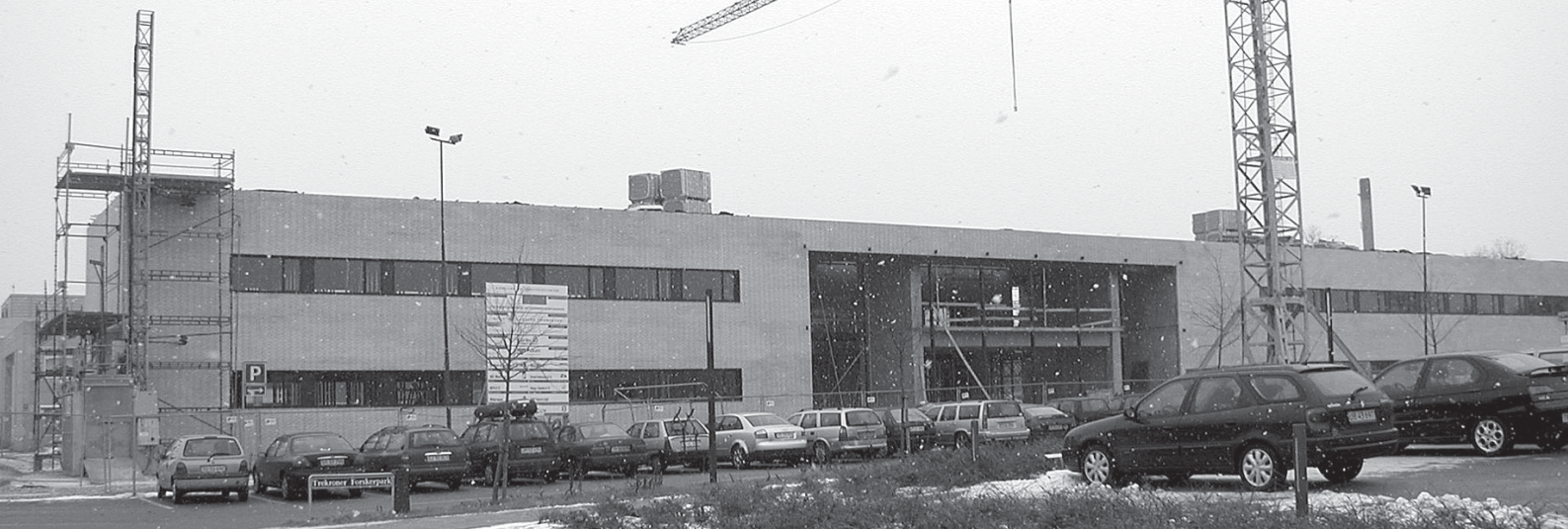
- fagets videnskabelige status, studeret ved historiske – filosofiske -videnskabsteoretiske tilgange
- matematisk modellering
- praksisrelateret specialisering



Af: Anders Madsen,
IMFUFA, RUC
email: am@mmf.ruc.dk

Det indtil her beskrevne er matematikuddannelsens overbygning. Den samlede kandidatuddannelse indeholder også den 2-årige naturvidenskabelige basisuddannelse og et andet fag, som er sideordnet med matematikdelen. Der er tale om en kombinationsuddannelse uden hoved- og bifag af en samlet længde på 5 år.

Basisuddannelsen er en vigtig brik i uddannelsen, idet den giver et bredt perspektiv på naturvidenskaberne som udgangspunkt for forståelse af matematikkens rolle i anvendelser og formidling. Der er stor valgfrihed og mange tilbud med matematiktilknytning, herunder en hel del matematikkurser også indrettet til andre studerende end dem som vælger matematik som overbygning. Dem der så vælger matematik udnytter i meget høj grad mulighederne for at give



Nybygning: Henning Larsen har tegnet den nye bygning

basisuddannelsen et så matematikrelevant indhold som muligt. Den tjener også til at introducere de nødvendige arbejdsformer. Basisuddannelsen er i sig selv vigtig for rekrutteringen til matematikoverbygningen, dels fordi aspiranter kan få et rimeligt billede af, om det nu også er noget for dem, men først og fremmest fordi det lykkes at rekruttere en hel del, som ikke i forvejen har haft planer om at vælge matematik. Den samlede rekruttering til basisuddannelsen er for øjeblikket utilfredsstillende, i overensstemmelse med tendenser på landsplan, men den del som matematikoverbygningen modtager er forholdsmæssigt tilfredsstillende, faktisk procentuelt voksende.

De formelle rammer for denne struktur har holdt sig stort set uændret siden starten. Nogle mindre revisioner har haft forbindelse med at ændre sigtet fra formelt at være en gymnasielæreruddannelse til at være bredere, så andre formidlingsprofessioner bliver inddraget, sammen med modelleringsfunktioner og funktioner med intern faglighed som det væsentligste. Dette bredere sigte understøttes af at der er mange andre fag som det er muligt (og nødvendigt) at kombinere med. De forskellige sigter kommer formelt til udtryk i, at den praksisrelaterede specialisering nu forekommer i tre hovedvarianter:

- Didaktik/formidling
- Modellerung
- Matematisk forskning.

Matematikoverbygningen er som allerede nævnt ligeligt fordelt på projektarbejde og emner. Dette administreres med tre projekter, et til hver

af de ovenfor oplyste perspektiver og syv emnekredse som i overvejen- de omfang indhøstes ved deltagelse i kurser og seminarer. Hertil kommer som nævnt matematikprojekter og en hel del matematikkurser på basisuddannelsen.

Jeg har beskrevet detaljer i uddannelsens opbygning fordi den er væsentlig for forståelse af mange forhold i instituttets opbygning og fordi den er forskellig fra den ellers udbredte model i Danmark, såvel indholdsmæssigt som strukturelt, det sidste ved at være opbygget af en basisuddannelse og to sideordnede overbygningsskole.

Forskningsprofil

Forskningen har også fra starten været præget/inspireret af at den skulle være relevant for de særlige krav til uddannelsen. Det er interessant at følge hvordan den øjeblikkelige forskningssituation har udviklet sig fra starten, hvor den var spredt og søgende, til nu hvor den har fundet sin egen klare profil. Denne udviklingshistorie er også betydningsfuld for at forstå denne profil. Men her er ikke den rette lejlighed til at gå i detaljer. Fra en eksperimenterende start har der efterhånden udviklet sig et mønster med visse aktiviteter der er centrale i den forstand at en gruppe af medarbejdere arbejder sammen om dem og har gjort det i en længere periode:

- Matematisk modellering af biologiske systemer.
- Matematikkens didaktik
- Dynamiske systemer.

Dertil kommer en række individuelle aktiviteter, hvor samarbejdspartnerne findes eksternt.

Mange af forskningsaktiviteterne har substantielle relationer til miljøer uden for instituttet som ikke selv har matematisk forskning som deres centrale beskæftigelse. En del af projekterne inden for modellering af biologiske systemer – nemlig modellering af blodkredsløb og nerveimpulser – har eksempelvis taget udgangspunkt i i et samarbejde med egentlige rekvirenter og har også bidraget med løsninger på rekvirenternes behov, frembringelsen af en anæstesisimulator til uddannelsesbrug på hospitalerne. Denne gruppe spiller endvidere en fremtrædende rolle i den internationale udvikling af dette felt og har eksempelvis produceret en antologi som beskriver State of the Art på området og har arrangeret flere internationale konferencer herom på IM-FUFA. Andre aktiviteter – modellering af epidemier – er mest af teoretisk, herunder modelteoretisk, karakter, udført i samarbejde med genetiske og epidemiologiske institutioner i indland og udland.

Matematikens didaktik er én af instituttets første forskningsstrategiske satsninger. Man kan nok sige at instituttet har haft en førende rolle i udviklingen af feltet i DK. Også aktiviteter inden for matematikkens didaktik har af gode grunde forbindelse uden for matematisk forskning og matematiske miljøer i snæver forstand. Institutet rummede i otte år sekretariatet for The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). Det har også for tiden det faglige sekretariat for 10th International Congress on Mathematical Edu-

cation (ICME-10), som finder sted på DTU i 2004. Endelig er instituttet for nylig blevet centrum for Den Nationale Forskerskole for de Naturvidenskabelige fags Didaktik. Området har haft meget interesse blandt studerende, såvel instituttets egne som talrige gæstestuderende, og mange af de folk, som nu deltager i dette ekspanderende felt på andre institutioner har haft tilknytning til IMFUFA.

Studiet af dynamiske systemer er det, som mest typisk leverer traditionel universitetsmatematisk forskning både hvad angår indhold og samarbejdsrelationer. Instituttet har været engageret i det nationale PDE-netværk og har på denne konto haft talrige gæster, herunder adskillige som deltagere i forskningssamarbejde. Området diskret kompleks dynamik dyrkes i samarbejde med folk på DTU, i Paris og i Boston, og er medarrangør af et internationalt træf, som vil finde sted på de nævnte RUC konferencefaciliteter (søminestationen).

Matematikfilosofiske/historiske vinkler har en vigtig plads i uddannelsen og har som følge deraf også været repræsenteret på forskningssiden dels i kraft af ansættelser dels ved at mange af medarbejderne har det som et fælles interesseområde. Også her har et nationalt netværk været rammen for aktiviteter på stedet og for konkret samarbejde.

Via frikøbsordninger i forbindelse med eksternt finansierede projekter og forskningsrådsbevillinger har det været muligt for mange af medarbejderne at være på længerevarende arbejdsophold i udlandet. Og dette gælder ikke kun den efterhånden halve snes Ph.d. kandidater, som i tidens løb er produceret.

Det faglige miljø

Forskningen understøttes i det daglige af en lang række arrangementer. I hele instituttets levetid har der hver torsdag været afholdt seminar af generel interesse for alle medarbejderne (og også ofte af interesse for de studerende). Her har instituttets egne folk, men som oftest gæster givet oplæg til levende diskussioner. Nogle af seminarerne er årligt tilbagevendende heldagsarrangementer, med karakter af konference. Der er den årlige "modeldag" og den årlige "didaktikdag".

Desuden har instituttet lagt rum og planlægning til mange konferencer og seminarer. RUC råder over den gamle søminestation i Holbæk, der egner sig formidabelt til seminarer med overnatning. Disse seminarer har tit fundet sted i forlængelse af medarbejderes tilknytning til forskellige forskningsnetværk.

Hvert år er der blevet afholdt et forsknings/undervisningsstrategisk seminar på en ødegård i Sverige med deltagelse af alle instituttets medlemmer, også de studerende, med fokus på aktuelle og påtrængende spørgsmål. Disse seminarer har ofte levet op

roller – er med til at give et sammenhold, som er med til at gøre IMFUFA til en god – og udfordrende – arbejdsplads for de for tiden 10 (skriver ti) fastansatte matematikere og et lignende antal fysikere samt et antal eksterne lektorer og stipendiater. Med den bemanning set i forhold til arbejdsomængden kræves der bestemt også både sammenhold, entusiasme og en del harmoni. De fastansatte lærere har i hele instituttets levetid holdt kvartalsvise møder på skift i hinandens hjem med en meget god middag (det kulinariske spiller en stor rolle i hele instituttets liv, det



Vi skal forlade vores hyggelige have, her benyttet under en konference

til deres betegnelse ved at have leveret mange frø til ændringer og nye initiativer.

Det daglige liv

Det mest påfaldende træk ved dagligliv i instituttet er formentlig at det foregår i et integreret miljø af medarbejdere og studerende, som opfatter sig som en samlet population, som er sammen om at arrangere rammerne for dagligdag og fest. Der er fælles – lokal – spisetue og lærere og studerende opfatter den fortsatte udvikling af uddannelsen som et fælles projekt, som ofte diskuteres i et fælles forum. Fællesskabsfølelsen – med gensidig forståelse og respekt for forskellige

hører jo også med til opdragelsen af en god matematiker) som indledning til diskussioner om udvikling af taktik og strategi. Men relevansen af den slags aktiviteter er måske snart en saga blot.

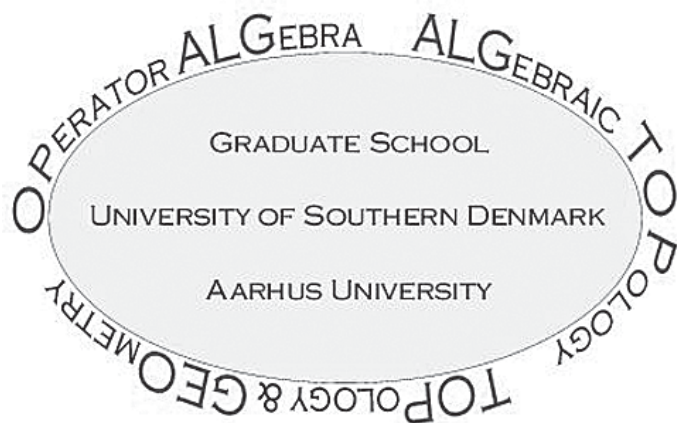
Hvem er det ?

Jeg vil slutte med at nævne de for tiden ansatte faste medarbejdere opstillet efter ansættelsesmæssig anciennitet, den sidstansatte sidst:

Mogens Brun Heefeldt, Mogens Niss, Anders Madsen, Jørgen Larsen, Bernhelm Booss-Bavnbek, Johnny Ottesen, Viggo Andreasen, Carsten Lunde Petersen, Morten Blomhøj og Tinne Hoff Kjeldsen.

Flere PhD stipendier til matematik via OP-ALG-TOP-GEO

Af: Hans J. Munkholm, skoleleder. SDU.
Email: hjm@imada.sdu.dk



OP-ALG-TOP-GEO er akronymet for et samarbejde, som omfatter forskergrupperne i Operator Algebra, Algebraisk Topologi og Geometri ved Aarhus Universitet og Syddansk Universitet. Samarbejdet har status som en forskerskole under Forskeruddannelsesrådet, der støtter initiativet med en bevilling på ialt 3.6 MKr for perioden 2003 - 2007.

Bevillingen er givet i form af medfinansiering af stipendie- og lønudgifterne for ialt 8 PhD forløb, som hver kan støttes med 375 KKr, plus 20 % overhead, dvs ca en tredjedel af totaludgifterne. Alt andet lige vil vi derfor kunne udvide antallet af PhD studerende i de berørte fagområder i den nævnte femårsperiode. Samtidig vil vi samarbejde om udnyttelsen af kursusudbud og seminarerækker, ligesom vi regner med at kunne skaffe midler til en eller flere internationale sommerskoler.

Formålet med forskerskolen er således at sikre et tilstrækkeligt udbud af veluddannede og entusiastiske unge forskere til det nært forestående generationsskifte i nogle af de fagområder, som har været toneangivende i dansk matematisk forskning i den sidste del af det 20. århundrede, og som fortsætter med at udvikle sig både inden for og ind mellem de oprindelige kerneområder. Blandt de meget aktuelle emner kan nævnes den ikke kommutative sandsynlighedsregning, den nære forbindelse mellem den lavt dimensionale geometri og moderne fysik, differentialgeometriens fundamentale betydning for såvel klassisk som moderne fysik, og den algebraiske K-teori, der er både hjælpemiddel og studieobjekt i en stor del af forskerskolens bredde.

Ved forskerskolens start omfatter den 12 fastansatte og 3 midlertidigt

ansatte videnskabelige medarbejdere samt 9 PhD studerende. Det er målet at udvide antallet af PhD studerende med i hvert fald en håndfuld i de nærmeste år. Foreløbig forventes yderligere en PhD studerende ansat pr. 1. marts i år, i dette tilfælde iøvrigt med delvis finansiering ikke alene fra OP-ALG-TOP-GEO, men også fra grundforskningscentret MaPhySto. Skal den ønskede udvidelse af studentertallet i grupperne realiseres, må en sådan sammenflikning af midler fra flere kilder nok blive normen snarere end undtagelsen.

Forskerskolen ledes af en bestyrelse bestående af Uffe Haagerup, Ib Madsen og undertegnede. Yderligere oplysninger om skolen kan findes på dens hjemmeside www.imada.sdu.dk/~hjm/OP-ALG-TOP-GEO

Matilde vil i de kommende numre fortsætte med portrætter af SNF-centre, forskerskoler og grundforskningscentre



Af: Henning Haahr Andersen, Aarhus Universitet,
e-mail: mathha@imf.au.dk.

Forkortelsen CAALT står for Center for Algebraic and Analytic Lie Theory. Dette SNF-center blev oprettet 1. april 2002 og har ialt ni projektmedarbejdere. De seks kommer fra AU, én fra SDU, én fra KU og én fra KVL. Dertil kommer pt fem PhD-studerende, hvoraf de to er delvist finansieret af CAALT. Endelig er der en fransk postdoc tilknyttet. Bevillingen fra SNF er for tre år, og foruden ét PhD-stipendium og én postdoc-stilling i denne periode er der midler til rejser, korttidsgæster og konferencer.

Undertegnede er den daglige leder og udgør sammen med Bent Ørsted og Henrik Schlichtkrull en styregruppe, som har det overordnede ansvar for CAALT's aktiviteter.

Som det vil være dette blads læsere bekendt er Lie teori en klassisk matematisk disciplin. Sophus Lie (1842-1899) opnåede ved sit banebrydende arbejde på flere forskellige områder at lægge grundlaget for en særdeles frugtbar teori. Det er således helt på sin plads, at hans navn er blevet hæftet på for eksempel Lie algebraer, Lie grupper, endelige grupper af Lie type, osv.

Omtrent samtidig med Lie's død fremlagde W. Killing et berømt gennembrud, nemlig klassifikationen af

semisimple Lie algebraer ved hjælp af deres rodsystemer. Sammen med E. Cartan's arbejde blev det grundstenen for meget af det tyvende århundredes udvikling af Lie teorien. Flere gange i tidens løb er der opnået revolutionerende nybrud, som har givet anledning til helt nye områder. Som eksempel kan nævnes udviklingen i forbindelse med først Kac-Moody algebraerne fra slutningen af 1960'erne og dernæst kvantegrupperne, som kom til i midten af 1980'erne.



Sophus Lie (1842-1899)

Der er fortsat stor international aktivitet indenfor Lie teori, og CAALT er med til at præge udviklingen. Der er tale om basal grundforskning, hvor vi dels videreudvikler teorien og dels arbejder med en række dertil relaterede problemstillinger. Nogle af disse har en længere historie og udgør på trods af en storstilet indsats fra en lang række forskere fortsat en udfordring for Lie teoretikere. Andre er affødt af de seneste nybrud indenfor feltet og har aldrig tidligere været genstand for undersøgelser.

Som navnet antyder besidder CAALT ekspertise indenfor såvel den algebraiske som den analytiske del af Lie teori. Der er også tætte relationer til matematisk fysik og algebraisk geometri, og der foregår ved centret et frugtbart samspil mellem disse forskellige tilgangsvinkler. Projektmedarbejderne har et stort internationalt netværk af kontakter til andre førende forskere indenfor området, og disse bliver på forskellig vis inddraget i projektet.

Mere information af centret og dets løbende aktiviteter kan findes på CAALT's hjemmeside
home.imf.au.dk/mathha/caalt.html.

fors. fra s. 43

delse med en længere historie om Galois-repræsentationer og modulære former omtales ikke-kommutative kompositionsregler, og matrixmultiplikation nævnes som eksempel på en sådan. Så vidt, så godt.

Men forfatteren finder grund til at uddybe dette og indsætter en figur med følgende figurtekst: 'Numbers commute under multiplication. $\hat{N}$ that is, an ice cube tray holds the same amount of ice no matter how you stick it in the freezer. But matrices, in general, do not.' Den tilhørende figur består af tre dele: en del der gør op-

mærksom på at $2 \diamond 5 = 5 \diamond 2$, en del der giver et eksempel på to ikke-kommuterende matricer, og en del der viser en isterningeboks placeret på to måder, først så man vil sige at den har $2 \diamond 5$ rum, dernæst så man vil sige at den har $5 \diamond 2$ rum. – Tja. Hvis læseren havde problemer med at $2 \diamond 5 = 5 \diamond 2$, så vil han nu også have problemer med stort set alt andet i artiklen og hæftet.

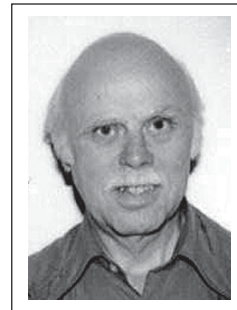
Fremstillingen er i vid udstrækning garneret med formler og matematikbegreber og -figurer, og det er netop garniture. Hvis man ikke på forhånd er inde i det pågældende område, skal man – måske naturlig-

vis – ikke sætte næsen op efter at følge med i ræsonnementerne, dertil er emnerne alt for avancerede. Men den matematikuddannede læser der kan læse hen over formler mm. uden at gå i panik, får en udmærket orientering om en række spændende emner. Der vil også være mange universitetsstuderende der kan bruge teksterne som irriterende og provokerende inspirationskilder til f.eks. projektarbejde.

"L'explosion des mathématiques" kan frit downloades fra
<http://smf.emath.fr/Publications/ExplosionDesMathematiques/>



Matematikens historie i matematikundervisningen



Af: Torkil Heiede, lektor emer.
Inst. for Curriculumforskning,
DPU, Emdrupvej 101, 2400 NV

Skal matematikkens historie på en eller anden måde være til stede i matematikundervisningen? Hvordan? Hvor meget? På den slags spørgsmål kan man få meget forskellige svar, alt efter som hvem man spørger. På den ene fløj møder man den totale afvisning: matematikkens historie vil bare være en ekstra belastning, både for eleverne i skolen og de studerende ved universiteterne; det drejer sig om at lære matematikken at kende som et gavnligt og anvendeligt værktøj, og det er vore dages værktøj, man skal lære at benytte. Desuden er de elever og studenter, som man kan få til at interessere sig for matematik, langt fra de samme som dem, der kan interessere sig for historie. Så at inddrage matematikkens historie i matematikundervisningen er ikke bare overflødigt, det er direkte skadeligt. På den anden fløj møder man den totale tilslutning: for ethvert fag, og ikke mindst for faget matematik, gælder det, at fagets historie er en uundværlig del af faget selv, og man har ikke nogen regulær chance for at forstå, hvad faget drejer sig om, hvis man ikke kender noget til dets udviklingshistorie. Og at dette måske endda i særlig høj grad gælder for matematikken, hænger sammen med, at der netop her er mange elever og studenter, som har svært ved at se, hvad det hele skal gøre godt for.

Jeg kan lige så godt straks bekendegøre kulør og stå ved, at jeg selv nærmest hører til på den sidstnævnte af

de to fløje; det har jeg gjort rede for i min artikel "Hvorfor undervise i matematikkens historie?" [1] (der også findes på engelsk som "Why Teach History of Mathematics" [2]). Artiklen er forsynet med en meget lang literaturliste (i den engelske udgave noget kortere), som giver henvisninger til en lang række svar på spørgsmålet i artiklens overskrift, også svar, der ligger meget langt fra mine egne. På den anden side er jeg ikke blind for, at det ikke er helt ufarligt at tage matematikkens historie med i undervisningen; først og fremmest skal man undgå, at matematikken blot bliver garneret med en række mere eller mindre pålidelige anekdoter. I min artikel "History of Mathematics and the Teacher" [3] kan man finde en række eksempler på, hvad der kan ske. Også denne artikel har en lang literaturliste.

Tiden før 1972

Matematikens historie har naturligvis altid været til stede på undervisningsprogrammet, og også på mange forskellige trin i uddannelsessystemet. Hvis vi holder os til de sidste 100-125 år, kan man for Danmarks vedkommende nævne, at matematikkens historie allerede før 1900 havde en solid stilling på Københavns Universitet. Det skyldes især samarbejdet mellem den klassiske filolog J.L.Heiberg (1854-1928) og matema-

tikeren H.G. Zeuthen (1839-1920); Heiberg huskes især for sine epokegørende udgaver af de klassiske græske matematikere (Euklid, Archimedes, Apollonios osv.) – en særlig glans står der om hans fund i Konstantinopel i 1906 af Archimedes' skrift Metoden, som ansås for at være gået tabt – og Zeuthen for sine afhandlinger og bøger om den græske matematik og for sin store tobinds lærebog i matematikkens historie [4]. Traditionen fra Heiberg og Zeuthen blev i 1930'erne videreført og fornyet af O. Neugebauer (1899-1990), som kom til København på flugt fra Hitlers Tyskland og siden rejste videre til U.S.A. Hans felt var den ægyptiske og babyloniske matematik og astronomi; hans banebrydende bog The Exact Sciences in Antiquity [5] udkom første gang i København, og han reviderede og nyudgav første bind (om den græske oldtid) af Zeuthens matematikhistorie [6]. Han fik mange elever, som videreførte universitetsfaget matematikkens historie både i U.S.A. og i Danmark – man behøver blot at nævne Asger Aaboe og Olaf Schmidt. Og emner fra matematikkens historie var i mange år en fast del af uddannelsen af enhver cand.mag. i matematik ved Københavns Universitet: i lærerprøven (3.studieår) indgik obligatorisk bl.a. en oversigt over den klassiske græske matematik, en gennemgang af Euklids Elementer (bog I udførligt), parallelaksiometts historie, Hilberts aksiomssystem, og kon-



*En matematiktime.
En af tilhørerne er
Thyra Eibe. Kilde:
Normat 1993*

struktion med passer og lineal. Til fagprøven (som 2.del hed dengang) fulgte mange studerende en forelæsningsrække over matematikkens historie, og adskillige valgte at skrive speciale i matematikkens historie.

I gymnasiet kom det helt an på den enkelte lærer, om der blev gjort noget ud af matematikkens historie. Det skete nok sjældent; men S.A.Christensen (1861-1943) må nævnes. Han var elev af Zeuthen og skrev i 1895 disputats om matematikkens udvikling i Danmark og Norge i det 18.århundrede [7]. Han var hele sit liv gymnasielærer og endte som rektor i Nykøbing; i en anmeldelse i 1889 (i Tidsskrift for Matematik) af Poul la Cours bog (se senere) skrev han: "Det er nemlig saa, at mange Lærere kun kjende ganske lidt til Matematikkens Historie, og af Erfaring ved jeg, hvor megen Glæde Eleverne have af at erfare et og andet om dette Punkt". Også Thyra Eibe (1866-1955) bør nævnes. Man må formode, at hun i nogen grad lod historien præge sin matematikundervisning i de mange år på det gymnasium, der først hed Hanna Adlers Fællesskole og siden hen Sortedam Gymnasium. Thyra Eibe var elev af Heiberg og Zeuthen, og hendes oversættelse af Euklids Elementer til dansk [8] (fra Heibergs græske) har for mange generationer af universitetsstuderende – og i de senere år, efter at de første bøger er kommet i nyoptryk, også for gymnasieelever – været det første autentiske møde med oldtidens græske matematik. Om Thyra Eibe kan man læse i C.M.Taisbaks artikel i *Dansk Biografisk Leksikon* (supplementsbindet 1984) og i Else Høyrups artikel

"Thyra Eibe – Danmarks første kvindelige matematiker" [9]. Som det fremgår af det, der ovenfor blev sagt om cand. mag.-studiet, var de følgende generationer af gymnasielærere vel rustede til en gang imellem at lade matematikhistoriske indslag dukke op i deres undervisning – men hvis de gjorde det, var det altså på eget initiativ.

I folkeskolen førte matematikkens historie utvivlsomt en meget tilbagetrukket tilværelse; dog må mange matematiklærere nok have læst en bog, der egentlig var skrevet for et helt andet publikum, men som kom i talrige oplag og i mange år havde en fast plads på hylderne i alle landets folkebiblioteker – og blev læst af mange. Den hed *Historisk Matematik* [10] (i senere udgaver *Historisk Matematik*), og dens forfatter var Poul la Cour (1846-1908). Allerede i 1879 (året efter sin ansættelse) begyndte han at lægge sin matematikundervisning på Askov Højskole i historiske rammer. Første udgave af hans bog udkom i 1881 (i 1879 var et udkast til geometriafsnittet udsendt duplikeret), tredje udgave (med forord af Zeuthen) i 1909 og femte udgave så sent som i 1962. Mere om Poul la Cour

kan man finde i Hans Chr. Hansens artikel "Poul la Cours indførelse af matematikken i den danske folkehøjskole" [11].

I Kurt Ramskovs hæfte [12] findes en mere udførlig omtale af bøgerne [4], [6], [8] og [10] samt otte andre bøger med matematikhistorisk indhold, skrevet på dansk eller oversat til dansk før ca. 1975. Hæftet indeholder desuden korte beskrivelser af yderligere 11

tilsvarende bøger fra før ca. 1975 (heriblandt [7]) og 30 fra tiden efter ca. 1975, af hvilke mange er skrevet med henblik på undervisningen i gymnasiet.

Hvad der her er sagt om forholdene i Danmark, gælder i det store og hele også for alle andre lande: Matematikkens historie fandtes som universitetsfag, men den satte ikke i høj grad sit præg på den øvrige universitetsundervisning i matematik, og slet ikke på skoleundervisningen. Det er symptomatisk, at matematikkens historie overhovedet ikke optrådte i programmet for den første internationale matematikundervisningskongres i Lyon i 1969 (eller for at give den sit officielle navn: First International Congress on Mathematical Education, forkortet ICME-1). Men en ændring var på vej: mange steder i verden begyndte matematiklærere at interessere sig for matematikkens historie og at inddrage den i deres undervisning. Herhjemme udkom således allerede i 1963-66 et lærebogssystem i matematik for gymnasiet, der indeholdt mere om matematikkens historie end noget tidligere system; et tydeligt signal var bøgernes bind, der var facsimiler af ma-

tematikhistoriske tekster. Bøgerne [13] var skrevet af Poul O. Andersen, Stig Bülow og Hans Jørgen Helms og var blevet til på baggrund af deres undervisning bl.a. på Virum Gymnasium. Lignende bøger udkom i andre lande, og også hæfter om historiske emner som tilskud til eksisterende lærebøger; der dukkede flere og flere historiske artikler op i matematikundervisningstidsskrifter, og i 1972 var der sket så meget rundt omkring, at der var basis for på ICME-2 i Exeter at lade en af kongressens arbejdsgrupper hedde "Relations between the history and pedagogy of mathematics" (se kongresberetningen *Developments in Mathematical Education* [14] s.38-39 og 301). Her mødtes interesserede fra alverdens lande, hørte en lang række foredrag og deltog i lange diskussioner, og herved blev der grundlagt et internationalt samarbejde, som stadig består, og som mange af deltagerne stadig er med i (foruden naturligvis de mange flere, som er kommet til siden).

Tiden efter 1972

I de sidste ca. 30 år er bestræbelserne (over hele verden) på at give matematikkens historie en mere fremtrædende plads i matematikundervisningen blevet mere og mere omfattende, og så mange mennesker har over en stadig bredere front været engageret i dem som lærere, foredragsholdere, skribenter, diskussionsdeltagere, lærere for lærere, inspiratorer, forskere osv. osv., at det er umuligt at fortælle om det hele på nogle få sider. I stedet vil jeg prøve på at give et rimeligt indtryk af alle disse aktiviteter ved at fortælle om noget af det internationale samarbejde, der har udfoldet sig på møder og konferencer, og ved at nævne nogle af de publikationer, som dette har kastet af sig; igennem dem kan man få meget at vide om det, der er sket og sker i undervisningen på alle trin.

Den arbejdsgruppe, som var en del af ICME-2 i Exeter i 1972, blev videreført som "The International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics" (forkortet HPM), der så på ICME-3 i Karlsruhe i 1976 blev knyttet direkte til den internationale matematikundervisningskommission. (I en parentes skal det måske indskydes,



Sophus Andreas Christensen

at "The International Commission on Mathematical Instruction", forkortet ICMI, blev oprettet på den internationale matematikerkongres i Rom i 1908 med Felix Klein som sin første formand; den er nu en kommission under den internationale matematiske union, og en af dens vigtigste opgaver er at arrangere ICME-kongresserne, der siden 1972 har fundet sted hvert fjerde år og hver gang med flere tusind deltagere; ICME-10 afholdes i København i 2004.)

Siden 1972 har HPM stået for eller været medarrangør af eller på anden måde støttet talrige lokale konferencer og møder verden over og på hver ICME arrangeret en møderække med foredrag og diskussioner. Desuden har der lige før eller lige efter hver ICME (siden ICME-6 i Budapest i 1988) været afholdt en international HPM-konference med nogle hundrede deltagere; den første (i Kristianssand i 1988) var dog i en meget mere beskedne målestok og kom kun i stand på nordmanden Otto B. Bekkens initiativ (han havde allerede i 1981 arrangeret en lignende international konference); de følgende fandt sted i Toronto i 1992, i Braga i 1996 og på Taiwan i 2000 i tilknytning til henholdsvis ICME-7 i Quebec, ICME-8 i Sevilla og ICME-9 i Tokyo; og den næste afholdes i Uppsala i 2004. Desuden udsender HPM til alle interesserede et indholdsrigt Newsletter, for tiden tre gange om året; det nyeste er nr.51 fra november 2002. (Det er gratis; den skandinaviske distributør er Sten Kaijser, Mat.Inst., Postbox 480, SE-75106 Uppsala, sten@math.uu.se.) Foredragene fra

de store ICME-kongresser findes i kongresberetningerne; mange af foredragene fra HPM-konferencerne har "The Mathematical Association of America" publiceret i de tre bøger [15], [16] og [17]; fra Braga foreligger der desuden en kongresberetning [18] i to bind, som foruden 23 længere foredrag fra konferencen indeholder indlæg fra fire paneldiskussioner og oplæg til ni workshops samt ikke færre end 61 kortere foredrag, hvoraf mange beretter om undervisning (i alverdens lande) i matematikhistoriske emner på alle skolens trin.

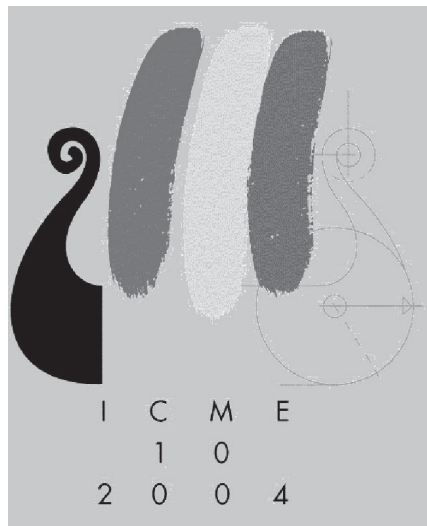
Hvis man skal nævne nogle lande, hvor aktiviteten har været særlig stor, må det blive Storbritannien, Frankrig, Tyskland og U.S.A.; lad mig her nøjes med at omtale de to første. "The British Society for History of Mathematics" (BSHM) afholder hvert år (foruden sine mange rent matematikhistoriske møder og konferencer) en velbesøgt konference med betegnelsen History in Mathematics Education (HIMED), hvert andet år en enkelt dag, hvert andet år over tre-fire dage. Deltagerskaren omfatter både universitetsfolk og skolefolk, såvel fra primary som fra secondary school, og foredragsholderne beretter ofte om egne erfaringer med at inddrage matematikkens historie i undervisningen. For øvrigt er BSHM's Newsletter vokset støt gennem mange år; det kommer nu tre gange om året, er hver gang på ca. 150 sider og indeholder hver gang også undervisningsrelevant materiale.

De to britiske matematiklærerforeninger holder deres store årsmøder ved påsketid; blandt de mange foredrag er der altid adskillige om matematikkens historie i undervisningen. Og i foreningernes tidsskrifter handler mange artikler om emnet; de er ofte baseret på foredrag og workshops på årsmøderne. Jeg vil her gerne gøre opmærksom på et specialnummer [19] af *The Mathematical Gazette* fra 1992; det bestod udelukkende af artikler om matematikkens historie.

Ved 25 af Frankrigs universiteter findes der blandt institutterne et "Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques" (IREM), som forsker i matematikundervis-

ning, afholder videreuddannelseskurser for lærere, udgiver bøger og materialer, og også involverer sig i læreruddannelsen. Disse institutter har i høj grad interesseret sig for matematikkens historie, og en "Commission inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques" har stået for en lang række sommeruniversiteter og andre møder om emnet, og der er udsendt stabler af materiale, se f.eks. artikelsamlingen [20], der også findes på engelsk som [21]. Jeg vil dog især nævne den massive kongresberetning [22] på 600 sider fra Det første europæiske sommeruniversitet om historie og epistemologi i matematikundervisningen, som foregik i Montpellier i 1993. Der var ca. 250 deltagere fra alverdens lande på dette sommeruniversitet, og beretningen er på enhver måde lige så indholdsrig som beretningen fra HPM-Braga 1996, som i øvrigt foruden at være arrangeret som HPM-sattelitkonference til ICME-8 i Sevilla også netop var Det andet europæiske sommeruniversitet om historie og epistemologi i matematikundervisningen.

Herhjemme voksede interessen for at inkorporere matematikhistorie i matematikundervisningen støt i 1970'erne og 1980'erne, både på universiteterne (herunder også Danmarks Lærerhøjskole) og i gymnasiet, og efterhånden også (om end i mindre grad) på seminarierne og i folkeskolen. Et væsentligt skub fik disse ideer ved den nye gymnasiebekendtgørelse i 1988 og den nye folkeskolebekendtgørelse i 1994, som begge omtalte matematikkens historie på en sådan måde, at dens tilstedeværelse i undervisningen dermed blev obligatorisk; det er klart, at dette krav kun kunne stilles op og kun kunne tænkes at blive opfyldt på baggrund af den forudgående vækst i interessen. Snart efter 1988-bekendtgørelsen forøgedes tilstrømningen til universiteternes eksisterende kurser i matematikkens historie; således voksede det årlige deltagerantal på Københavns Universitet i løbet af et par år fra 20 til 80 (bl.a. fordi ældre studerende fortrød, at de ikke allerede havde taget dette kursus) for derefter at stabilisere sig på 50. Tilsvarende er det gået på landets andre universiteter, og det er klart, at matematikkens historie nu i endnu højere grad end nogensinde er en nødvendig ingrediens i en universitetsuddannelse i ma-



tematik, og der er al mulig grund til at befæste og styrke dens plads på universiteterne.

I kølvandet på de nye bekendtgørelser udkom adskillige lærebogssystemer (både for folkeskolen og for gymnasiet) i nye udgaver med historiske indslag eller med historisk præg, og der udkom også nye lærebogssystemer, der helt var gennemsyret af matematikkens historie. Også lærernes videreuddannelse blev naturligvis påvirket, dels (for gymnasiets vedkommende) gennem mange kurser i historiske emner, ofte arrangeret af gymnasiernes matematiklærerforening i samarbejde med institutterne ved Københavns og Aarhus' universiteter, dels (for folkeskolens vedkommende) ved nogle årskurser på den daværende Danmarks Lærerhøjskole udelukkende om matematikkens historie, ved indslag på mange andre kurser, og også ved kurser for seminarierne lærere. Det er på disse sidstnævnte områder (hvor situationen nu ved oprettelsen af Danmarks Pædagogiske Universitet er helt forandret), jeg selv har arbejdet mest, først og fremmest inspireret af min deltagelse i mange af de ovenfor omtalte internationale konferencer (lige fra ICME-2 i 1972) og gennem de kontakter med ligesindede i mange lande, som jeg derved har fået – og sådan er det gået mange andre jorden rundt.

The ICMI Study

Til sidst vil jeg omtale en bog [23] på 427 sider, som udkom i 2000 og blev præsenteret på ICME-9 i Tokyo. Bogens titel er *History in Mathematics*

Education, og i den bliver der set tilbage over de sidste 30 år; der bliver gjort status over tingenes tilstand over hele verden lige nu; og der bliver stillet forslag om kommende aktiviteter. Bogen indeholder også mange principielle overvejelser, og hvis man interesserer sig for matematikkens histories placering i undervisningen på alle trin, giver den nok den bedste baggrund og den bedste samling af relevant materiale, der for øjeblikket kan fås.

Bogen er udkommet i en serie bøger om emner, som ICMI finder væsentlige: *The New ICMI Study Series*. Den er blevet til på den måde, at John Fauvel fra Open University (HPM-formand 1992-1996) og Jan van Maanen fra Groningen Universitet (HPM-formand 1996-2000) i 1997 med assistance af en international programkomité på otte medlemmer først skrev et arbejdsrapport, som blev publiceret mange steder (f.eks. i ICMI Bulletin 42 (juni 1997)) med en opfordring til enhver om at indsende kommentarer. Derefter blev ca. 80 personer fra hele verden indbudt til en ugelang conference i april 1998 på den franske matematiske forenings ejendom i Luminy nær Marseilles. Hver af de ca 65 deltagere blev medlem af to ud af i alt 11 arbejdsgrupper, som mødtes hver dag og diskuterede og planlagde hver sit kapitel af bogen. Efter konferencen blev kapitlerne så gjort færdig pr. korrespondance og redigeret sammen af John Fauvel (som desværre døde i 2001) og Jan van Maanen.

Et godt indblik i bogens ide kan man få ved at læse det afsnit i indledningen, som hedder "The argument of this book"; det består på snedig vis simpelthen af indledningerne til de 11 kapitler.

Et hurtigt overblik over bogens indhold kan man få af de 11 kapiteloverskrifter:

1. The political context.
2. Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues.
3. Integrating history: research perspectives.
4. History of mathematics for trainee teachers.
5. Historical formation and student understanding of mathematics.
6. History in support of diverse educational requirements – opportunities for change.
7. Integrating history in the class-

- room: an analytical survey.
8. Historical support for particular subjects.
 9. The use of original sources in the mathematical classroom.
 10. Non-standard media and other resources.
 11. Bibliography for further work in the area.

Selv har jeg bidraget til kapitlerne 4, 8 og 11; jeg vil gerne slutte med at give en kort beskrivelse af kapitel 11: Her finder man på 48 sider en kort indledning og derefter otte kommenterede lister over udvalgt litteratur på henholdsvis kinesisk, dansk, hollandsk, engelsk, fransk, tysk, græsk og italiensk samt en liste over udvalgte samleværker (bøger og specialnumre af tidsskrifter) om emnet – alt i alt en forhåbentlig god og anvendelig nøgle til den foreliggende litteratur.

Hvorfor så egentlig?

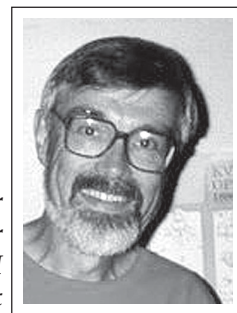
Og hvad kan man så håbe på at få ud af at beskæftige sig med matematikkens historie som et led i en matematikeruddannelse eller som et indslag i en matematikundervisning? Et af de mulige svar fik jeg af en studerende ved Københavns Universitet, som lige havde været igennem – i sit tredje studieår – Jesper Lützens kursus i matematikkens historie og nu var oppe til eksamen (med mig som censor). Han fortalte mig efter eksaminationen, at han i dette kursus for første gang havde stået over for den udfordring, og også havde fået mulighed for, at se på matematikken som et hele, ikke blot i hele sin historiske længde, hvad der jo lå i sagens natur, men også i hele sin mangfoldige bredde, som ét fag. I hvert af de for sig interessante kurser, han tidligere havde fulgt, havde han kun set – under lup ganske vist – et enkelt hjørne af en enkelt stue i en af etagerne i det han nu kunne se som et helt hus. Han havde stadig ikke været inde i alle husets stuer eller nede i alle dets kældre eller oppe i alle dets tårne, og han kendte heller ikke alle begivenheder i dets lange historie; men han kunne nu, og for første gang, se det som en helhed.

Litteratur

- [1] Heiede, Torkil: "Hvorfor undervise i matematikkens historie?" Nordisk Matematisk Tidsskrift (Normat) 34 (1991), 153-161 og 192.
- [2] Heiede, Torkil: "Why Teach History of Mathematics?" [18], 151-157.
- [3] Heiede, Torkil: "History of Mathematics and the Teacher" [15], 231-243.
- [4] Zeuthen, H.G.: Mathematikens Historie I-II, Høst & Søn, København 1893 og 1903.
- [5] Neugebauer, O.: The Exact Sciences in Antiquity, Ejnar Munksgaard, København 1951.
- [6] Zeuthen, H.G. (udg. af O. Neugebauer): Mathematikens Historie, Oldtiden, Høst & Søn, København 1949.
- [7] Christensen, S.A.: Matematikens Udvikling i Danmark og Norge i det XVIII Aarhundrede, Hempel, Odense 1895.
- [8] Euklids Elementer I-XIII (overs. af Thyra Eibe), Gyldendal, København 1897-1912; ny udg. af I-IV, Trip, Vejle 1985.
- [9] Høyrup, Else: "Thyra Eibe – Danmarks første kvindelige matematiker" Nordisk Matematisk Tidsskrift (Normat) 41 (1993), 41-44 og 87.
- [10] la Cour, Poul: Historisk Matematik, Kolding 1881, P.G. Philipsen, København 1888, senere udgaver Gyldendal 1899, 1909, Grønholdt Pedersen 1942, Rosenkilde og Bagger 1962 (alle København).
- [11] Hansen, Hans Chr.: "Poul la Cours indførelse af matematikken i den danske folkehøjskole" Nordisk Matematisk Tidsskrift (Normat) 29 (1981), 176-186 og 196.
- [12] Ramskov, Kurt: Matematikhistorisk litteratur på dansk, specielt den ældre del, Matematisk Afdeling, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, København 1998.
- [13] Andersen, Poul O., Stig Bülow & Hans Jørgen Helms: Matematik for gymnasiet 1, 2A, 2B, 3A, 3B, Gyldendal, København 1963-1966.
- [14] Howson, A.G. (red.): Development in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education (1972), Cambridge University Press, Cambridge 1973.
- [15] Swetz, Frank, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson & Victor Katz (red.): Learn From the Masters!, The Mathematical Association of America, Washington 1995.
- [16] Calinger, Ronald (red.): Vita Mathematica, Historical Research and Integration With Teaching, The Mathematical Association of America, Washington 1996.
- [17] Katz, Victor (red.): Using History to Teach Mathematics, An International Perspective, The Mathematical Association of America, Washington 2000.
- [18] Lagarto, Maria Jo, Ana Vieira & Educarado Veloso (red.): História e Educação Matemática, Proceedings (Second European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education & ICME-8 Satellite Meeting of The International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics (HPM)) 1-2, Braga 1996.
- [19] The Mathematical Gazette 76, Nr.475, Marts 1992 (red. Nick Mackinnon); special edition on the use of the history of mathematics in the teaching of the subject.
- [20] Barbin, Evelyn (red.): Histoires de problemes, Histoire des mathématiques, Commission inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Lyon, Lyon 1992.
- [21] Barbin, Evelyn (red.): History of Mathematics, Histories of Problems (overs. Chris Weeks & Leo F. Rogers), The inter-IREM Commission Epistemology and History of Mathematics, Ellipses, Paris 1997.
- [22] Lalande, Françoise, François Jacoboef & Yvon Nouazé (red.): Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique, actes de la première université d'été européenne (Montpellier 1993), IREM de Montpellier 1995.
- [23] Fauvel, John & Jan van Maanen (red.): History in Mathematics Education, The ICMI Study, New ICMI Study Series Vol.6, Kluwer, Dordrecht 2000.



Af: Kjeld Bagger Laursen, Institut for
Matematiske Fag og Center for
Naturfagenes Didaktik KU
email: laursen@math.ku.dk



HVAD SKAL KOMPETENCEDEBATTEN GØRE GODT FOR I UNIVERSITETSMATEMATIKKEN?

Der er gang i arbejdet med at reformere de naturvidenskabelige uddannelser på næsten alle de danske universiteter. Ord som 'omverdenskompetence', 'personlige kompetencer', 'faglig kompetence' er dukket op i diskussionen, selv blandt hærdede matematikere. Og matematik indtager en særstilling, idet der for os er blevet udviklet et omfattende begrebsapparat til beskrivelse af faglig matematisk kompetence.

KOM-rapporten (KOM = Kompetencer Og Matematiklæring) er blevet til som svar på spørgsmål i et kommissorium fra undervisningsministeriet. Den behandler hele uddannelsessystemet, for matematik er jo et fag der dukker op i alle mulige sammenhænge og på alle niveauer. Det er en værdi, også fordi det muliggør fælles sprogbrug på alle niveauer, og kan derved måske bidrage til løsning af de mange brobygningsbehov, uddannelsessystemet skaber.

KOM-rapporten taler om otte overordnede kompetencer: at spørge og svare i, med og om matematik, samt at håndtere matematikkens sprog og redskaber - og deres udspecificering, i tankegangs-, problembehandlings-, modellerings-, ræsonnements-, symbol- & formalisme-, kommunikations-, hjælpemiddel-, samt endelig repræsentationskompetencen. Der er grund til at fremhæve at rapporten også nævner at der kan og bør lægges begreber som intuition, kreativitet, overblik, dømmekraft med ind i anskuelsen af kompetencerne. Og at kompetencebegreberne, når de skal måles og beskrives, er flerdimensionale (rapporten opererer med *dækningsgrad*, hhv. *aktionsradius* og *teknisk niveau*.)

Væsentligt for os alle som lærere, og specielt for dem der sidder på universiteter der beflitter sig med læreruddannelse, er den parallelle diskussion af *matematiklærerfagligheden*.

Hvem på universiteterne kan således sige sig fri for at skulle forholde sig til disse didaktiske og pædagogiske aspekter:

- Udformning og vurdering af læse- og undervisningsplaner
- Tilrettelæggelse og gennemførelse af undervisning
- Afdækning og fortolkning af hvad studerende lærer
- Evaluering, bredt opfattet: undervisningsforløb, eksamen
- Samarbejde, med kolleger, med studienævn, med ledelsen – om undervisning
- Professionel udvikling, som underviser?

Når jeg ser listen, og den måde jeg startede sætningen på, kan jeg godt se at en del kolleger måske vil svare at 'det-og-det kan jeg godt sige mig fri for!' Men jeg tvivler på at denne sigen-sig-fri bliver ved med at gå. Vores individuelle professionalise-

ring på undervisningsfeltet er i fremgang.

Hvad kan KOM-rapporten bidrage med i universitetssammenhæng? Her er nogle bud – grupperet som reaktioner på nogle af kommissorie-spørgsmålene.

a) *I hvilken udstrækning er der behov for at forny den eksisterende matematikundervisning?*

Rapporten nævner at faget har 'begrundelsesproblemer', altså at matematiks sande og signifikante rolle i mange uddannelser – eller mere generelt, i mange af livets forhold - slet ikke synliggøres nok. Faget har også 'implementationsproblemer'. Dette tunge ord dækker over spørgsmål om lærerkorpsenes kvalifikationer, såvel som over sammenhængs- og overgangsproblemer, progressionsproblemer, samt over problemer som f.eks. for stor spredning af deltager-udbyttet.

Endvidere gør rapporten opmærksom på at megen eksamensaktivitet ikke nødvendigvis måler det man i virkeligheden ønsker at fremme i undervisningen.

Allerede her begynder 'kompetencebegrebet' at dukke op. Når man uddanner f.eks. ingeniører, uddanner man til visse erhvervsfunktioner. Det er ikke nemt at definere de ønskværdige kompetencer særlig specifikt, thi i modsætning til hvad der siges om journalister, kan en ingeniøruddannelse jo føre til hvad som helst, uden at man skal forlade branchen! Tilsvarende, hvis man skal specificere hvad f.eks. en aktuar skal kunne, bliver det sandsynligvis til en liste over 'kompetencer'.

Men hvordan specificerer man en 'matematiker'? Og hvis det er svært at finde klare svar på det spørgsmål bliver det jo også svært at vide om man rammer rigtigt i valg af form, stil og indhold af uddannelsen. F.eks.

hvilke slags fagmatematikere skal vi kunne tilbyde samfundet? skal bachelorgraden bevidst lægges anderledes - bredere - an, så dens profil ikke blot er en 1.dels? skal kandidatgraden tones, så tanken om at den er en indledning til en forskningskarriere ikke længere er dominerende? hvordan bliver vi som lærere bedre bekendt med hvilke virkemid-

ler undervisning på universitetsniveau egentlig har? hvordan gør vi uddannelserne fremtidsforberedte?

Samtidig med at være udtryk for uvished markerer disse punkter jo at der er behov for at lave noget om

Selvfølgelig kan man spørge om et reformbehov nødvendigvis skal opfyldes ved at indføre kompetencebegreber. Hvad er der i vejen med vores traditionelle pensumbeskrivelser?

Et lille KU-eksempel kan give et svar: I mange år var kursusbeskrivelserne af Matematik 1 (det "store" matematikkursus på første år) og Matematik A (et støttefagskursus, primært for kemistuderende) næsten identiske, fordi de to kurser omhandlede de samme emner. De to kurser var ganske vist ikke af samme omfang, men de fleste ville nok mene at der også var andre, mere fundamentale, forskelle mellem de to kurser - det stod der bare ikke noget om. En kompetencebeskrivelse ville sandsynligvis meget bedre, og mere meningsfyldt, kunne indfange de virkelige forskelligheder. Og dermed fungere bedre som en varedeklaration - for de studerende, og for omverdenen, som en ingrediens i uddannelsesbeskrivelsen.

g) *Hvad er samfundets krav til matematikundervisningen?*

Rapporten identificerer overordnet tre krav: undervisningen skal bidrage til samfundets teknologiske og socio-økonomiske udvikling; den skal sætte hver enkelt deltager i undervisningen/læringen i stand til at klare livets udfordringer, som borger, som person og som 'arbejder'. Og den skal bidrage til samfundets politiske, ideologiske og kulturelle vedligeholdelse og udvikling i et demokratisk perspektiv. Rapporten gør sig derefter en del overvejelser om kompleksiteten i disse krav, og mulige måder at opfylde dem - og ser også fra denne synsvinkel et behov for øget brug af kompetencebegreber til bestemmelse af hvordan disse mål håndteres i uddannelserne. Jeg er enig.

Universiteternes hovedmission er selvfølgelig, som uddannelsesinstitutioner, mest på det arbejdsmarkedsmæssige felt. Men det er jo også udfordring nok. Uden en afklaring -

f.eks. i kompetencetermer! - af hvad hver enkelt af vore uddannelser skal gøre godt for, jf. hvad jeg sagde ifm spørgsmål a), kommer vi ingen vegne. Apropos 'hvad uddannelsen skal gøre godt for', så er her et spørgsmål fra djævelens advokat: har den almindelige matematikuddannelse egentlig noget at gøre i det private erhvervsliv? Når vi alligevel uddanner statistikere, aktuarer, operationsanalytikere og matematik-økonomer, for ikke at nævne ingeniører, hvorfor ryger så mange matematikkandidater også den vej videre - som halvtuderede røvere, på en måde. Og vel at mærke samtidig med at samfundet råber efter lærere, til gymnasierne, til seminarierne, til alskens universiteter og tekniske uddannelsesinstitutioner?

d) *Hvordan måler man matematiske kompetencer?*

Her er vi ved et af de afgørende punkter i hele KOM-projektet. Ét er at formulere et uddannelsesforløbs mål i kompetencetermer, noget andet er at konstatere i hvilken grad de opstillede mål er nået. Faktisk er det på dette punkt at hele begrebsapparatet skal stå sin prøve. Rapportens afsnit 9.4 er helliget sagen og der står også en del her, først om hvorledes de kendte og klassiske prøveformer faktisk også kan bruges til at måle kompetencer, og dernæst om hvilke allerede kendte, men ikke særlig udbredte, prøveformer, såsom gruppeprøver, eller kombinerede prøver hvor den skriftlige prøve lægges ganske åbent an, og hvor der følges op herpå i den mundtlige del. Der er også fyldige eksempler på hvordan almindelig evalueringsvirksomhed (skriftlige afleveringsopgaver, tavlefremlæggelser) kan udmøntes i kompetencevurderinger, som inddrager dækningsgrad, aktionsradius og teknisk niveau. Prøv f.eks., at læse rapportens eksempel 9.5.3.

Men det siges også lige ud at feltet trænger til udvikling. Det er efter min vurdering på evalueringsfeltet slaget for og imod matematikkompetencebeskrivelserne vil komme til at stå. Kan vi udtænke og afprøve målemetoder, der kan håndtere kompetencer, og også kompetencetilvækster? Det skal nok vise sig at være vanskeligt, for hvordan skal man f.eks. måle ændringer i kommunika-

tionskompetence? Måske kan det være en slags moralsk støtte at erkende at det heller ikke altid er særlig klart hvad det klassiske system egentlig måler: den studerende har måske løst en opgave, som omhandler et tilfælde hvor sammenligningskriteriet kan anvendes til at afgøre at en given uendelig række er konvergent, ganske pænt, men hvor dyb en forståelse af konvergensbegrebet har han dermed demonstreret?

j) *Hvordan skal fremtidens matematikundervisning være organiseret?*

Rapporten skynder sig at sige at dette er et stort spørgsmål som ligger i forlængelse af KOM-projektet. Den afstår altså, rimeligt nok, fra at svare – men knytter dog nogle få kommentarer til sagen. Den fremhæver den 'strukturerede mangfoldighed', som vi finder i dette land. Og den gør opmærksom på at der er behov for udnyttelse af gamle, men også i høj grad for udvikling af nye aktivitetsformer. Det er jo så sandt som det er sagt. Også på universiteterne kan vi mærke behovet for den strukturerede mangfoldighed og udviklingen af nye aktivitetsformer. Navnlig i studiestarten er overdreven brug af forelæsningsformen problematisk: den fordrer arbejdsformer hos de studerende, som de ikke er bekendt med – og som uddannelserne ikke nødvendigvis hjælper tilstrækkeligt til med at tilvejebringe hos dem. Og dens systemtilpassende effekt på studiestartere, i retning af en passiv læringsstil, er betænkelig hurtig og markant. I hvert fald er det økonomiske argument for forelæsningsformen ret dubiøst, specielt når vi betragter studiestarten.

b) *Hvilke matematiske kompetencer skal der være opbygget hos eleverne på de forskellige stadier af uddannelsessystemet?*

Rapporten siger at alle otte kompe-

tencer er på dagsordenen fra dag 1. Umiddelbart kan det måske forbavse at alle delkompetencer skal dyrkes, helt fra børnehaveklassen. Men der argumenteres overbevisende for at sådan er det – bl.a. gennem det omfattende eksempelmateriale.

De igangværende og planlagte reformprocesser tvinger universiteterne til at tænke over hvad der foregår, og hvad der bør foregå i fremtiden (jf. bemærkningerne under punkt a).) Jeg kan se en stor værdi i at gennemføre en proces der, kursus for kursus, opregner hvilke kompetencer en given uddannelse egentlig dyrker. Hvordan har B.Sc. uddannelsen i matematik det f.eks. med modelleringskompetencen? Eller hjælpemiddelkompetencen? Og hvor langt kommer vi – hhv. bør vi forsøge at komme – med ræsonnementskompetencen, eller problembehandlingskompetencen eller symbol- og formalismekompetencen? Det behøver ikke alt sammen at foregå i kvantificerede termer, synliggørelse og bevidst opmærksomhed kan gøre en positiv forskel.

Tænk bare på kommunikationskompetencen. Ingen universitetsmatematiker er i tvivl om hvor vanskelig matematisk kommunikation er. Vi læser matematiske tekster med stort besvær, vi underviser med omhu og ramler alligevel ustandselig ind i at vore studerende ikke har forstået hvad vi prøver at forklare. Vi betoner i vore opgaverettelser hvor væsentligt det er at udtrykke sig klart. Men hvordan indbygge skoling i matematisk kommunikation i uddannelsen? Her på IMF, KU har vi et krav til formidlingsaktivitet, som normalt kan opfyldes ved at afholde et par seminarer. Men er denne tilgang til formidling ikke alt for snæver? Hvad med de aspekter af kommunikation, jeg lige nævnte? Eller hvad med et felt som vi slet ikke dyrker, nemlig træning i kommunikation i blandede grupper – altså formidling af matematik over for ikke-fagfolk. Jeg tænker ikke på den almindelige mand på

gaden, men snarere på ikke-matematikkyndige arbejdskolleger, der sammen med vores matematiker er i gang med et gruppeprojekt, hvor visse matematiske betragtninger indgår på linie med andre aspekter. Jeg tror vi kan komme ind i en bedre gænge, uddannelsesmæssigt, gennem loyal forholden os til KOM-rapportens begrebsapparat.

Det fremgår vist at for mig at se bliver en af hovedeffekterne af KOM-rapportens begrebsapparat netop det at der er tale om et begrebsapparat. En systematisk – og tilsyneladende udtømmende – opregning af hvad matematisk kompetence består i, er en måde at udstyre også den universitære uddannelsesdebat med midlerne til at reformere på et grundlag der giver rum for kvalificerede nyskabelser. Jeg er selv fortsat usikker på om ikke klassifikationsskemaet er for fintmasket – for nuanceret – til at vi, i 'målesituationerne', kan separere de enkelte delkompetencer fra hinanden. Men selv om dette betyder at vi ikke kan tilrettelægge vore uddannelser, eller vore enkeltaktiviteter, sådan at vi NU går efter at træne lige netop ræsonnementskompetencen for sig, og NU efter at give modelleringskompetencen en speciel skalle, så tror jeg at der her er blevet tilvejebragt et begrebssæt som forener nytilgang med operationalitet i tilstrækkelig grad til at det kan give anledning til fornyelser, som også er forbedringer.

Men uanset hvor stor en rolle kompetencebegreberne kommer til at spille i de kommende års uddannelsesrettelæggelse, vil der ligge en stor udfordring for universitetsmiljøerne af bevidsthedshøjnende karakter at gå i clinch med. For reformpreset forsvinder ikke. Tænk bare på hvad der står i den nye universitetslov. F.eks. om etik! Men det er en helt anden historie.

KOM-rapporten kan hentes på:
<http://pub.uvm.dk/2002/kom/>





Forslag til universitetslov

Fra Sanders 'hemmelige plan' i august 2002 over en dramatisk høringsrunde til det endelige lovforslag pr 15. januar 2003 er der skabt politisk flertal for de grundlæggende principper i lovforslaget: Ekstern bestyrelse, der ansætter rektor, der ansætter dekan, der ansætter institutledere. Konsistorium og fakultetsråd er ude af billedet, men kan afløses af akademiske råd. På studienævnssområdet er der angående udpegning næsten status quo, idet der vælges medlemmer og formand. Universiteterne bliver selvejende institutioner. I formålsparagraffen er indføjet en forpligtelse til at samarbejde med det omgivende samfund:

'Universitetet har til opgave at drive forskning og give forskningsbaseret uddannelse indtil højeste internationale niveau inden for sine fagområder. Universitetet skal sikre et ligeværdigt samspil mellem forskning og uddannelse, foretage en løbende strategisk udvælgelse, prioritering og udvikling af sine forsknings- og uddannelsesmæssige fagområder og udbrede kendskab til videnskabens metoder og resultater.

Universitetet har forskningsfrihed og skal værne om denne og om videnskabsetik. Universitetet skal samarbejde med det omgivende samfund og bidrage til udvikling af det internationale samarbejde. Universitetets forsknings- og uddannelsesresultater skal bidrage til at fremme vækst, velfærd og udvikling i samfundet. Universitetet skal som central viden- og kulturbærende institution udveksle viden og kompetencer med det omgivende samfund og tilskynde medarbejderne til at deltage i den offentlige debat.

Universitetet skal medvirke til at sikre, at den nyeste viden inden for relevante fagområder gøres tilgængelig for videregående uddannelse uden forskning.'

Loven forudses at træde i kraft pr 1. juli 2003 og med diverse overgangsbestemmelser skal den være imple-

menteret sommeren 2005, idet 'universitetets vedtægt skal være afleveret til ministerens godkendelse senest den 1. maj 2005.'

Detaljer kan ses på <http://www.videnskabsministeriet.dk> under lovstof.

Man må håbe, at processen kan medvirke til at genoprette tilliden mellem universitetssystemet og folket.

Omrids af en gymnasiereform

I januar 2003 har undervisningsminister Ulla Tørnæs sendt en redegørelse til Folketinget, der fortæller om regeringens holdning til en reform af ungdomsuddannelserne. Reformen forudses at træde i kraft fra sommeren 2005.

De bærende elementer i redegørelsen er følgende:

'Styrkelse af de gymnasiale uddannelsers studieforberedende karakter gennem en øget vægt på fagligheden og den reelle studiekompetence - forstået som den enkeltes forudsætninger for at kunne gennemføre en videregående uddannelse.

Opdatering og udbygning af uddannelsernes almindelige karakter gennem en indholdsmæssig fornyelse af fagene, øget samspil mellem fagene og øget inddragelse af naturvidenskabelige dimensioner.

Øget fleksibilitet og bedre samordning mellem uddannelserne indbyrdes.

Med henblik på at styrke elevernes faglige og personlige kompetencer indføres med reformerne af de gymnasiale uddannelser følgende centrale elementer:

Øget vægt på mål for undervisningen og på samspil mellem de enkelte fag.

Indførelse af elevaktiverende arbejdsformer og nye eksamensformer, der afspejler målene for undervisningen.

Nye krav til elevernes aktive deltagelse i undervisningen.

Etablering af et grundforløb på _

år i de 3-årige uddannelser, som udover at lægge grundlaget for den faglige fordybelse og valget af studieretning fokuserer på elevernes almene dannelse og i praksis introducerer dem til gymnasial undervisning og metode.

Etablering af et studieretningsforløb på 2 1/2 år i de 3-årige uddannelser med styrket grundlag for faglig fordybelse.

Med henblik på at kvalificere elevernes valg af uddannelse samt at styrke sammenhængen og fleksibiliteten i uddannelsessystemet indføres følgende ændringer:

Der etableres et system af gymnasiale uddannelser med en skærpet profil for den enkelte uddannelse, men med delvis fælles struktur og med frie valgfag på tværs af uddannelserne.

I det almene gymnasiums profil lægges øget vægt på faglig viden, færdigheder og kompetencer, og uddannelsen sigter primært mod lange videregående uddannelser.

Med det nye 2-årige hf gives de unge en ny uddannelsesmulighed efter 9. klasse, som henvender sig til en gruppe af modne og målrettede unge, der ønsker et kortere og mere fleksibelt sammensat gymnasialt uddannelsesforløb, som især sigter mod korte og mellemlange videregående uddannelser, men som ikke udelukker adgang til lange videregående uddannelser.

Der etableres mulighed for skift uden tab af tid mellem de 3-årige gymnasiale uddannelser indbyrdes senest ved afslutningen af uddannelsernes grundforløb.

Der skabes et sammenhængende gymnasialt suppleringsystem, der skal sikre, at den enkelte studerende kan erhverve tilstrækkelige forudsætninger for at kunne blive optaget på og gennemføre videregående uddannelse.

I sammenhæng med reformen af vejledningssystemet skal der opnås et mere sikkert og kvalificeret uddannelsesvalg og dermed færre fejlvalg og færre afbrud med tidstab. Det betyder en hurtigere og bedre kvalificering af de unge samt en bedre uddannelsesøkonomi.'

'Samtidig med, at regeringen vil styrke fagligheden og uddannelsernes studieforberedende karakter, skal undervisningen i det almene gymnasium lægge øget vægt på dannelse i

en form, som afspejler vilkårene for mennesker i det 21. århundrede. Almindelsen har især været humanistisk og samfundsvidenskabelig i sin orientering. Begge disse tilgange skal fastholdes og uddybes. Hertil kommer, at de naturvidenskabelige og teknologiske dannelsesdimensioner skal have en stærkere placering.

Forståelsen for naturvidenskab og teknik er endvidere en væsentlig forudsætning for, at Danmark kan have en topplacering i den internationale konkurrenceevne. Derfor bør teknik og naturvidenskab have en ny og stærkere placering som en central del af den almene dannelse. Moderniseringen af naturvidenskabsundervisningen skal være med til at stimulere de unges interesse for området og udvikle deres evner til at arbejde innovativt og håndtere konkrete problemstillinger og løsninger.

Forskningsrådssystemet skal ændres

De gamle forskningsråd nedlægges og der oprettes følgende: Danmarks Forskningspolitiske Råd, Det Frie Forskningsråd, Det Strategiske Forskningsråd og Koordinationsudvalget.

‘Danmarks Forskningspolitiske Råd har til hovedformål at sikre ministeren for videnskab, teknologi og udvikling, Folketinget og regeringen en uafhængig og sagkyndig forskningspolitisk rådgivning. Rådet har alene en rådgivningsfunktion.

Det Frie Forskningsråd har både en fondsfunction og en rådgivningsfunktion. Rådet har til hovedformål at støtte konkrete forskningsaktiviteter baseret på forskernes egne initiativer og give forskningsfaglig rådgivning i tilknytning hertil. Det Frie Forskningsråd består af en bestyrelse og et antal faglige forskningsråd.

Det Strategiske Forskningsråd har både en fondsfunction og en rådgivningsfunktion. Rådet har til hovedformål at støtte forskning inden for politisk prioriterede og tematisk afgrænsede forskningsområder og give forskningsfaglig rådgivning i tilknytning hertil.

Koordinationsudvalget forestår koordineringen af den offentlige fondsfunction for forskning og har en rådgivningsfunktion om forskeruddannelse.

Rådene og udvalget skal tilsammen sikre, at alle statslige forsknings-

bevillinger, der ikke er basisbevillinger knyttet til bestemte institutioner, uddelles i åben konkurrence og efter en forskningsfaglig kvalitetsvurdering.

Ifølge et andet lovforslag forlænges funktionsperioden for Grundforskningsfonden, idet den får mulighed for at opbruge hele kapitalen.

Rettelse

Hovedtemaet for sidste nummer af Matilde var ICM2002. I introduktionsartiklen til hovedtemaet blev det omtalt, at Kina's (daværende) præsident Jiang Zemin overværede ceremonien og vicepræsidenten Jiang Li talte til forsamlingen, og jeg kom for skade at krydre dette faktum med, at det var første gang at et statsoverhovede har deltaget ved et ICM.

Lars Inge Hedberg fra Linköping fortæller, at han var tilstede ved ICM1962 i Stockholm, hvor kong Gustaf VI Adolf overrakte Fields medaljen til Lars Hörmander og John Milnor. Fra Norge fortæller Helge Tverberg, at kong Haakon var tilstede ved ICM1936 i Oslo, hvor Lars V. Ahlfors og Jesse Douglas fik Fields medaljen. Dette ICM var iøvrigt lige ved at blive aflyst, da Alf Victor Emanuel Guldberg, som skulle have været præsident for dette ICM, døde. Men man fik i hast indsat Carl Størmer (bedstefar til Erling Størmer), som gennemførte arrangementet. Det var krisetider i det hele taget - også for ICM, som i årene 1928, 1932 og 1936 havde henholdsvis 836, 667 og 487 deltagere. Prismodtager Douglas var ikke selv tilstede.

Mikael Rørdam

MatematikerNyt

ved Mikael Rørdam



Christian Henriksen har modtaget et Stenolegat fra Statens Naturvidenskabelige Forskningsråd som resultater i en treårig ansættelse ved Danmarks Tekniske Universitet.

Christian fik sin ph.d.-grad i år 2000 ved DTU under vejledning af Bodil Branner og Carsten L Petersen. Herefter arbejdede han først som amanuensis i et halvt år på DTU og derefter to år som postdoc ved Université Paul Sabatier i Toulouse under Xavier Buff.

Christian interesser sig bredt indenfor matematikken; for tiden arbejder han med iteration af C-analytiske af-

bildninger, og særlig sammenhænge mellem dynamiske rum og parameter-

rum. Christian synes om at stå på ski og fægte såvel som at læse fiktion.



Lasse Borup er pr. 1. august 2002 ansat som adjunkt ved Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet. Lasse er uddannet cand. scient. i matematik og fysik (1997) og Ph.D. i matematik (2002) fra Aalborg Universitet. Hans Ph.D. afhandling omhandler ekspansion af funktioner i wavelet- og wavelet lignende baser. Lasse er ansat under det 5 årige forskningsprojekt WAVES der ser på anvendelser af wavelet baser og mere generelle overkomplettede systemer. Fritiden bruges på venner og familie.

Boganmeldelser

ved Carsten Lunde Pedersen



H.C.Hansen: Fra forstandens slibesten til borgerens værktøj. Regning og matematik i folkets skole 1739-1958. Papers from DCN No.16. ISBN 87-91131-04-9. Dansk Center for Naturvidenskabsdidaktik, Aalborg Universitet.



Af: Lisbeth Fajstrup, Institut for
Matematiske Fag, Aalborg Universitet
e-mail: fajstrup@math.auc.dk

På et møde i komiteen for Verdensmatematikåret 2000, WMY2000, opstod ideen om at skrive dansk matematikundervisnings historie, og 10 forfattere arbejder nu med denne opgave. Målet er at have et samlet værk færdigt til ICME 2004 i København. H.C. Hansens bog handler om folkeskolens matematikundervisning indtil 1958. Kapitlerne i bogen er: 1) Regnefaget før 1900, 2) Optakt til Almen-skoleloven af 1903, 3) Debatten om matematik i Mellemskolen omkring 1903, 4) Regneundervisning i Folkeskolen 1900-1920, 5) Færdighedsbølgen, Regning i grundskolen 1920-37, 6) Erfarings- og Virkelighedsgeometri, 7) Aritmetik og Regning i Mellem-skolen, 1903-58, 8) Den Frie Mellem-skole, 9) Real- og Præliminæreksamen 1903-1958, 10) Løb tankens slibesten tør?

Sammen med bogens omfang på 200 sider illustrerer det, at det er et omfattende arbejde, H.C. Hansen har udført her. Der ligger også et omfattende kildemateriale til grund - herunder tidsskrifterne "Vor Ungdom" og "Matematisk Tidsskrift A". Lad mig med det samme sige, at jeg finder det meget spændende læsning. H.C. skriver ganske vist, at "målgruppen ikke mindst er andre seminarie-lærere og lærerstuderende", men det skal andre ikke lade sig gå på af!

Da dette jo ikke er et referat, vil jeg fokusere på nogle emner, som mange af os måske kunne have nytte af i den til tider ophedede diskussion om folkeskolen - i kantinerne rundt omkring, eller hvor det nu måtte være.

Det er slående, hvor mange af disse diskussioner, man allerede havde

for over 100 år siden. Bogens titel "Fra forstandens slibesten til borgerens værktøj" henviser (så vidt jeg har forstået) til debatten om, hvorvidt matematik har en "formaldannende" effekt - om man "bliver bedre til at tænke" af at lære matematik, eller om begrundelsen for faget er, at det er et nødvendigt værktøj, den materialdannende effekt. Når matematik overhovedet kom med i mellemskolens fagrække i 1903, skyldtes det netop, at man troede på den formaldannende effekt. H.C. Hansen sammenligner i kapitel 10 med Kompetenceprojektet. Her drejer det sig igen om at beskrive, hvad matematisk kompetence egentlig er udover rene færdigheder, og dermed - forhåbentlig - påvirke undervisningen i matematik.

Også den forkætrede ide om, at eleverne skal udvikle egne algoritmer, har mange år på bagen: I 1841 skriver Hans Schneekloth i forordet til "Opgaver i Hovedregning": "Han skal under Vejledning selv finde Operationerne og opsvinge sig til det almindelige" og "Andres Viden er for os en fremmed og død Viden; vort er kun det, som Aandens liv har frem-

avlet i os selv." (p.17 hos H.C.) Der er også citater, som viser, hvor stort et formaldannende potentiale, hovedregning har iflg. Schneekloth.

Der synes gennem tiderne at være en svingen mellem mekanisk indlæring af regler og ideen om, at eleverne skal forstå, hvad der foregår. Så måske kan man, hvis man er utilfreds med tingenes tilstand, blot læne sig tilbage og vente på, at pendulet svinger tilbage igen. Desværre er den gyldne middelvej formentlig ikke en stabil tilstand. Man kan måske også vælge at kaste sig ind i debatten og arbejdet. Gør man det, har man fine forbilleder: Poul Heegaard skrev i år 1900 lærebogen "Rumanskuelse - forberedende Øvelser"; hvor geometri delvis betragtes som en erfaringsvidenskab. Han beskriver f.eks., hvordan man tilfilar stållinealer, så de bliver retlinede, og hvordan man laver en plan flade. Ellipser finder man, når man skal lave knæ på kakkelovnsrør (p. 108). Også J. Hjelmslev er kritisk overfor geometriundervisning efter Euklid: "Der er Sætninger nok, der trænger til Bevis", så indlysende sæt-

fors. side 26



Dansk Center for
Naturvidenskabsdidaktik

Sker der noget inden for matematikken?

L'explosion des mathématiques, udgivet af Société mathématique de France og Société de mathématiques appliquées et industrielles, 103 sider, juli 2002.

og

Barry Cipra: *What's Happening in the Mathematical Sciences*, vol. 5, udgivet af American Mathematical Society, 2002.

Af Jørgen Larsen, IMFUFA RUC
email jl@ruc.dk

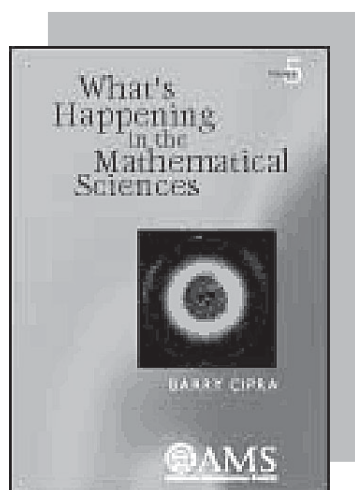


I det moderne samfund spiller matematik en altafgørende rolle på en lang række områder, men end ikke et overfladisk kendskab hertil indgår i vore dages almindelse eller i gymnasieelevernes overvejelser over studievalg. Tværtimod anses det i mange lande (heriblandt Danmark) for helt legitimt også blandt højt uddannede ikke at vide en brik om matematik.

I et forsøg på at lave om på disse forhold har de to franske matematikforeninger Société mathématique de France (SMF) og Société de mathématiques appliquées et industrielles (SMAI) bedt en række førende (franske) matematikere komme med bidrag til en antologi

L'explosion des mathématiques der skal give et billede af matematikken i det moderne samfund. Det er blevet til et hæfte med en snes småartikler, hver på ca. fem sider, med titler som (i min oversættelse): ^aHvad der er inden i mobiltelefonen', ^aSætningen om blæsebælgen', ^aHvordan man undgår at bølgerne støjer' [om radarbølger], ^aFilosoffen og matematikeren' [Husserl og Hilbert], ^aNår kunst rimer på matematik', ^aØkonometri til brug ved salg af vin eller obligationer', ^aSkal der en 11-dimensional geometri til for at forstå Skabelsesberetningen?', ^aRekonstruktion af flader ved hjælp af digital billedbehandling', ^aFra DNA til knudeteori'.

Selv om der er et stort antal skribenter indblandet, er fremstillingerne forholdsvis ensartede. Forfatterne er antagelig blevet instrueret om at de skal gøre rede for hvad matematikken bruges til i netop deres område,



at de skal gøre opmærksom på når der er tale om ganske nye matematiske resultater, og at de gerne må omtale en eller to centrale personer (altså et modtræk mod den udbredte misforståelse at al matematik forlængst er udviklet, og det nærmest af sig selv). Derimod er det begrænset hvad vi får at vide om matematikkens interne opbygning og udvikling.

Der er tale om letlæselige tekster næsten uden formler; til gengæld er der litteraturhenvisninger for dem der vil vide mere. Der er udmærkede farveillustrationer til alle artikler, og hæftet har i det hele taget et lækkert layout (omend figurtekster sat med lysegrå kursiv er en dårlig idé).

De to sidste bidrag handler om hvordan man bliver (fransk) matematiker og hvilke jobmuligheder der er, så heraf må man slutte at den udtalte målgruppe omfatter gymnasieelever. Hvis man havde en dansk 3.g klasse med matematik og fransk på

højt niveau, ville man formentlig med stort udbytte kunne benytte denne bog i et tværfagligt forløb mellem de to fag.

På anmelderens bord ligger også hæfte nr. 5 af *What's Happening in the Mathematical Sciences*, udgivet af AMS. En umiddelbar sammenligning viser at de to publikationer begge er på ca. 100 sider, og at SMF/SMAI-hæftet indeholder dobbelt så mange artikler som AMS-hæftet; i modsætning til den franske publikation er artiklerne i den amerikanske alle skrevet af samme person (Barry Cipra) og indeholder ingen litteraturhenvisninger (dog er der henvisninger til artikler i samme eller andre numre af

What's Happening...). Emnerne er i nogen grad de samme; her er et par eksempler (igen i min oversættelse): ^aTalteorien mod nye højder' [om elliptiske kurver og modulære former], ^aFoldning af proteiner får en matematisk drejning', ^aEn himmelsk pas-de-trois' [om trelegemeproblemet], ^aVerden er lille, stor, lille, stor' [om netværk (statiske eller dynamiske) i små verdener]. Der er også en artikel om en ny udlægning af en babylonisk kileskrift-tavle, samt en artikel ^aTænk og bliv rig' om Clay Mathematics Institute's syv ^aMillenium Prize Problems'.

Ved læsningen må man flere gange undre sig over hvad det kan være for en målgruppe forfatteren har haft i tankerne. Et grelt eksempel: I forbin-

fors. s. 31



Interview med Werner Fenchel

Interviewet fandt sted den 19. August 1986 i Werner Fenchels hjem på Sønderengen 110 i Søborg og blev på foranledning af Videnskabernes Selskab optaget på video i en portrætserie af danske videnskabsmænd. (GKP: Gert Kjærgård Pedersen, WF: Werner Fenchel)

Det nedenstående er en skriftlig version af en stor del af interviewet udarbejdet af Jørn Børling Olsson, som har tilføjet nogle få fodnoter til teksten.

GKP: Werner, du er født i Berlin i 1905.

WF: Fra min tidligste ungdom er ikke meget at berette.

GKP: Nu endte du jo som matematiker. Har der været andre akademikere i din familie?

WF: Faktisk nej. Min farbror var tandlæge. Det var den eneste akademiker, hvis man så kan sige.

GKP: Hvor fik du så ideen fra til at søge en så mærkelig beskæftigelse?

WF: Jeg ved ikke, hvordan det skete, at jeg begyndte at interessere mig for kemi ret tidligt og købe nogle antik-

*Af: Martin Raussen,
Institut for Matematiske Fag,
Aalborg Universitet
e-mail: raussen@math.auc.dk*



variske bøger. Jeg læste en del og lavede også eksperimenter hjemme. Senere blev jeg mere og mere interesseret i fysik. Det fortsatte i gymnasietiden til jeg var 15-16 år. Men så begyndte også matematikken at interessere mig. Det kom faktisk fra fysikken. Jeg prøvede at læse nogle mere avancerede bøger om fysik og relativitetsteori og der forekom jo en del matematik. Så var jeg nødt til at lære mere matematik og det gik også ret godt. Da jeg tog studentereksamen, var jeg ret usikker på, hvad jeg skulle vælge, fysik eller matematik. Ved universitetet i Berlin var især fysikken repræsenteret på et meget højt niveau. Fire nobelpristagere var professorer: Planck, Max von Laue, Nernst og Einstein. Da jeg skulle begynde at studere, skulle man naturligvis tage begynderforelæsninger i matematik, og så gik jeg til Einsteins forelæsninger, som var meget fascinerende. Men alligevel, kravene til matematik blev større og større og så besluttede jeg altså, at det skulle være matematik.

GKP: Var du utilfreds med fysikken?

WF: Nej, det vil jeg ikke sige. Men matematikken interesserede mig mere. I fysikken gik man til Plancks forelæsninger og man kunne altså læse i hans bøger, hvad han fortalte, men man gik der alligevel. Det var meget gammeldags. Han regnede ikke med, at de studerende kunne noget matematik og han lavede selv nogle mærkelige matematiske sager. Men man gik der... Min hovedinteresse blev matematik efter et par semestre.

GKP: Du vidste altså meget tidligt, at du skulle være naturvidenskabsmand.

WF: Det var min hovedinteresse i skoletiden og jeg negligerede sprog. Vi havde både engelsk og fransk. Jeg slap lige igennem.

GKP: Latin og græsk kunne du slippe for?

WF: Det var jo et matematisk gymnasium. Jeg læste meget ved siden af, matematik og fysik, i min gymnasietid. Jeg havde ikke megen tid til sprog.

GKP: Så blev du immatrikuleret i Berlin i 1923. Hvordan var det så at gå i gang med et studium?

WF: Det var udmærket... Der var en forelæsning, der hed "Einführung in die höhere Mathematik", som blev holdt af Feigl. Hans navn er ikke kendt mere, men han var Erhard Schmidts assistent. Den forelæsning var ... som nu. Det var ualmindeligt. Der var lineær algebra, gruppeteori, indføring af de reelle tal på eksakt måde osv. Inspirerende og meget let for mig. Samtidig var der forelæsninger i differential- og integralregning, som blev holdt af Löwner¹ og det var mere krævende.

GKP: Nu var Löwner jo ikke professor på stedet og hørte til en anden generation end de fire professorer i matematik².

WF: Ja, han var Privatdozent og meget inspirerende. Hans forelæsninger var meget krævende. Han gav sig ikke af med trivialiteter, men man kunne snakke med ham efter forelæsningen. Det var han altid parat til, og det er ham, jeg har lært mest af i min tidlige tid.

GKP: Du har engang ved din 70-års fødselsdag underholdt os med at fortælle om de sociale forhold under din studietid med Mat-Fys-studenterforeningen³.

WF: Ja, det var faktisk usædvanligt, at der fandtes sådan noget. Den matematisk-fysiske studenterorganisation var startet af krigsdeltagere, altså af ældre studerende efter at de var kommet hjem fra krigen. De følte, at

der var behov for noget samarbejde. Det udviklede sig til en særdeles effektiv organisation, der hjalp de studerende på mange måder, dels ved studievejledning og dels økonomisk og på alle mulige andre måder.

GKP: Berlin på den tid er sommetider blevet beskrevet som et noget betændt miljø.

WF: Ja, men det gjaldt ikke for universiteterne. Til trods for de elendige forhold var der et særdeles blomstrende liv for videnskaben i det hele taget i Tyskland på den tid. Det er mærkeligt nok. Forholdene var elendige. De studerende havde næsten ikke noget... Der var forskellige organisationer. For eksempel var levnedsmiddelforsyningen bedre i Østrig på den tid og nogle østrigere arrangerede en middagskantine, hvor man kunne spise meget billigt. Og der var man altså sammen, både de yngre lærere og studenterne. Det medførte også tætte personlige kontakter som var meget nyttige.

GKP: Men det var kun de yngre lærere.

WF: Ja, professorerne levede højt oppe, men de yngre lærere havde vi meget nær kontakt med. Med tiden blev det endnu nærere. Da vi blev ældre, var vi simpelthen accepteret i kredsen.

GKP: Du studerede 5 år i Berlin og sluttede med en disputats. Hvad handlede den om?

WF: Differentialgeometri. Lukkede rumkurver.

GKP: Det, vi nu kender som Fenchels sætning, var i disputatsen?

WF: Ja, jeg havde slet ikke regnet med, at man ville acceptere det. Jeg holdt et foredrag om det i kollokviet og så sagde Erhard Schmidt bagefter: "Ja, det er jo fint til en doktorafhandling!" Så udarbejdede jeg det.

GKP: Den version, man bliver præsenteret for, når man ikke ved så meget om differentialgeometri siger, at når man kører en tur i rummet og kommer tilbage igen, så har man i det mindste snoet sig 2 π gange. Det lyder i sig selv ikke overraskende.

WF: Måske ikke, men det har interesseret folk. Det var måske mere spørgsmålet, der var nyt. Resultatet havde ingen noteret før. I hvert fald har det vakt interesse.

GKP: Og så flyttede du til Göttingen i 1928. Selv om Berlin var meget fremtrædende på den tid, så var Göttingen vel...

WF: Ja, det var verdens centrum (ler), hvad matematik angår. Jeg var jo betænkelig ved at acceptere den stilling, da jeg ikke syntes, jeg var særlig kompetent til at være assistent hos Edmund Landau, som arbejdede på helt andre områder end jeg. Grunden til, at han antog mig, var vist, at han på den tid arbejdede med funktionsteori og det lå mig nærmere end talteori. Det at være assistent var meget forskelligt og afhang af den pågældende professor. Hos Landau var det en meget krævende sag. Jeg skulle sidde i alle hans forelæsninger og passe på, at han ikke sagde noget forkert. Og jeg havde pligt til at afbryde ham omgående, hvis et eller andet ikke var i orden, lige meget hvad. Efter forelæsningen gik vi hjem til ham og gennemgik hans post. Han fik en masse breve og folk sendte afhandlinger ind til bedømmelse. Så gik han det hele igennem og sagde til mig: "Det svarer De på!" Når han forberedte sine forelæsninger, skulle vi gå hele manuskriptet igennem, ord for ord. Det tog også sin tid. Og når han skrev afhandlinger, så lavede han et udkast, vi skulle gå igennem for at finde forbedringer. Så skrev han et nyt udkast, ofte en 5-6 gange i alt. I matematikken skulle hvert ord være præcis rigtigt. Det var et temmelig anstrengende hverv, jeg havde dér.

GKP: Du omtaler Landau som en perfektionist. Havde de andre professorer i Göttingen, Hilbert og Courant, en anden stil?

WF: Ja en helt anden stil! Hilbert holdt stadig forelæsninger. Han havde vist leukæmi. Først skulle han spise rå lever i lang tid og så skaffede en af Göttingens medicinere ham noget medicin, som ikke var i handlen endnu, fra en canadisk kollega. Derfor var Hilbert altså i stand til at holde forelæsninger endnu, da jeg var der. Jeg hørte et par af hans forelæsninger i slutningen af tyverne.

GKP: Men ellers var det vel Courant, der efterhånden tog over?

WF: Ja, først og fremmest organisationen af det nye matematiske institut, som blev færdig i 1929. Han spillede en afgørende rolle, var direktør for det nye institut og administrerede det hele perfekt sammen med Neugebauer. De to syntes, at jeg skulle have lidt bedre tid og skaffede mig et Rockefeller stipendium. Det var naturligvis en stor lettelse for mig.

GKP: Var det de eneste rene forskningsstipendier dengang?

WF: I Tyskland var der slet ingen penge til sådan noget. Jeg valgte så at tilbringe et semester i Rom og et i København. I Rom var det hovedsagelig Levi-Civita, der havde gjort nogle fremragende ting i differentialgeometri og jeg havde en udmærket tid der.

GKP: Og så kom du til Danmark for første gang i marts 1931.

WF: Jeg havde jo haft kontakt med danske matematikere før det. I 1929 kom Harald Bohr til Göttingen og holdt nogle fremragende forelæsnings, som fængslede mig meget. Børge Jessen var der også i nogen tid og Jakob Nielsen på et kortere besøg. Dem fik jeg meget tæt kontakt med under mit første ophold i København, og ved den lejlighed lærte jeg også Bonnesen at kende. Det viste sig, at Bonnesen og jeg havde nogle fælles interesser, som senere resulterede i en bog. Det var faktisk Neugebauer, der foreslog, at vi skulle sætte os sammen og skrive om konveksitet.

GKP: Bonnesen må have været en ældre mand og du den unge løve.

WF: Ja, men på en måde supplerede vi hinanden udmærket. Jeg havde påtaget mig at gennemgå litteraturen på det udmærkede bibliotek i Göttingen. I foråret 1932 kom jeg igen til København i den tyske forårsferie, og så begyndte vi at skrive. Vi delte stof-fet mellem os. Senere i 1932 kom Bonnesen til Göttingen. Og så kom nazitiden...

GKP: Lad det ligge et øjeblik. Jeres bog "Theorie der konvexen Körper" ser jo ikke ud af meget, 150 sider, men den har jo åbenbart glædet mange

mennesker. Springer genoptrykte den i 1974, fyrré år efter. Det sker kun sjældent⁴.

WF: Tilsyneladende har den haft mange anvendelser. Det hænger sammen med, at konveksitetsteori har spillet en rolle på mange forskellige områder. I bogen har folk kunnet finde både litteraturhenvisninger og fremstillinger af visse problemkrede. Jeg har ofte set henvisning til den, også i nyere litteratur.

GKP: Så kom det grimme år 1933, hvor du blev smidt ud af Göttingen.

WF: I foråret '33 blev jeg afskediget, men fik løn i endnu 2-3 måneder. Heldigvis kom Harald Bohr til Göttingen og inviterede mig til København. Jeg kom hertil, vistnok i september '33. I december kom min kone Käte⁵ og vi blev gift i Gentofte samme måned. Vi var jo studiekammerater.

GKP: Men der var ikke meget at gifte sig på. Du havde ingen stilling her og måtte slå dig igennem de første par år.

WF: Ja, Harald Bohr skaffede nogle penge og så kom også Neugebauer hertil i slutningen af året. Allerede i Göttingen havde jeg hjulpet ham med redaktionen af Zentralblatt für Mathematik. Han fik forlaget Springer til at lade ham flytte redaktionen til København. Jeg hjalp så Neugebauer de år, han var her, indtil 1938, hvor han nedlagde redaktionen⁶. Det gav en lille indtægt og i de år oversatte jeg også Jakob Niensens bog "Mekanik" til tysk. Jeg syntes, det var en morsom opgave, og så lærte jeg jo mekanik på den måde (ler). Sådan klarede vi os til 1937, hvor jeg blev ansat ved adgangskurset til Polyteknisk Læreanstalt. Jobbet var lidt uvant for mig. Man skulle gennemgå gymnasie-stof-fet i matematik i løbet af et år for et meget blandet publikum.

GKP: Det bringer os frem til 9. April 1940. Hvilken umiddelbar betydning fik besættelsen for Käte og dig?

WF: Ikke så meget, som man umiddelbart kunne forvente. Vi blev ringet op af Harald Bohr om morgenen, hvor han fortalte, at der var tyske fly-

vere over landet. Men vi var jo magtesløse.

GKP: Käte har fortalt mig, at I fra den tid lagde jeres sprog om.

WF: Jeg kan ikke huske præcist hvornår vi holdt op med at tale tysk. Det var en vanskelighed, at Kåtes mor var her fra '37-'38 og hun kunne jo ikke dansk. Så vi var ikke så konsekvente med at tale dansk. Jeg havde undervist på dansk i flere år og for Käte var det heller ikke noget problem. Hun havde hjulpet Harald Bohr i længere tid og der blev talt dansk. I 1942 blev der opslået et lektorat ved Københavns Universitet med henblik på at undervise i geometri og Harald Bohr anbefalede mig at søge. Jeg vidste ikke, hvordan det ville gå, om tyskerne ville blande sig i det, men jeg fik stillingen. Dog fortsatte jeg med adgangskurset, for jeg fik kun 3000 kr. om året for lektoratet, og det var ikke til at leve af. Men det var en regulær stilling og jeg beholdt den til 1947. Da vi måtte forlade landet i 1943, blev jeg ikke afskediget. Min løn blev betalt hver måned og i lektionskatalogen stod "Læser ikke i dette semester". Vi skulle over sundet med lodsåden fra Dragør, men det var ikke lodsén, der førte båden. Skipperen kendte ikke meget til sundet, så efter nogen tid sad vi fast på grund. Vi blev så kaldt op fra under dækket for at stille os i den ene side af båden, og sådan kom vi fri. Efter lang tid kom vi til Falsterbokanalén. Der blev vi modtaget meget venligt af de svenske officerer. Vi blev indkvarteret i kasernen. Næste dag skulle vi til politimesteren, som spurgte, om vi havde nogle slægtninge eller venner i Sverige, og så sagde jeg: "Marcel Riesz i Lund". "Ham kender jeg," sagde politimesteren. "Jeg ringer til ham." Og Marcel Riesz sagde: "Sengene er parat". Vi måtte låne 10 kr. af politimesteren for at køre til Lund, hvor vi blev indkvarteret på matematisk institut og senere i en lejlighed med andre danske flygtninge. Det var forbavsende let at klare sig i Sverige. Der var en lov fra arbejdsløshedstiden, at myndighederne kunne ansætte kvalificerede folk efter behov til et bestemt arbejde for en løn på 200 kr. Jeg fik til opgave at holde forelæsninger i Lund og Käte hjalp til med bibliotekets katalog. Vi fik 200 kr. hver og det kunne vi leve af. Men der var én vanskelighed. Før

vi tog til Sverige fortalte Svend Bundgaard os, at de ikke ville tage børn med på overfarten. Han tog altså Tom⁷ til Djursland, hvor de havde et sommerhus. En bonde tog sig af Tom, men efter et halvt år kom tyskerne der, og bondens søn var i modstandsbevægelsen. Det var ikke godt for Tom. Han blev transporteret til København og fra der med modstandsbevægelsens hjælp sendt til Malmø. Det var blevet vanskeligere at komme over sundet. Man kunne ikke sejle helt over mere, men mødte nogle svenske politibåde ude på vandet. Tom havde fået nogle sovepiller og kom med en politibåd til Malmø. Det var vist i april '44.

GKP: Du har fortalt, at både Käte og du var skolelærere.

WF: Vi underviste begge i matematik ved den danske skole i Lund. Jeg måtte engang tage fysik; det var ikke så rart. Vi kom ikke hjem med det same i maj '45, da krigen var forbi, fordi folk skulle jo tage deres studentereksamen. Der blev undervist på dansk og med danske lærebøger. I årgang '44 var Erling Olsen og Ove Nathan i klassen. De første år efter krigen var jeg stadig lektor ved universitetet og havde adgangskursus Da Pal døde i '47 fik jeg det docentur ved Polyteknisk Lærestalt i matematik for kemiingeniører.

GKP: Du fik dansk indfødsret i 1948.

WF: Dengang var reglen, at man skulle have boet i andet i 15 år, før man kunne få indfødsret, så jeg var kun konstitueret i docenturet indtil da. Senere blev tidsrummet jo nedsat til 5 år. I 1952 forlod Jakob Nielsen Lærestalten for at blive Harald Bohrs efterfølger og jeg blev udnævnt til professor i mekanik ved Lærestalten.

GKP: Nu ved jeg, at du senere er blevet blandet ind i Jakob Nielsens værker.

WF: Det var langt senere. Men jeg har jo haft nær kontakt med ham. I en af de store afhandlinger takker han mig for hjælp.

GKP: I 1950-51 var du i USA. Var det for danske penge?

WF: Jeg fik jo orlov og skulle betale en vikar, men der blev lidt til overs. Det var amerikanerne, der betalte. På University of Southern California betalte de mig som guest lecturer; beskedent, men man kunne leve af det. Senere kom jeg til Stanford med 3\$ på lommen. Segal hjalp mig med det samme. Der holdt jeg nogle forelæsnings- og bagefter deltog vi i den internationale matematikerkongres i Cambridge Massachusetts. Det var sådan at Lars Gårding, som jeg kendte godt fra min tid i Lund, og hans kone kørte os rundt i USA i bil og bagefter til østkysten. Efter kongressen havde jeg en indbydelse til Institute for Advanced Study i Princeton, et stipendium for et semester. Bagefter blev jeg, da min orlov var forbi, inviteret af Tucker til at holde forelæsnings ved Princeton University. Min orlov blev så forlænget.
[Pause i båndet]

GKP: Jeg har fundet dem [forelæsningsnoterne fra Princeton] i vores bibliotek. De blev jo aldrig "rigtigt" udgivet.

WF: Jeg skulle nok have skrevet noget mere. De er blevet brugt meget, men så kom der jo Terry Rockafellers bog "Convex analysis", som dækker det samme.

GKP: Han skriver i forordet, at han har indarbejdet dine noter i fremstillingen og at han betragter dig som en "honorary coauthor".

WF: Det er rigtigt. Han benyttede dem meget stærkt. Dualitetsteorien mellem konvekse funktioner blev indført i min artikel fra '49 i "Canadian Journal of Mathematics" og udvidet på flere måder i noterne. De går meget videre end artiklen.

GKP: I 1956 kom du til Københavns Universitet.

WF: Ja, som Nørlunds efterfølger. Jakob Nielsen gik også af i 1955, fordi han havde så meget internationalt arbejde, og Thøger Bang blev hans efterfølger.

[Herefter tales om studiereformerne og studentoprøret og om Videnskabskabernes Selskab. Denne del er udeladt her. WF siger ikke særlig meget i slutningen af samtalen.]

GKP: I 1965 havde du et meget vellykket møde om konveksitetsteori i København. [Colloquium on Convexity]

WF: Jeg kan ikke huske, hvornår jeg fik ideen. Måske har jeg snakket med Jessen eller Brøndsted.

I hvert fald lykkedes det at få penge fra Natos Advanced Study Institute Programme. De betalte bl.a. rejserne for deltagerne.

GKP: Det er en ganske imponerende række af mennesker, du fik samlet... Endnu en ting skal du ikke slippe for. Redaktionen af Math. Scand.

WF: Jeg hjalp Svend Bundgaard med redaktørarbejdet og tog mig af artiklerne indenfor mit område..

GKP: Til din 70-årsdag kom et særligt nummer af Math. Scand. Det indeholdt et sjældent foto af dig.

WF: De havde ikke spurgt mig. Leif Kristensen spurgte min søn Tom og det var en overraskelse for mig.

GKP: Du skal have mange tak.

Noter:

- ¹ Senere kendt under navnet Charles Loewner.
- ² Professorerne var Erhard Schmidt, Issai Schur, Richard von Mises, Ludwig Bieberbach
- ³ Se også Fenchels artikel: *Erinnerungen aus der Studienzeit*, Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980, pp. 155—166, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1980.
- ⁴ En engelsk version af bogen blev udgivet senere endnu, i 1987.
- ⁵ Født i 1905 som Käte Sperling. De var gift i 50 år til Kates død i 1983. Käte forskede i gruppeteori og var en overgang lektor ved Matematisk Institut i Århus.
- ⁶ I 1939 blev Egon Ullrich, Giessen, hovedredaktør af Zentralblatt og Harald Bohr forlod redaktionskomiteen.
- ⁷ Tom Fenchel, født 1940. Tom er nu professor ved Marinbiologisk Laboratorium, Københavns Universitet.

Begivenheder

ved Poul Hjorth



Vinder-seminar: Georg Mohr Konkurrencen 2003

Søndag d. 23. februar 2003, 14:30 -
Tue Feb 25 2003, 16:45
AAUAM Fredrik Bajers Vej 7G,
room G5-112

I årets Georg Mohr Konkurrence deltog ca. 850 elever fra de gymnasiale uddannelser. De 20 vindere deltager i et vinder-seminar, som kan betragtes som første trin i en "yderligere træning", idet der udtages elever blandt de 20 vindere, og disse vil gå videre til yderligere internationale konkurrencer. Se <http://www.math.auc.dk/events/GeorgMohr.htm>

AUIMF CONFERENCE : CRAG2003

Mon Jun 2 2003, 11:00 Aud. E
Conference on representation theory for algebraic groups University of Aarhus, Aarhus Denmark June 2 - June 6 (day of departure) 2003
Organized by Pia Abrahamsen
Se <http://www.imf.au.dk/CRAG2003/conference.html>

Dynamics in the Complex Plane:

An international symposium in honour of Bodil Branner
19-21 juni 2003, Søminestationen, Holbæk

In the advent of Bodil Branners 60-th anniversary and the 10th anniversary of the ASI Hillerød Sommerschool on Real and Complex dynamics an international symposium on holomorphic dynamics.

Organised by C.L. Petersen, P.G. Hjorth, and A. Douady.
Se <http://mmf.ruc.dk/~lunde/Bodilfest/index.htm>

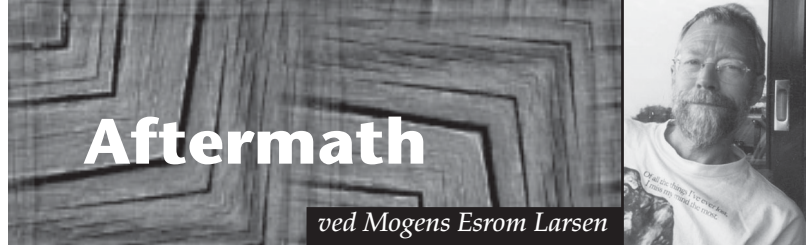
Invitation til matematikundervisere

Som bekendt afholdes ICME 10 (10. internationale kongres om matematikundervisning) i København, 4-11/7 2004. Den nordiske kontaktkomité for ICME 10 organiserer bl.a. den fællesnordiske præsentation, som forventes at tiltrække mellem 500 og 1000 af kongressens deltagere. I den forbindelse inviteres bidrag fra matematiklærere (individuel eller i grupper) som belyser den faktiske praksis i nordisk matematikundervisning. Det kan gøres i form af foredrag, workshop eller udstilling. Forslag til bidrag skal indsendes inden 30. juni, og besked vedr. accept gives senest 1. november. Det fulde opslag kan findes på ICME 10's hjemmeside www.icme-10.dk (se under "Organisation", "Nordic Contact Committee").

SEVENTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ORTHOGONAL POLYNOMIALS, SPECIAL FUNCTIONS AND APPLICATIONS

AUGUST 18-22 2003,
COPENHAGEN, DENMARK

The Department of Mathematics at the University of Copenhagen is happy to host the seventh International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (OPSFA). The Department of Mathematics belongs to the building complex "The H.C. Ørsted Institute", devoted to mathematics, physics and chemistry. It is situated 2-3 kilometers away from the city centre with frequent bus connections. The participants are accommodated in various hotels in central Copenhagen.
Se <http://www.math.ku.dk/conf/opsfa2003/>



AFTERMATH

LØSNINGER

Differentialkvotienten

Første opgave er foreslået af Leif Mejlbro, men den kan findes hos Loren C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*, Springer Verlag, New York (1983), side 32.

Man skal bestemme $f'(1)$, hvor funktionen defineres for $x \in \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1 + \tan^x y}$$

Løsning

$$f'(1) = 0.$$

Regnestykket

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1 + \tan^x y} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1 + \cot^x y} = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^x y dy}{\tan^x y + 1} &= \\ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 + \tan^x y} + \frac{\tan^x y dy}{1 + \tan^x y} \right) dy &= \\ \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

viser, at funktionen er konstant.

De øvrige opgaver er fra samlingen, Ed Barbeau, *After Math*, Wall & Emerson, Inc., Toronto (1995).

Kugleflytning

Tre tasker indeholder hhv. 6, 7 og 11 marmorkugler. Det er tilladt at flytte nogle af kuglerne fra en taske til en anden, men kun sådan at antallet af kugler i den anden taske derved fordobles. Nu skal man flytte kuglerne i så få træk som muligt, så hver taske ender med at indeholde 8 kugler.

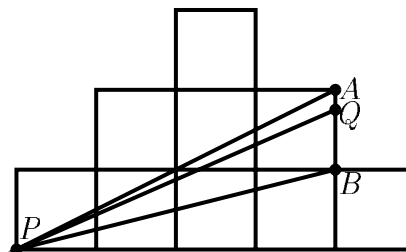
Løsning

Det kan gøres i 3 træk, nemlig

$$(6, 7, 11) \rightarrow (6, 14, 4) \rightarrow (12, 8, 4) \rightarrow (8, 8, 8)$$

Det halve kan være nok

Gennem tårnet af 9 kvadrater tegnes fra P en linie, som halverer arealet af tårnet.



Linien PQ , hvor $AQ : AB = 1 : 4$, deler tårnet i lige store dele. Thi der er 4 kvadra-

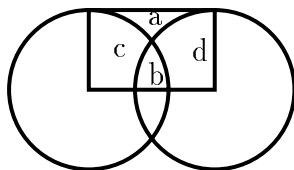
ter over AP og 3 under BP , og $\triangle ABP$ har arealet 2, så linien skal trækkes, så arealet af $\triangle AQP$ er $\frac{1}{2}$.

Overlappet

To cirkler med radius 1 overlapper hinanden sådan, at de to arealer mærket a og b er lige store. Hvor langt er der mellem cirklernes centre?

Løsning

$$\frac{\pi}{2}.$$



Rektanglets areal er

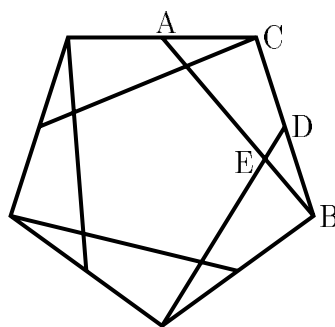
$$a + b + c + d = 2b + c + d = (b + c) + (d + c) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Men arealet er også afstanden mellem centrene.

Femkanterne

Hvert hjørne af en regulær femkant forbindes

med midtpunktet af en af de modstående sider som vist på figuren. Hvad er arealforholdet mellem den grå femkant, p , og den givne femkant?



Løsning

$$\frac{7 + \sqrt{5}}{22}.$$

Lad os sige, at siden i den ydre femkant er 1.

Da $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, er med $x = DE$ $BE = 2x$. Sæt $u = AB$ og y siden i den lille femkant. Så er $u = y + 3x$.

Cosinusrelationerne på $\triangle ABC$ giver

$$u^2 = 1 + \frac{1}{4} + \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}+4}{4}$$

De ensvinklede trekanter giver også, at $x = \frac{1}{4u}$. Men så er

$$y = u - 3x = u - \frac{3}{4u} = \frac{4u^2 - 3}{4u}$$

Forholdet mellem arealerne er derfor

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{(4u^2 - 3)^2}{16u^2} = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{4(\sqrt{5} + 4)} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{5})(4 - \sqrt{5})}{2(4 + \sqrt{5})(4 - \sqrt{5})} = \frac{7 + \sqrt{5}}{22} \end{aligned}$$

NYE OPGAVER

En potenssum

Lad

$$S = \sin^4 2^\circ + \sin^4 7^\circ + \sin^4 12^\circ + \cdots + \sin^4 87^\circ$$

og

$$T = \sin^4 3^\circ + \sin^4 8^\circ + \sin^4 13^\circ + \cdots + \sin^4 88^\circ$$

Bestem værdien af $S + T$.

En sum af brøker

Bestem summen

$$S = \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n)=1}}^{\infty} \frac{1}{mn(m+n)}$$

Tælling

Vis, at for ethvert naturligt tal, n , findes en cirkel, som indeholder netop n punkter i planen med heltallige koordinater.

Utilstrækkelige tal

Vis, at der er uendelig mange naturlige tal, der ikke kan skrives som sum af et helt kvadrattal og et primtal.

En ulighed

Lad $m > 1$ og $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ og

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

Vis, at

$$\sum_{n=2}^m \left(\frac{A_n}{n} \right)^2 \leq 12 \sum_{n=1}^m a_n^2$$



(Billedtekst: Gulvet i Hafnias forhal. Foto: Jan Parner, Codan A/S)