

Matilde 14 foreligger ikke som samlet PDF-fil. Dette dokument er en samling af de Word- (konverteret til PDF) og PDF-filer der var at finde i Matilde arkivet vedr. Matilde 14.

MATH-AU
2015-11-18

Af: Johan P. Hansen, Institut for Matematiske Fag, Århus Universitet
e-mail: matjph@imf.au.dk
Nytiltrådt formand for Dansk Matematisk Forening

Samarbejde mellem de matematiske institutter - nødvendigt, ønskeligt og muligt.

I matematik skabes der flere og flere gode samarbejdsrelationer mellem forskere på tværs af institutioner i ind- og udland. Fællesskaber omkring forskningsopgaver - men næsten aldrig om uddannelsesopgaver. Det er kendetegnede at relationerne er mellem individer og ofte cementerede af eksterne bevillinger.

Dansk Matematisk Forening er et forum og en katalysator for fagligt samarbejde mellem matematikere. De nyere initiativer i form af vort blad Matilde og vore sommerskoler, der kan kaldes etablerede succeser, viser sig allerede nu at have givet anledning til flere varige faglige personlige kontakter.

Den store udfordring for matematik i Danmark er imidlertid at få de matematiske institutter til at samarbejde om uddannelse og forskning, at udbygge samarbejdet fra det personlige til det institutionelle niveau.

Dansk Matematisk Forening har med held for nylig skabt et samarbejde mellem landets universiteter omkring en konkret uddannelsesopgave, nemlig konsortieløsningen for den faglige supplering i gymnasieskolen. I første omgang for matematiks vedkommende, men vores model dannede skole indenfor naturvidenskab. Jeg tror at Dansk Matematisk Forening også kan være med til at løfte en tilsvarende aktuel opgave omkring en fagligt forsvarlig gymnasielærerkompetence - deklARATION heraf er blevet strengt nødvendig efter liberaliseringen af vilkårene for ansættelse i gymnasieskolen.

Netop nu er Videnskabsministeriets notat af 29. august: *Fremtidens universitetspolitik* aktuel (kan læses på Forskerforums hjemmeside www.forskeren.dk).

Notatet lægger på den ene side op til et betydeligt samarbejde mellem universiteterne på uddannelsessiden omkring bacheloruddannelsen og anviser instrumentet *Landsdækkende studieudvalg* til i universitetsregi at opnå dette samarbejde. På den anden side skal profilerede kandidatoverbygningsuddannelser med et højt fagligt niveau være en konkurrenceparameter for universiteterne.

Universiteternes uddannelsesopgave er i henhold til notatet stadig forskningsbaserede bachelor- og kandidatuddannelser, forskeruddannelser og forskningsbaseret efter- og videreuddannelse på højeste internationale niveau.

Uddannelsesstrukturen skal omlægges med en reel og fuld implementering af treårige modulopbyggede bacheloruddannelser efterfulgt af toårige kandidatoverbygningsuddannelser. Bacheloruddannelsen skal give mulighed for at vælge mellem flere kandidatoverbygningsuddannelser og vælge mellem universiteterne. Beslægtede uddannelser skal altså have en fælles identitet. Det må implicere *deklarerede og veldefinerede bacheloruddannelser i matematik*.

Notatet anviser det nye begreb *Landsdækkende studieudvalg*. Dets funktion er blandt andet netop at sikre deklARATIONEN af uddannelserne således at uddannelser med samme betegnelse giver de samme kvalifikationer og kompetencer. Landsudvalgene skal være med til at øge det tværgående samarbejde universiteterne indbyrdes og mellem universiteterne og det omgivende samfund. De landsdækkende studieudvalg nedsættes af dekanerne og sammensættes af repræsentanter for universiteterne, afgangere, kandidater og udenlandske sagkyndige. Konstruktionen flytter således beslutningskompetence og opgaver fra staten til universiteterne.

Som instrument er et landsdækkende studieudvalg næppe tilstrækkeligt. Formentlig vil en bevillingspolitik, der understøtter og ikke hæmmer samarbejde omkring uddannelserne, være et helt nødvendigt supplement.

Det er ønskeligt, nødvendigt og en overkommelig opgave at deklare en bacheloruddannelse i matematik - som fag er matematik robust i kraft af sin historie og internationale kvalitetsnormer. Der er forskelle på de danske universiteter, men der er en tilgrundliggende fælles opfattelse af kvalitet, en anerkendelse af basale internationale standarder, som også slår igennem i vore uddannelser.

Konstruktionen med det landsdækkende studieudvalg i *universitetsregi* fortjener anerkendelse - det fagligt koordinerende arbejde kan ikke løses uden for universiteterne. Dansk Matematisk Forening kan spille en aktiv rolle for at formidle dette samarbejde for matematiks vedkommende.

Del I

Om ICM



Matilde 14 / Oktober 2002

*Af: Mikael Rørdam, Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet
e-mail: mikael@imada.sdu.dk*

ICM2002

ICM, International Congress of Mathematicians, holdes hvert fjerde år, og er vel den største *event* i den matematiske verden. I år blev ICM holdt i Beijing d. 20.-28. august med deltagelse af ca. 4000 matematikere. Matilde har valgt at lade denne kongres danne hovedtema for indeværende blad, både fordi ICM faktisk *er* en stor matematisk begivenhed, men også fordi flere danskere har repræsenteret de danske farver på en måde, som fortjener omtale.

Jeg deltog selv i kongressen, og det var faktisk det første ICM, jeg har deltaget i. Jeg vil her kort rapportere om nogle indtryk fra kongressen og fra det land, den blev holdt i.

Ugen forud for hvert ICM holdes et stort antal (47 denne gang) specialiserede satellit konferencer. Selv deltog jeg i konferencen "Operator algebras and applications", som blev holdt i Chengde ca. 200 km. nord for Beijing. Chengde er kendt for at huse Kejserens Sommerpalads, en kæmpe residens, hvortil kejseren og hans følge kunne søge tilflugt fra Pekings sommervarme. Jeg skal spare læserne for en omtale af de operator algebraiske oplevelser, jeg blev til del, og blot sige, at vi deltagere nød de kejserlige omgivelser, og at jeg var imponeret over den talmæssigt store deltagelse af unge kinesiske matematikere.

På vejen fra Chengde til Beijing og det egentlige ICM stoppede vi ved den Kinesiske Mur, et bygningsværk der er mere særpræget end smukt eller funktionelt. De kinesiske guides påstår hårdnakket, at deres stolte mur er det eneste bygningsværk, som kan ses med det blotte øje fra Månen, og de fortæller bevæget om Neil Armstrongs besøg ved muren. Så stor synes vi nu ikke, at den var (altså muren)... Men flot ligger den, og man får da også historiske sommerfugle i maven.

Kongressens indledtes tirsdag eftermiddag d. 20. august med åbningsceremonien, som blev holdt med imponerende kinesisk iscenesættelse i Folkets Hus ved den enorme Tiananmen Square (Den Himmelske Fredsplads). For første gang nogen sinde deltog et statsoverhoved ved åbningsceremonien til et ICM: Kinas præsident (Jiang Zemin)

overværede det meste af åbningsceremonien og hans vicepræsident (Lanqing Li) holdt en tale til forsamlingen (umiddelbart før S. Cherns tale, som omtales udførligt andetsteds i bladet).

Den måske vigtigste begivenhed ved ICM er overrækkelsen ved åbningsceremonien af Fields medaljerne og Nevanlinna prisen. Fields medaljen er – indtil den nyindstiftede norske Nordsøolie finansierede Abel pris måske overhaler den – den mest prestigefyldte pris i matematik, og den gives som bekendt kun til personer under 40 år. Nevanlinna prisen gives til matematikkens anvendelser. En 12-årig tradition med at uddele prisen til 4 matematikere ved hvert ICM blev brudt, og i år var der kun to medaljemodtagere: Laurent Lafforgue og Vladimir Voevodsky. Nevanlinna prisen gik til Madhu Sudan. Vi bringer omtaler af alle tre matematikere og deres bedrifter under dette hovedtema.

Et andet eksempel på den betydning, Kina tillægger ICM, sås i fjernsynsdækningen af begivenheden. Åbningsceremonien blev dækket af nationalt TV, som var det et storpolitisk topmøde! Fjernsynet bragte også et langt interview med matematikeren S. Chern. Dette siger selvfølgelig noget om et nationalt fjernsyn, som ikke føler sig bundet af seer-målinger, men det siger også noget om et stort land, som placerer matematik helt fremme i frontlinien.

Med til den udsøgte kinesiske iscenesættelse hører også den imponerende eskorte ICMs knapt 100 busser med kongresdeltagere fik til og fra åbningsceremonien. Busserne kunne således køre i en samlet kortege de ca. 15 km hver vej, og politiet sørgede for at spærre trafikken ved lyskryds, motorveje mm, så vi kunne komme trygt og hurtigt frem til vores bestemmelsessted. Faktisk foregik det hele så effektivt, at det ikke skabte nævneværdige køer eller trafikkaos, men alligevel...

Dagen efter, d. 21. august begyndte selve kongressen. Der var 20 inviterede plenar foredragsholdere, som hver holdt en times foredrag fordelt på de forskellige formiddage. Om eftermiddagen holdtes sessionsforedrag (fordelt på 19 sessioner) i ca. 8 parallelle spor. Det er en meget stor ære at blive inviteret til at holde et sessionsforedrag og, begribeligvis, en endnu større ære at holde et plenar foredrag. (En ICM invitation til et sessionsforedrag vil på amerikanske universiteter normalt udløse ekstra trin på forfremmelsesstigen!)

Som omtalt i tidligere numre af Matilde var vores egen Uffe Haagerup (Syddansk Universitet) en af de 20 plenar foredragsholdere. Jeg fortæller nedenfor lidt om hans foredrag. Lars Hesselholt (uddannet ved Århus Universitet, og nu professor ved MIT) holdt sessionsforedrag i topologisessionen. Ib Madsen var chair for denne session, og Vagn Lundsgaard Hansen holdt foredraget "From eight to infinity" i sessionen *Mathematics Education and popularizing Mathematics*. Vi bringer artikler af Lars Hesselholt, Ib Madsen og Vagn Lundsgaard Hansen om deres bedrifter.

Udover omtalen af Haagerups foredrag, vil jeg ikke komme ind på de utrolig mange foredrag ved ICM, som udgør det bærende element i kongressen. Jeg må dog lige nævne, at John Nash var til stede og holdt foredrag. Jeg kan roligt sige, efter at have hørt

foredraget, at Nash ikke har fået Nobelprisen for sit fortæller talent. Heller ikke indholdet i hans foredrag, som omhandlede spilteori med agenter (!), virkede overbevisende. Nash har i sin ungdom ydet fantastiske bidrag til matematikken, og hans liv har med rette pirret vores nysgerrighed.

Uffe Haagerups foredrag: *Random matrices, free probability and the invariant subspace problem relative to a von Neumann algebra.*

Uffe Haagerup holdt plenar foredrag på konferencens tredje dag, d. 22. august. Emnet for foredraget var forskellige temaer over begrebet fri sandsynlighedsteori og stokastiske matricer – en klassisk disciplin, som gennem det banebrydende arbejde af Voiculescu i begyndelsen af 1990'erne er blevet sammenkædet med operatoralgebra. Haagerups foredrag fokuserede på to problemsstillinger: et helt nyt resultat med Steen Thorbjørnsen om et asymptotisk approximationsresultat for stokastiske matricer, og et længerevarende projekt, der relaterer sig til det såkaldte *invariant subspace problem*.

Ved en (eller flere) stokastisk matrice(r) forstår man en (eller flere) n kryds n matrice(r), hvis indgange er stokastiske variable, alle over samme sandsynlighedsfelt (Ω, P) . Interessen samler sig om den situation, hvor vi har r sådanne matricer, der er selvadjungerede i hvert punkt i Ω , og hvor de rn^2 reelle stokastiske variable, der fremkommer ved at tage de diagonale indgange hhv. real- og imaginærdelen af de ikke-diagonale indgange (over diagonalen) i de r matricer, er uafhængige Gaussisk fordelte stokastiske variable (med middelværdi 0 og passende varians). Spørgsmålet er nu, hvordan et sådan sæt af r matricer opfører sig, når n (matrix størrelsen) går mod uendelig.

Voiculescu har i sin fri sandsynlighedsteori en model af r selvadjungerede begrænsede operatorer på et uendeligdimensionalt Hilbertrum, som er frie fra hinanden og semicirkulært fordelt mht. en sportilstand (defineret på von Neumann algebraen frembragt af de r selvadjungerede elementer). Haagerup og Thorbjørnsen viser, at sættene af r stokastiske matricer, for n gående mod uendelig, næsten sikkert (altså med sandsynlighed 1) konvergerer i operatornorm (fortolket passende!) mod Voiculescus frie semicirkulært fordelte selvadjungerede operatorer.

Dette resultat giver først og fremmest et stærkt asymptotisk billede af sættene af uafhængige Gaussisk fordelte stokastiske matricer, men det fortæller også noget om en berømt C^* -algebra, $C_{\text{red}}^*(F_r)$, hørende til den fri gruppe F_r med r generatorer. Denne C^* -algebra fremkommer ved at kigge på den venstre regulære repræsentation af F_r på Hilbertrummet $\ell^2(F_r)$ og heri tage afslutningen af det lineære span af billedet af F_r . C^* -algebraen $C_{\text{red}}^*(F_r)$ er således en fuldstændiggørelse af gruppe-ringen $\mathbb{C}F_r$. Haagerup og Thorbjørnsens resultat fortæller løst sagt, at $C_{\text{red}}^*(F_r)$ kan approximeres med matricer. Mere præcist gælder, at denne C^* -algebra kan indlejres i kvotienten $\mathbf{P}/\mathbf{M}$, hvor $\mathbf{P}$ er C^* -algebraen bestående af begrænsede følger $\{T_n\}$, hvor hvert T_n er en n kryds n matrice, og hvor $\mathbf{M}$ er idealet i $\mathbf{P}$ bestående af de følger $\{T_n\}$, hvor normen af T_n konvergerer mod 0.

Det berømte åbne problem (formuleret af Halmos m.fl.) kaldet *the invariant subspace problem*, spørger om enhver begrænset operator på et uendelig dimensionalt separabelt Hilbertrum har et ikke-trivielt invariant afsluttet underrum. Et fascinerende elementært spørgsmål, som meget vel kan have negativt svar. Haagerup har betragtet et relativt problem, hvor spørgsmålet er, om der til ethvert element T i en von Neumann algebra $\mathbf{M}$ findes en ikke-triviel projektion P i $\mathbf{M}$ således at $TP = PTP$ (hvilket er den naturlige omformulering af et invariant underrum). Dette spørgsmål kan ifølge Haagerup i overraskende mange tilfælde besvares bekræftende, og det er endvidere indkredset hvor mulige modeksempler kan befinde sig – hvis de findes. Den bagvedliggende teori berører *spectral capacities*, *Brown measures*, og metoder fra fri sandsynlighedsteori.

Interesserede læsere kan downloade Uffe Haagerups proceedings artikel fra hans hjemmeside: <http://www.imada.sdu.dk/~haagerup/haagerup-jun19.ps>.



Matilde 14 / Oktober 2002

Af: Bodil Branner, Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet
email: B.Branner@mat.dtu.dk

Om ICM-logoet.

ICM-logoet viser det såkaldte "hypotenuse-diagram" fra *Zhou bi*, en kinesisk matematisk tekst fra det første århundrede (i vores tidsregning). Diagrammet er dog først tilføjet af Zhao Shuang i det tredje århundrede, hvor han kommenterede den tidligere tekst.

Diagrammet viser fire kongruente retvinklede trekanter, valgt med sidelængderne $a=3$, $b=4$, $c=5$, placeret i et kvadrat med sidelængden c omkring et kvadrat med sidelængden $|a-b|$.

Af areal sammenligninger følger den Pythagoræiske relation

$$a^2 + b^2 = c^2$$

i det specielle eksempel, og i øvrigt for en vilkårlig retvinklet trekant.

For en mere uddybende beskrivelse af den tidlige matematiske udvikling i Kina, også sammenlignet med den tradition, der bygger på Euklids Elementer, se den interessante artikel af Christopher Cullen med titlen *Learning from Liu Hui? A different Way to Do Mathematics*. Artiklen findes i Notices, August 2002, Vol. 49, Nr 7, pp 783-790. Den kan downloades fra

<http://www.ams.org/notices/>



Fra Matilde 14

*Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Roskilde Universitetscenter,
e-mail: booss@ruc.dk*

ICM 2002 i Beijing

Beijing er en stor by: 30 mio indbyggere, tilsyneladende endeløse kæder af nybyggede boligblokke og kontorhuse, trafikalt bundet sammen af et net af nyanlagte central- og ringveje med en vældig strøm af cykler, varecykler, biler, taxier, lastbiler og busser, der myldrer afsted dag og nat.

Al denne trafik blev standset af omkring 400 færdselsbetjente tirsdag eftermiddag d. 20. august. Alene til ære for de 2000 kinesiske og 2000 udenlandske matematikere, der i korte buskolonner rullede fra deres hoteller rundt om i byen og hen til Folkets Hal ved Tiananmenpladsen, hvor den internationale matematikerkongres skulle åbnes.

Sådanne militære og matematiske magtdemonstrationer falder ikke i alle matematikeres smag. Mange af os anser det for mere effektivt for det internationale samarbejde at gå på biblioteket, skrive en e-mail, browse på arXiv-serveren og deltage i små seminarer i Oberwolfach, på Mittag-Leffler Institutet, IHES, Berkeleys MSRI osv. end at blive indrulleret i en mammutforanstaltning som den internationale matematikerkongres. For er matematisk forskning ikke blevet alt for specialiseret og diversificeret til at man som matematiker har gavn af oversigtsforedrag om andre arbejdsfelter end lige ens eget? Selv en John von Neumann måtte allerede for 49 år siden indrømme, at "ingen matematikere længere kan overskue matematikken som helhed" (1). Det var i hvert fald under Koreakrigen hans begrundelse for ikke på Amsterdamkongressen at ville tale om den indre sammenhæng mellem hans matematiske arbejde på brintbomben, der spændte fra hydrologi, numerisk simulation, computerarkitektur til stokastiske processer, talteori og matematisk fysik. Intet måtte tilsyneladende afsløres over for "russerne". Så det blev blot til et foredrag om en esoterisk vinkel på Banachalgebraer, nu kaldet type II₁ von Neumann-algebra.

Men ærgerligt at dette mantra, som fra begyndelsen var blot og bar maskerede, sidenhen er blevet gentaget så mange gange: at "faget matematik er inde i en

ekstensiv fase med hurtig opsplitning i smalle specialiseringsgrene som er mere eller mindre uafhængige af hinanden". Det passede måske i anden halvdel af 1800-tallet og kan da stadigvæk føles rigtigt en gang imellem. Men hovedtendensen i matematikken er og har i hele 1900-tallet været "konsolidering" og en konstruktiv vekselvirkning mellem grenene.(2)

Men v. Neumanns dictum er alligevel blevet hængende alt for længe, senest i den velmente åbningstale på Beijingkongressen, hvor præsidenten for den Internationale Matematikunion, Jacob Palis, nok så snu mente, at kongressen i det mindste ville byde hver deltager noget, selvom... og så mantraet om igen.

Det var forfriskende, da kongressens 93-årige og matematisk stadig vitale ærespræsident Sh. Sh. Chern, der sad i sin kørestol midt for podiet ved siden af den kinesiske statspræsident Zemin Jiang, talte Palis og von Neumann midt imod. Chern havde 6 iagttagelser:

- Matematikere er blevet gode til at arbejde og publicere sammen.
- De skal gerne blive bedre til at popularisere matematikken til bredere og bredeste kredse.
- Matematikkens nyere udvikling er karakteriseret ved, at forskellige grene rykker tættere sammen, at vi trækker mere på hinandens metoder og nedbryder snævre faggrænser.
- Tiden er moden for en ny Gauss, der kan sammenfatte og nyforme al vores matematiske viden og dens anvendelser.
- Statistisk er der en god chance for, at den nye Gauss vil komme fra verdens folkerigeste land, Kina.
- Til slut mindede Chern forsamlingen om kinesernes dominerende livssyn, konfucianismen, der udtrykkes med to skrifttegn: en stregmand og karakteren for 2-tallet, der tilsammen udgør tegnet for medmenneskelighed. Vi må ikke løbe fra matematikkens egentlige betydning: det menneskelige og det sociale.

Der var flere talere - f.eks. en stedfortrædende ministerpræsident for hele Kina, Lanqing Li - som understregede, at det afgørende ved matematikken er dens kulturelle og humanistiske værdi ("symbol of culture"), mens den teknologiske nytte nok skal følge trop. Alt på velplejet engelsk med kinesisk oversættelse på storskærm.

Derefter overrakte statspræsidenten Fieldsmedaljerne til de to virtuoser i algebraisk talteori, franskmanden Laurent Lafforgue og russeren Vladimir Voevodsky samt Nevanlinnaprisen til inderen Madhu Sudan for hans arbejde om "List decoding of error-correcting code", en simpel ide til vægtning af pålideligheden af modtagne tegn, nemlig ved multipliciteten af støttepunkter for det interpolerende polynomium - forfriskende at en verdenssucces kan baseres på en ide, som enhver, der en gang har undervist i diskrete strukturer, kunne have fået (og implementeringen).

Om aftenen bragte fjernsynet korte uddrag fra åbningsceremonien, derunder statspræsidentens varme håndtryk med Chern (de har mødtes flere gange før) og

lange uddrag fra pressekonferencen med de tre nye medaljevindere, idoler for en nat for måske 300 millioner kinesiske skoleelever landet rundt. Resten af ugen blev kongressen dækket i hver nyhedsudsendelse og på hver avisforside med referater fra plenarforedrag og kritisk debat om matematikkens status og udviklingsmulighed i Kina.

Denne store politiske og offentlige interesse for matematik gjorde sig også gældende ugen før på en satellitkonference om global analyse i Tianjin. Der var vi kun 40-60 matematikere, halvdelen kinesere. Ikke en stor sag, men borgmesteren for den 12 mio store by kom ikke desto mindre forbi og spiste sammen med os en aften. Bagefter bød han os på en rundtur i Tianjins nyåbnede videnskabsmuseum (à la Eksperimentariet) med et væld af sjove ideer til "hands-on-math". Næste morgen bragte den lokale avis ikke billeder af borgmesteren, men derimod af de udenlandske matematikere foran objekterne og en pudsigt avisoverskrift: Matematikere - kraftfulde - modtager - "omlæring".

Kongressen var rigtig flot. Nogle foredrag var ekstremt vanskelige, virtuose men umulige at følge med i. Sådan havde jeg det allerede med det første plenarforedrag, L. Lafforgues' rapport om Langlandsprogrammet. Anden foredragsholder var den rutinerede David Mumford, der selv har en Fieldsmedalje i algebraisk geometri. Meget rammende beskrev han den del af matematikken, hvor medaljerne plejer at falde, som et højt og vakkeltvornt stillads, hvor hvert eneste trin er usikkert men nødvendigt at betrede for at nå til tops, mens hans (og mange andres) nye forskningsfelt "Pattern theory - the mathematics of perception" snarere burde sammenlignes med en lille, flad atol i et stort ocean. Der er simpelthen ulige konkurrence, når forskellige områder skal præsenteres.

Uffe Haagerup fra SDU var en af de 20, der holdt plenarforedrag. Jeg sad ved siden af Dick Kadison og måtte overgive mig til hans begejstring: "Isn't it great to have such a genius around us?" Og i lighed med de andre plenarforedrag var der også i Uffes foredrag meget, som tilhørerne kunne tage med sig hjem.

Overraskende nok var mange foredrag centreret om foredragsholderens nyeste resultater, som om det drejede sig om en jobansøgning ved et eller andet universitet. Her havde programkomiteen tilsyneladende ikke instrueret foredragsholderne klart nok. Derfor modtog topologen Michael Hopkins stående ovationer, da han som den eneste brugte sin taletid til at give en historisk introduktion til sit nye emne, algebraiske mønstre i de første 16 homotopigrupper for sfærer.

Vi var 8-10 stykker fra Danmark, 5 i samme hotel i en endnu ikke gennemmoderniseret bydel, hvor man dag og nat ser mennesker arbejde i deres små værksteder eller sidde og spille skak eller kort under fortovstræerne. Ingen alkohol og ingen fulderikker. Det var faktisk meget hyggeligt og spændende. Nysgerrigheden efter det nye Kina har nok også været drivkraft bag den talstærke deltagelse fra især USA og Frankrig. Anderledes end Zürich 1994 og Berlin 1998, som på mig virkede en smule provinsielt, var Beijing 2002 igen en af de helt store

kongresser, som sikkert vil blive husket af de mange unge matematikere, som var der.

1. "The total subject of mathematics is clearly too broad for any one of us." J. von Neumann, brev til H.D. Kloosterman, 10. april 1953, citeret efter M. Rédei, "Unsolved Problems in Mathematics": J. von Neumann's Address to the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, September 2-9, 1954, The Mathematical Intelligencer 21/4 (1999), 7-12.

2. Det kan være helt belastende at vi altid skal holde øje med andre også fjerntliggende matematiske discipliner. En dansk matematiker med rammende formuleringsevne, Børge Jessen, sagde det for omkring 20 år siden på denne måde: "Enhver videnskab skifter mellem ekstensive og konsoliderende faser. Den ekstensive fase giver hurtig karriere og hurtig glemsel. Den konsoliderende fase kræver mere arbejde, men giver varigere resultater. Det er godt og skidt for jer (dengang) unge matematikere, at matematikken tilsyneladende er dybt inde i en konsoliderende fase."



Fra Matilde 14

*Af: Ib Madsen, Institut for Matematiske Fag, Århus Universitet
e-mail: imadsen@imf.au.dk*

Hvordan udvælges foredragsholderne til ICM?

Hovedmålsætningen bag ICM har siden starten altid været at dokumentere hvilke fremskridt det samlede matematiske område har gjort i de forløbne fire år siden sidste ICM, og at udstikke nogle bud på nye udviklingstendenser. Denne målsætning er lykkedes ganske godt.

De indbudte foredragsholdere forventes at bidrage med et manuskript til kongresberetningen, og det gør praktisk talt alle. Manuskripterne er uniformt af en meget høj kvalitet og særdeles læse værdige, omend ofte lidt vanskelige som følge af den koncentrerede form (højst 20 sider fra plenar foredrag og højst 10 sider fra øvrige foredrag). En gennemlæsning af kongresberetningerne siden anden verdenskrig giver et ganske præcist billede af fagets udvikling.

De senere års ICM har haft godt 100 indbudte foredrag, hvoraf ca. 20 har været 1 times plenar foredrag og resten 45 minutters sektionsforedrag, afholdt delvist parallelt. ICM har i mange år været opdelt i 19 forskellige sektioner, som emnemæssigt spænder fra teoretisk matematik og anvendt matematik til popularisering af matematik og historisk matematik. Det anses verden over for at være en stor ære at blive indbudt som foredragsholder ved et ICM.

ICM's videnskabelige program ledes af en programkomite på en halv snes medlemmer. Den bliver nedsat af IMU. Programkomiteen vælger formænd og et par "core members" for hver af de 19 "paneler" som svarer til de 19 sektioner. Panelformændene kan vælge at supplere panelet med yderligere medlemmer, og dette er normal praksis. Det er panelernes opgave at aflevere en prioriteret liste med forslag til sektions foredragsholdere og et par forslag til plenar foredragsholdere til programkomiteen. Samtidig skal panelerne udarbejde en "minifile" som beskriver de forskellige foreslåede foredragsholderes matematiske fortjenester og dermed begrundet forslagene.

Der er således ialt mere end 100 personer beskæftiget med at udvælge foredragsholdere til hvert ICM. Dette arbejde begynder ca. 2 år før kongressen afholdes.

Jeg var formand for topologipanelet til den netop afholdte ICM i Kina, og jeg har iøvrigt været menigt medlem af topologipanelet to gange tidligere. I begyndelsen af januar 2001 blev panelformændene udpeget af programkomiteen, og de fulde paneler blev nedsat i løbet af januar. Topologipanelet blev bedt om at nominere 12-13 personer på en prioriteret liste til sektionens foredrag og om at nominere 2 plenar foredragsholdere inden for det topologiske område.

Panelerne arbejder under IMU's "general guidelines: In choosing speakers, the need for subject and geographic diversity is emphasized". Denne sætning er ikke helt så uskyldig som den lyder - og den bliver nøje overholdt af programkomiteen. Den gav os og en lang række andre paneler problemer. Hvordan vægtes den i forhold til den oplagte opgave, at vælge de foredragsholdere, som har bidraget med den bedste matematik i den forløbne periode? Senere i forløbet henvendte programkomiteen sig til panelerne vedrørende nomineringen af kinesiske matematikere, og herunder med forslag om at overveje bestemte personer. Dette blev af nogle medlemmer af topologipanelet opfattet som utidigt politisk pres, og det gav formanden en hel del ballade. Det endte med at vi ikke nominerede en kinesisk kandidat - imod min egen overbevisning.

Hvorom alting er så afleverede jeg efter utallige e-mail afstemninger en prioriteret liste og "minifiles" til programkomiteen den 10. december 2001. Da ICM blev afholdt var der naturligvis en kinesisk matematiker blandt foredragsholderne.



Matilde 14 / Oktober 2002

Af: Martin Raussen, Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet
e-mail: raussen@math.auc.dk

Fieldsmedalje til Laurent Lafforgue

I år 2000 afsluttede Laurent Lafforgue sit bevis for en formodning, som udgør en væsentlig del af den såkaldte Langlandskorrespondance. Under dette navn skjuler sig et helt fletværk af formodninger, som blev formuleret i slutningen af 1960'erne og som har inspireret en væsentlig del af den moderne forskning inden for algebraisk geometri og talteori. For hans resultater, frugt af syv års arbejde, kunne Laurent Lafforgue, kun 35 år gammel, den 20. august 2002 i Folkets store hal i Beijing modtage den mest prestigefulde pris for en matematiker under fyrré år: Fieldsmedaljen. Artiklen bygger på de pressemeddelelser og beskrivelser, som er nævnt i kildelisten.

Langlands formodninger

I 1967 var den canadiske matematiker *Robert P. Langlands* kun 31 år gammel og professor ved Yale University i USA. I januar dette år sendte han et håndskrevet brev på 17 sider til matematikeren *André Weil* (1906 - 1998) ved Institute for Advanced Study i Princeton. "If you are willing to read [my letter] as pure speculation, I would appreciate that, if not - I'm sure you have a waste basket". Den franske matematiker Weil, bror til filosofen Simone Weil og medstifter af gruppen Nicolas Bourbaki, var emigreret til USA og en af de store navne inden for talteori og algebraisk geometri. Brevets formål var at udvikle og give en mere præcis formulering af et spørgsmål som Langlands havde stillet mundtligt til Weil nogle dage før. Langlands præsenterede et antal formodninger og ideer som skitserede tætte og forbavsende sammenhænge mellem matematiske objekter fra helt forskellige områder. Kort sagt drejede det sig om sammenhænge mellem "Galoisrepræsentationer" fra algebraisk geometri på den ene side og "automorfe former" fra den analytiske teori om Liegrupperepræsentationer (bl.a. periodiske funktioner) på den anden.

Weil svarede aldrig Langlands på skrift, men han blev hurtigt klar over vigtigheden af den unge canadiske matematikers ideer. Han fik maskinskrevet brevets tekst, som siden hen er blevet bredt distribueret. Brevets matematiske indhold¹ danner, sammen med tilføjelser fra både Langlands selv og fra andre matematikere, det man nu kalder "Langlandskorrespondancen" (eller også "Langlandsprogrammet" eller "Langlandsformodningerne"). Disse ideer og formodninger har stimuleret megen forskning inden for talteori og algebraisk geometri.

Vigtigheden af Langlandsprogrammet ligger først og fremmest i, at det binder meget forskellige dele af matematikken sammen. Når objekter som er *a priori* væsensforskellige, viser sig bare at

¹ Originalen er scannet ind og kan ses på adressen
<http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html>.

være facetter af ét og samme mere generelle fænomen, så medfører det en dybere forståelse og en større konceptuel rigdom; det kan give anledning til nye strategier for at løse matematikse problemer, men også til helt nye spørgsmål. Det er på denne måde de store videnskabelige fremskridt oftest foregår.

Når man studerer forskellige fænomener fra den samme synsvinkel, skal der som regel betales en pris i form af større abstraktion og en formidabel teknik. Men fra tid til anden er udbyttet, at jordnære problemer, som i lang tid har modstået forskernes anstrengelser, kan løses ved de nye teknikker. Langlandskorrespondancen leverer et berømt eksempel herpå, nemlig Fermats store sætning. Beviset fra 1994 af A.Wiles and R.Taylor for denne beroede nemlig på en anden mere teknisk formodning, den såkaldte Shimura-Taniyama-Weil formodning. Denne formodning, som blev bevist i sin helhed i 1999, kan anses for en af grundpillerne i Langlandsprogrammet: Der etableres en relation mellem elliptiske kurver fra den aritmetiske algebraiske geometri og modulære former, dvs. bestemte særligt periodiske funktioner i den matematiske analyse.

Præhistorie og historie

Det er ikke nemt at forklare en udenforstående, hvad Langlandskorrespondancen og den efterfølgende forskning, heriblandt L.Lafforgues arbejde, går ud på. I det følgende forsøges at beskrive historien for denne udvikling og motivationerne herfor.

Som så ofte i matematikken ligger begyndelsen langt tilbage i fortiden. Allerede i oldtiden har matematikere interesseret sig for løsninger af hvad man i dag kalder *diofantiske ligninger*. Det drejer sig simpelthen om polynomiale ligninger med heltallige koefficienter, og man leder efter heltallige løsninger. For eksempel er $x^2 + 3y^3 = 7$ en diofantisk ligning, og en af dens heltallige løsninger er givet ved $x = 2$ og $y = 1$. En anden diofantisk ligning er den, man betragter i Fermats store sætning. Selv om problemerne har været kendte siden oldtiden, er studiet af disse ligninger generelt yderst vanskeligt.

Et direkte angreb på disse problemer har sjældent båret frugt. Siden begyndelsen af 1800tallet har matematikere, anført af Carl Friedrich Gauss (1777- 1855), forsøgt udforskningen ad mere snørklede veje. Det viser sig både interessant og nyttigt at se på ligningerne modulo et primtal. For eksempel, givet et primtal P ; findes der et heltal x således at $x^2 + 1$ er divisibel med P ? Et dybt resultat, som er særdeles nyttigt for anden ordens diofantiske ligninger, er den *kvadratiske reciprocitetslov*, som Gauss gav det første fuldstændige og korrekte bevis for: Givet to primtal P og Q : Er P et kvadrattal modulo Q , dvs., har ligningen $x^2 = mq + p$ heltallige løsninger? Er Q et kvadrattal modulo P ? Loven giver en simpel formel til besvarelse af det ene spørgsmål, hvis man kender svaret til det andet. Man kan fortolke loven som beskrivelsen af en skjult *symmetri*.

En stor del af den senere udvikling inden for aritmetik og algebra tog udgangspunkt i at lede efter analoge reciprocitetslove ud over det kvadratiske tilfælde, dvs. for højere potenser end to. Vejen var belagt med mange forhindringer. For at overkomme dem har Gauss, og efter ham andre matematikere, studeret andre talområder end heltalsringen. For eksempel studerer man de "Gaussiske heltal" på formen $a + bi$ med hele tal a og b og $i = \sqrt{-1}$ eller ringen $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ bestående af tal på formen $c + d\sqrt{5}$ med rationale koefficienter c og d .

Abstrakt algebra i alliance med talteori

Studiet af de aritmetiske og algebraiske egenskaber af disse almængder og forsøget på at finde andre reciprocitetslove end den kvadratiske reciprocitet har efterhånden dannet grundlaget for en ny disciplin, algebraisk talteori. Blandt dens forgangsmænd i den anden halvdel af 1800tallet regnes Ernst Kummer, Richard Dedekind og Leopold Kronecker. I og med at talteorien blev mere generel, blev den også mere abstrakt og flere væsentlige koncepter blev udkrystalleret. To af de uundværlige værktøjer inden for algebra og talteori er begreberne *legeme* og *Galoisteori*.

For eksempel er mængden $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$ en legemsudvidelse af legemet $\mathbf{Q}$ af de rationale tal. Dét abstrakte og slagkraftige værktøj i studiet af de aritmetiske og algebraiske egenskaber af legemer og deres udvidelser er Galoisteori. De grundlæggende ideer hertil går tilbage til det matematiske geni Évariste Galois, som døde purung i en duel under aldrig helt klarlagte omstændigheder.

Galois selv havde studeret løsninger af polynomiumsligninger; han havde vist, at det ikke er muligt at finde en generel løsning for ligninger i én ubekendt af en orden mindst fem, som kan beskrives ved rodudtryk. Faktisk kan Galoisteori generaliseres til andre tilfælde end polynomiumsligninger; den kan anvendes på mange andre algebraiske strukturer og specielt til studiet af legemsudvidelser. Kort fortalt lader den til en udvidelse K^* af legemet K svare dens symmetri- eller automorfgruppe, som også kaldes *Galoisgruppen*. Studiet af denne Galoisgruppe tillader at slutte sig til algebraiske og aritmetiske egenskaber af legemsudvidelsen, som næppe ville være opnåelige ved et direkte studium af legemet.

Langlandskorrespondancen generaliserer klasselegemsteorien

Langlandskorrespondancen er en generalisering af hvad man kalder "klasselegemsteorien", som blev opbygget siden slutningen af 1800tallet og indtil ca. 1950 af matematikere som Heinrich Weber, David Hilbert, Teiji Takagi, Emil Artin, Helmut Hasse med flere. Denne teori opfattes som kompleks og vanskelig, men den er en af de store landvindinger i algebraisk talteori i det sidste århundrede. Lidt forsimplet forsøger man i klasselegemsteorien med udgangspunkt i et givet legeme K at beskrive udvidelser K^* af K , hvis Galoisgruppe er *abelsk*. Med andre ord: Teorien består i, at afsløre egenskaber ved "overlegemer" K^* med udgangspunkt i basislegemet K 's aritmetiske egenskaber ved hjælp af Galoisgruppen. I 1927 fandt Emil Artin inden for denne ramme frem til en abstrakt reciprocitetslov, som inbefatter alle tidligere viste reciprocitetslove. Et dybt talteoretisk resultat næsten uden anvendelse af symmetri; man benytter kun éndimensionale symmetrigrupper.

Det var naturligt at forsøge at udvide klasselegemsteorien til det tilfælde hvor Galoisgruppen ikke længere er abelsk. Farbare veje mod dette mål blev først fundet i 1960'erne, især af Langlands. Ideen var at studere ikke bare Galoisgruppen, men dens repræsentationer som (symmetri)grupper af lineære transformationer på vektorrum. Langlands formodede en enentydig korrespondance mellem nogle repræsentationer af endelig dimension n af Galoisgruppen af en legemsudvidelse af et legeme K og nogle såkaldte automorfe repræsentationer af den "lineære gruppe" $GL(n, K)$ af $(n \times n)$ -matricer over K . Mere nøjagtigt er korrespondancen i Langlandsformodningen beskrevet ved hjælp af specielle funktioner: På den ene side svarer der til Galoisrepræsentationer de såkaldte L -funktioner, som er specielle funktioner af en kompleks variabel; et eksempel er den Riemannske ζ -funktion. På den anden side svarer der til automorfe repræsentationer såkaldte automorfe former, som igen giver anledning til L -funktioner. Et bevis af Langlandsformodningen går således ud på at vise at L -funktionerne svarende til n -dimensionale Galoisrepræsentationer af udvidelser af K er de samme som L -funktioner svarende til $GL(n, K)$.

Langlandsprogrammet gennemføres trin for trin

Hvad har Laurent Lafforgue bidraget til dette program? Langlandskorrespondancen indbefatter mange forskellige deltilfælde afhængig af både det positive heltal n og de specielle egenskaber af basislegemet K . Tilfældet $n=1$ svarer til en abelsk Galoisgruppe og dermed til klasselegemsteorien; det har således været kendt i omtrent halvtreds år. For større værdier af n , altså ikke-abelske Galoisgrupper, er flere særtilfælde af Langlandsformodningerne blevet vist i årenes løb. Mere generelle resultater har man først opnået i løbet af det sidste årti. I 1993 viste således Gérard Laumon (Paris XI), Michael Rapoport (Köln) og Ulrich Stuhler (Göttingen) Langlandsformodningen for alle positive n for specielle legemer K , nemlig legemer af *formelle potensrækker* over et *endeligt* legeme. I 1998 viste Michael Harris (Paris VII) og Richard Taylor (Harvard) korrespondancen (for alle n) for de P -adiske legemer; nogle måneder senere gav Guy Henniart (Paris XI) et mere direkte bevis for samme påstand.

To år senere beviste Laurent Lafforgue Langlandskorrespondancen (for alle n) for "legemer af rationale funktioner over en kurve defineret over et endeligt legeme", dvs. legemet skal bestå af funktioner på formen $P(x,y)/Q(x,y)$, hvor P og Q er polynomier i x og y over et endeligt legeme og hvor x og y er forbundet gennem en algebraisk ligning. Lafforgues artikel *Chtoukas de Drinfeld et correspondance de Langlands* optager 240 sider i bind **147** af tidskriftet *Inventiones mathematicae*, og den støtter sig på talrige og omfangsrige tidligere publicerede arbejder. For at komme frem til sit resultat har L. Lafforgue udvidet metoder som skyldes den ukrainske matematiker *Vladimir Drinfeld* (Fieldsmedaille i 1990), som i 1970'erne kunne bevise denne del af Langlandsprogrammet for $n=2$. Lafforgue har opfundet en ny geometrisk konstruktion, som anses for essentiel for det fortsatte arbejde inden for området.

Lafforgues arbejde betragtes som banebrydende for det store billede som Langlands tegnede for over tredive år siden. Denne teoribygning med dens enorme kompleksitet, abstrakthed og tekniske sofistifikation, skaber, som sagt, forbindelser mellem talteorien (legemers aritmetiske egenskaber), algebraen (Galoisteori og repræsentationsteori) og analysen (automorfe funktioner). Arbejdet med den er bestemt ikke afsluttet. Mærkeligt nok savner man stadig beviser for Langlandsformodningerne for de mest almindelige tallegemer, som f.eks. $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ eller $\mathbf{C}$, som ofte er vanskeligere at takle end lokale legemer og funktionslegemer. En bekræftelse af formodningerne i disse klassiske tilfælde ville have store konsekvenser for mange tilsyneladende elementære problemer, som dem der er givet ved diofantiske ligninger. Men indtil videre er der sket få fremskridt i denne retning, bortset fra hvad der er sket i forbindelse med beviset for Fermats store sætning. Man har således brug for helt nye ideer. Iøvrigt er Drinfeld kommet frem med en mere geometrisk version af Langlandskorrespondancen for kurver som er defineret over de komplekse tal, og altså ikke over et endeligt legeme. Det sidste ord er næppe talt vedrørende dette program med sine vide forgreninger.

Det er ikke klart endnu om Lafforgues resultater vil få dramatiske konsekvenser i andre dele af matematikken. Men, som Nicholas Katz, algebraisk geometer fra Princeton University siger: "Lafforgue har vist, at to meget forskelligt udseende ting ser ens ud. Når man har gjort det, viser det sig næsten altid, at der er egenskaber, som man nemt kan se for den ene, men som er fuldstændig uden for rækkevide for den anden. Det er stadigvæk for tidligt at forudsige præcist hvad der vil ske, men jeg har en kraftig fornemmelse, at det her er meget vigtig."

Laurent Lafforgue

Laurent Lafforgue er født den 6. november 1966 i Antony syd for Paris. Matematikken har ikke altid været hans passion; i gymnasiet var han således meget mere interesseret i klassisk fransk og russisk litteratur, og specielt i Dostojevski. Han drømte om at blive forfatter, men han var ekstremt dygtig til matematik, og så kom han til faget nærmest mod sin vilje.

I 1986 blev han studerende på eliteskolen ENS, rue d'Ulm i Paris, hvor han blev den bedste af årgangen i den afsluttende konkurrence *aggrégation*. Allerede i 1990 havde han et fast job som forsker inden for arbejdsgruppen i aritmetisk og algebraisk geometri ved det franske CNRS på universitetet Paris XI (Orsay) - og det, inden han var begyndt på sin Ph.D.-afhandling. I de næste fire år beskæftigede han sig med at gennemarbejde *Alexandre Grothendiecks* værk. Lafforgue anser Grothendieck for den største matematiker i det tyvende århundrede. I dennes artikler, som fortolker hele den algebraiske geometri forfra og udvikler helt nye værktøjer, sansede han for første gang skønheden i matematikken.

Lafforgue skrev sin Ph.D.-afhandling (vejleder: Gérard Laumon, CNRS Orsay) på kun 18 måneder. Afhandlingen fra 1994 beskæftiger sig allerede med Vladimir Drinfelds *chtoukas* ("dimser"). Laumon karakteriserer i dag Lafforgues arbejde som gigantisk og hans metoder af en sådan teknisk brillians at de kan overvinde alle forhindringer på vejen.

Siden år 2000 har Laurent Lafforgue været både forskningsdirektør i CNRS og professor på IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques) i Bures-sur-Yvette syd for Paris. Laurent Lafforgue er ungkarl og ivrig cyklist; han cykler jævnligt de 25 km mellem instituttet og bopælen i Paris.

Kilder

Michel Alberganti, *Laurent Lafforgue: "Je rêvais de devenir écrivain, mais j'étais très bon en maths..."*, Le Monde, 22.8.2002.

AMS pressemeddelelse, *Background on 2002 Fields and Nevanlinna Awardees*,
<http://www.ams.org/ams/fields2002-background.html>, optrykt i EMS Newsletter, **45**, 2002, p.16.

Dana Mackenzie, *Fermat's Last Theorem's First Cousin*, Science **287**, 2000, 792 - 793.

Maurice Mashaal, *De Langlands à Lafforgue*,

http://www.spm.cnrsdir.fr/quoi/distinctions/Fields_Lafforgue.htm.

Voevodskys Fieldsmedalje

Lars Hesselholt

Ved den netop afholdte ICM 2002 i Beijing blev Vladimir Voevodsky tildelt Fieldsmedaljen for sit bevis af Milnors Galois kohomologi formodning. Jeg skal her forsøge at forklare Milnors formodning og de vigtigste elementer af Voevodskys bevis.

Til ethvert legeme k knyttes den absolutte Galoisgruppe G_k , der består af de legemsautomorfier af en (valgt) algebraisk aflukning $\bar{k}$ af k , der restringerer til identiteten på k . Ifølge Galois er der en kanonisk 1-1 korrespondance mellem undergrupper af G_k og separable legemsudvidelser af k indeholdt i $\bar{k}$. Man betragter normalt G_k som en pro-endelig topologisk gruppe, hvor de undergrupper, der har endeligt indeks, udgør en basis for de åbne omegne af identiteten. Voevodskys sætning viser imidlertid, at G_k har ganske specielle egenskaber, der ikke deles af en vilkårlig pro-endelig gruppe.

Lad G være en (pro-endelig topologisk) gruppe, og lad

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

være en eksakt følge af (diskrete) G -moduler. Man har da en eksakt følge af G -fixmængder

$$0 \rightarrow M'^G \rightarrow M^G \rightarrow M''^G,$$

men afbildningen til højre er generelt ikke surjektiv. (Lad for eksempel $G = G_{\mathbb{R}}$ og betragt den eksakte følge

$$0 \rightarrow i\mathbb{Z} \xrightarrow{2} i\mathbb{Z} \rightarrow i\mathbb{Z}/2i\mathbb{Z} \rightarrow 0.)$$

Der findes imidlertid en *universel* måde at forlænge denne følge til en lang-eksakt følge

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G, M') \rightarrow H^0(G, M) \rightarrow H^0(G, M'') \\ \rightarrow H^1(G, M') \rightarrow H^1(G, M) \rightarrow H^1(G, M'') \\ \rightarrow H^2(G, M') \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

hvor $H^0(G, M) = M^G$. Disse kohomologigrupper giver et billede af gruppen G .

Den multiplikative gruppe af enheder $\bar{k}^*$ er en diskret G_k -modul, og $H^0(G_k, \bar{k}^*) = k^*$. Der gælder endvidere Hilberts sætning 90, at $H^1(G_k, \bar{k}^*) = 0$. De højere kohomologigrupper er sædvanligvis ikke nul. For eksempel er $H^2(G_k, \bar{k}^*)$ lig Brauergruppen $\text{Br}(k)$ af centrale divisionsalgebraer over k . Lad m være et helt tal, der ikke er divisibelt med karakteristikkens af k . Vi har da Kummers eksakte følge af G_k -moduler

$$0 \rightarrow \mu_m \rightarrow \bar{k}^* \xrightarrow{m} \bar{k}^* \rightarrow 0,$$

hvor μ_m er den multiplikative gruppe af m 'te enhedsrødder i $\bar{k}$. Denne er en fri $\mathbb{Z}/m$ -modul

af rang 1, hvorpå Galoisgruppen virker gennem den cyklotomiske karakter

$$G_k \xrightarrow{\chi} \text{Aut}(\mu_m) = (\mathbb{Z}/m)^*.$$

Virkningen er triviell, hvis, og kun hvis, k indeholder en primitiv m 'te enhedsrod. Den kort-eksakte følge af G_k -moduler inducerer en lang-eksakt følge af kohomologigrupper, der begynder

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G_k, \mu_m) \rightarrow k^* \xrightarrow{m} k^* \\ \rightarrow H^1(G_k, \mu_m) \rightarrow 0 \xrightarrow{m} 0 \dots, \end{aligned}$$

og vi har dermed en kanonisk isomorfi

$$\ell: k^*/k^{*m} \xrightarrow{\sim} H^1(G_k, \mu_m).$$

Hvis G er en pro-endelig gruppe, og hvis M og N er diskrete G -moduler, findes der en naturlig produktafbildning

$$H^i(G, M) \otimes H^j(G, N) \xrightarrow{\cup} H^{i+j}(G, M \otimes N).$$

Den er almindeligvis hverken injektiv eller surjektiv. Dette giver specielt et produkt på den abelske gruppe

$$\bigoplus_{i \geq 0} H^i(G_k, \mu_m^{\otimes i}),$$

som derved bliver en gradueret $\mathbb{Z}/m$ -algebra. (Den abelske gruppe $\mu_m^{\otimes i}$ er igen en fri $\mathbb{Z}/m$ -modul af rang 1, men Galoisgruppen virker nu gennem χ^i .) Milnors formodning siger, at denne algebra, for $m = 2$, er frembragt af elementerne $\ell(x)$, hvor $x \in k^*$, og at alle relationer er af formen $\ell(x) \cup \ell(1-x)$, hvor $x, 1-x \in k^*$. En mere generel formodning, der skyldes Kato, siger, at det samme

gælder for alle m . Det er ikke svært at give en konkret beskrivelse af denne algebra. Lad $T(k^*)$ være tensoralgebraen frembragt af den abelske gruppe k^* , og lad I være det to-sidede ideal frembragt af elementerne $x \otimes (1-x)$, hvor $x, 1-x \in k^*$. Man definerer da Milnors K -teori af k ved

$$K_*^M(k) = T(k^*)/I.$$

Den kanoniske afbildning ℓ inducerer en afbildning af graduerede $\mathbb{Z}/m$ -algebraer

$$K_*^M(k)/m \rightarrow \bigoplus_{i \geq 0} H^i(G_k, \mu_m^{\otimes i}),$$

og Milnors og Katos formodninger siger, at denne er en isomorfi.

Sætning (Voevodsky) *Milnors formodning gælder for alle legemer (af karakteristik $\neq 2$).*

I virkeligheden beviser Voevodsky et system af formodninger, som generaliserer Milnors formodning til alle glatte algebraiske varieteter. Den præcise udformning af disse formodninger skyldes Beilinson og Lichtenbaum, men den grundlæggende vision går tilbage til Grothendieck. Centralt i formodningerne er de *motiviske* kohomologiteorier $H^*(-, \mathbb{Z}(r))$ og deres egenskaber. Der findes to definitioner, som nu vides at være ækvivalente. Den første, som vi genkalder nedenfor, skyldes Bloch, og den anden skyldes Suslin. Men det er Voevodskys fortjeneste, at disse kohomologiteorier nu vides at have (mange af) de ønskede egenskaber.

Lad $\Delta_k^n \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$ være delvarietetten defineret ved ligningen $x_0 + \dots + x_n = 1$. Givet en

delmængde $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ kan vi tilordne en delvarietet $F \subset \Delta_k^n$, hvor yderligere $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 0$. Vi siger, at F er en sideflade af kodimension r . Specielt er $F = \Delta_k^n$ en sideflade af kodimension 0. Lad X være en glat varietet over k , og lad $\tilde{\mathbb{Z}}(r)_X$ betegne den frie abelske gruppe frembragt af de delvarieteter $Z \subset X \times \Delta_k^{2r-i}$, hvor $Z \cap (X \times F) \subset X \times F$ har kodimension $\geq r$, for alle sideflader F . Man definerer da

$$\mathbb{Z}(r)_X^i = \tilde{\mathbb{Z}}(r)_X^i / \tilde{\mathbb{Z}}(r+1)_X^i.$$

Lad $F \subset \Delta_k^{2r-i}$ være en sideflade af kodimension c . Da F som varietet er kanonisk isomorf med Δ_k^{2r-i-c} , giver $Z \mapsto Z \cap (X \times F)$ (talt med multiplicitet) en afbildning

$$d_F: \mathbb{Z}(r)_X^i \rightarrow \mathbb{Z}(r)_X^{i+c}.$$

Vi skriver d_j for afbildningen, der svarer til sidefladen " $x_j = 0$ ", og definerer

$$d = \sum_{j=0}^n (-1)^j d_j.$$

Det er let at vise, at $d \circ d = 0$, og vi har derfor et kokædekompleks $\mathbb{Z}(r) = \mathbb{Z}(r)_X$ givet ved

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}(r)_X^{i-1} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(r)_X^i \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(r)_X^{i+1} \rightarrow \dots$$

Bloch definerer da $H^i(X, \mathbb{Z}(r))$ som den i 'te kohomologigruppe af dette kokædekompleks. (Tilsvarende er $H^*(X, \mathbb{Z}/m(r))$ defineret som kohomologien af $\mathbb{Z}/m(r) = \mathbb{Z}(r)/m\mathbb{Z}(r)$.)

Lad os betragte $X = \text{Spec}(k)$. Der er ingen kodimension r delvarieteter af Δ_k^{2r-i} , medmindre $i \leq r$, og derfor er $H^i(k, \mathbb{Z}(r)) = 0$,

når $i > r$. Det er derimod på ingen måde klart, at $H^i(k, \mathbb{Z}(r)) = 0$, for $i < 0$. At dette alligevel skulle være tilfældet, er en af Beilinson og Lichtenbaums formodninger. Gruppen $H^r(k, \mathbb{Z}(r))$ er frembragt af kodimension r delvarieteter af Δ_k^r , dvs. lukkede punkter, og afbildningen

$$K_r^M(k) \xrightarrow{\sim} H^r(k, \mathbb{Z}(r)),$$

som til $\{a_1, \dots, a_r\}$ tilordner klassen af det k -rationale punkt i Δ_k^r med koordinater

$$\left(\frac{a_1}{a-1}, \dots, \frac{a_r}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right),$$

hvis $a = a_1 + \dots + a_r \neq 1$, og nul, ellers, er en isomorfi. Grupperne $H^*(X, \mathbb{Z}(r))$ generaliserer dermed Milnors K -teori.

På samme vis generaliserer Grothendiecks étale kohomologi grupper $H_{\text{et}}^*(X, \mu_m^{\otimes r})$ Galois kohomologi til algebraiske varieteter, og der findes endvidere en kanonisk afbildning

$$H^i(X, \mathbb{Z}/m(r)) \rightarrow H_{\text{et}}^i(X, \mu_m^{\otimes r}).$$

Det er en af Beilinsons og Lichtenbaums formodninger, at denne afbildning er en isomorfi, for $i \leq r$, når $X = \text{Spec}(\mathcal{O})$ er spektret af den lokale ring i et punkt på en glat algebraisk varietet over k . Hvis $X = \text{Spec}(k)$, og $i = r$, er dette præcis Milnors og Katos formodning. Omvendt viser Suslin og Voevodsky, at hvis Milnors og Katos formodning gælder for *alle* legemer (af en given karakteristisk, der ikke dividerer m), da gælder også Beilinsons og Lichtenbaums formodning for alle glatte algebraiske varieteter (over legemer af samme karakteristisk). Faktisk viser

argumentet, at Milnors og Katos formodning, for $r' \leq r$, medfører Beilinsons og Lichtenbaums formodning for $r' \leq r$. Voevodskys bevis for Milnors formodning — og dermed for Beilinsons og Lichtenbaums formodning for $m = 2$ — er nu ved induktion på r . Den grundlæggende idé i argumentet er den samme som i Merkujevs bevis for Milnors formodning i tilfældet $r = 2$. Givet en følge af enheder $a = (a_1, \dots, a_r)$ i k betragter man Pfister-hyperfladen $X_a \subset \mathbb{P}_k^{2^r-1}$ defineret ved den kvadratiske ligning

$$(x_1^2 - a_1 y_1^2) \otimes \cdots \otimes (x_{r-1}^2 - a_{r-1} y_{r-1}^2) = a_r t^2.$$

Det afgørende skridt er at vise, at hvis formodningen gælder for funktionslegemet af X_a , da gælder den også for k . For man kan da gå til et limestilfælde, hvor formodningen kan vises ved et andet argument. Merkujev viste dette afgørende skridt, for $r = 2$, ved en sammenligning med algebraisk K -teori, men dette argument lader sig ikke gennemføre for vilkårlige r . Voevodsky udnytter i stedet generelle egenskaber — der også er del af induktionen — ved motivisk kohomologi til at formulere problemet på en måde, der kun involverer motivisk kohomologi. Lad $\mathfrak{X}_a$ betegne den simplicielle algebraiske varietet med $\mathfrak{X}_{a,n} = X_a^{n+1}$ og med $d_i: \mathfrak{X}_{a,n} \rightarrow \mathfrak{X}_{a,n-1}$ givet ved projektionen væk fra i 'te faktor, og lad $H^i(\mathfrak{X}_a, \mathbb{Z}(r))$ være den i 'te kohomologigruppe af dobbeltkomplekset $\mathbb{Z}(r)_{\mathfrak{X}_a}$. I Voevodskys formulering skal det da vises, at

$$H^{r+1}(\mathfrak{X}_a, \mathbb{Z}(r))_{(2)} = 0.$$

Det er fuldstændig umuligt at forstå denne gruppe direkte fra definitionen, fordi elementerne er repræsenteret af højt dimensionale

delvarieteter. Til gengæld kan man vise, at

$$H^{2^r-1}(\mathfrak{X}_a, \mathbb{Z}(2^{r-1}-1))_{(2)} = 0,$$

fordi elementerne her svarer til lukkede punkter. For at udnytte dette, konstruerer Voevodsky kohomologioperationer i motivisk kohomologi, og benytter disse til at forbinde de to grupper. Disse operationer er imidlertid af homotopiteoretisk natur og kan ikke fås fra afbildninger mellem kokædekomplekser, og det er derfor nødvendigt at opbygge en homotopiteori for algebraiske varieteter. Denne del af Voevodskys arbejde, som er et samarbejde med Fabien Morel, har vakt stor begejstring. For den muliggør, som beviset for Milnors formodning demonstrerer, at anvende de velkendte og effektive metoder fra algebraisk topologi i algebraisk geometriske situationer. Artiklen fra Voevodskys hovedforedrag ved ICM i Berlin er en yderst velskrevet introduktion til denne nye teori.



Matilde 14 / Oktober 2002

Af: Tom Høholdt, Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet.
e-mail: T.Hoeholdt@mat.dtu.dk

Nevanlinna prisen 2002.

Madhu Sudan har modtaget Nevanlinna prisen for 2002. Han er født i Indien i 1966, opnåede B.Tech.-graden i Computer Science fra Indian Institute of Technology at New Delhi i 1987 og Ph.D. graden fra University of California at Berkeley i 1992. Fra 1992-1997 var han ansat ved IBM's Thomas J. Watson Research Center, og siden 1997 har han været Associate Professor ved MIT. Han har tidligere modtaget the Sakrison Memorial Award, the ACM Doctoral Dissertation Award, a Sloan Foundation Fellowship, a NSF Career Award, the IEEE Information Theory Society Paper Award og Gödel prisen.

Madhu Sudan har bidraget helt afgørende til adskillige områder af teoretisk datalogi, herunder metoder der, med en vis sandsynlighed, kan afgøre om et bevis er korrekt. Han har ligeledes opnået fundamentale resultater om sværhedsgraden af at opnå approksimative løsninger til optimeringsproblemer og har på det seneste præsenteret en ny afkodningsalgoritme for en klasse af fejlrettende koder.

Hvis man har et bevis for en matematisk sætning, findes der en metode til at oversætte beviset til en bitstreng. Man kan så ved at kontrollere nogle af disse bit med stor sandsynlighed afgøre om beviset er korrekt. Det overraskende er her, at det antal bit, der skal kontrolleres, kan gøres meget meget lille! Denne teori er udviklet i fællesskab af M.Sudan, S.Arora, U.Feige, S.Goldwasser, C.Lund, L. Lovasz, R.Motwani, S.Safra og M.Szegedy. Arbejdet blev belønnet med Gödel prisen i 2001.

Det vigtigste åbne spørgsmål i teoretisk datalogi er, om P er lig med NP (det er da også et af Clay Millenium Pris problemerne). Løst sagt består P af problemer, der er "lette" at løse, mens NP tænkes at indeholde problemer, der fundamentalt er "svære". Ordet "let" kan gives en præcis teknisk mening i termer af køretiden for en algoritme til løsning af problemet. Et fundamentalt "svært" problem i NP har den egenskab, at det er let at undersøge, om et forslag til løsning faktisk er en løsning, mens der ikke kendes en effektiv algoritme til at løse problemet fra bunden. Mange af problemerne i NP stammer

fra kombinatorisk optimering. Her er et: Givet en endelig samling af endelige mængder, hvad er den største delsamling med den egenskab at hvilke som helst to mængder i delsamlingen er disjunkte? Sudan og andre beviste, at det at finde en tilnærmet løsning til en stor del af problemerne i NP er ligeså svært som at finde løsningen. Dette er faktisk et resultat af både stor praktisk og teoretisk interesse.

Det tredje område hvor Madhu Sudan har bidraget fundamentalt og afgørende, er i teorien for fejlrettende koder (jvf. Matilde nr.12, marts 2002). Medens tidligere afkodnings metoder for de såkaldte Reed-Solomon koder, der bl.a. anvendes i CD- og DVD afspillere, kun rettede et vist antal fejl, angav Sudan en metode til at rette mange flere fejl. Dette er et af de vigtigste resultater indenfor de sidste 40 år.



Matilde 14 / Oktober 2002

Popularizing mathematics: From eight to infinity

V.L. Hansen

Department of Mathematics,
Technical University of Denmark,
Matematiktorvet, Bygning 303,
DK-2800 Kgs. Lyngby, Denmark.
E-mail: V.L.Hansen@mat.dtu.dk

Abstract

It is rare to succeed in getting mathematics into ordinary conversation without meeting all kinds of reservations. In to raise public awareness of mathematics effectively, it is necessary to modify such attitudes. In this paper, we point to some possible topics for general mathematical conversation.

2000 Mathematics Subject Classification: 00A05, 00A80, 97B20.

Keywords and Phrases: Mathematics in literature, symbols, art and design, Mathematics in nature, Geometry of space, Infinite sums, Mathematics as a sixth sense.

Introduction

“One side will make you grow taller, and the other side will make you grow shorter”, says the caterpillar to Alice in the fantasy *‘Alice’s Adventures in*

Wonderland' as it gets down and crawls away from a marvelous mushroom upon which it has been sitting. In an earlier episode, Alice has been reduced to a height of three inches and she would like to regain her height. Therefore she breaks off a piece of each of the two sides of the mushroom, incidentally something she has difficulties identifying, since the mushroom is entirely round. First Alice takes a bit of one of the pieces and gets a shock when her chin slams down on her foot. In a hurry she eats a bit of the other piece and shoots up to become taller than the trees. Alice now discovers that she can get exactly the height she desires by carefully eating soon from one piece of the mushroom and soon from the other, alternating between getting taller and shorter, and finally regaining her normal height.

Few people link this to mathematics, but it reflects a result obtained in 1837 by the German mathematician Dirichlet, on what is nowadays known as *conditionally convergent infinite series* -namely, that one can assign an arbitrary value to infinite sums with alternating signs of magnitudes tending to zero, by changing the order in which the magnitudes are added. Yes, mathematics can indeed be fanciful, and as a matter of fact, *Alice's Adventures in Wonderland* was written, under the pseudonym Lewis Carroll, by an English mathematician at the University of Oxford in 1865. The fantasy about Alice is not the only place in literature where you can find mathematics. And recently, mathematics has even entered into stage plays [18] and movies [19].

On the special position of mathematics

When the opportunity arises, it can be fruitful to incorporate extracts from literature or examples from the arts in the teaching and dissemination of mathematics. Only in this way can mathematics eventually find a place in relaxed conversations among laymen without immediately being rejected as incomprehensible and relegated to strictly mathematical social contexts.

Mathematics occupies a special position among the sciences and in the educational system. This position is determined by the fact that mathematics is an a priori science, building on ideal elements abstracted from sensory experiences, and at the same time mathematics is intimately connected to the experimental sciences, traditionally not least the natural sciences and the engineering sciences. Mathematics can be decisive when formulating theories giving insight into observed phenomenae, and often forms the basis for further conquests in these sciences because of its power for deduction and calculation. The revolution in the natural sciences in the 1600s and the subsequent technological conquests were to an overwhelming degree based on mathematics.

The unsurpassed strength of mathematics in the description of phenomena from the outside world lies in the fascinating interplay between the concrete and the abstract.

In the teaching of mathematics, and when explaining the essence of mathematics to the public, it is important to get the abstract structures in mathematics linked to concrete manifestations of mathematical relations in the outside world. Maybe the impression can then be avoided that abstraction in mathematics is falsely identified with pure mathematics, and concretization in mathematics just as falsely with applied mathematics. The booklet [3] is a contribution in that spirit.

On the element of surprise in mathematics

Without a doubt, mathematics makes the longest-lasting impression when it is used to explain a counter-intuitive phenomenon. The element of surprise in mathematics therefore deserves particular attention.

As an example, most people - even teachers of mathematics – find it close to unbelievable that a rope around the Earth along the equator has to be only 2π meters (i.e., a little more than 6 meters) longer, in order to hang in the air 1 meter above the surface all the way around the globe.

Another easy example of a surprising fact in mathematics can be found in connection with figures of constant width. At first one probably thinks that this property is restricted to the circle. But if you round off an equilateral triangle by substituting each of its sides with the circular arc centered at the opposite corner, one obtains a figure with constant width. This rounded triangle is called a '*Reuleaux triangle*' after its inventor, the German engineer Reuleaux. It has had several technological applications and was among others exploited by the German engineer Wankel in his construction of an internal combustion engine in 1957. Corresponding figures with constant width can be constructed from regular polygons with an arbitrary odd number of edges. In the United Kingdom, the regular heptagon has been the starting point for rounded heptagonal coins (20p and 50p).

Figures of constant width were also used by the physicist Richard Feynmann to illustrate the dangers in adapting figures to given measurements without knowledge of the shape of the figure. Feynmann was a member of the commission appointed to investigate the possible causes that the space shuttle Challenger on its tenth mission, on 28 January 1986, exploded shortly after take

off. A problematic adaptation of figures might have caused a leaky assembly in one of the lifting rockets.

Mathematics in symbols

Mathematics in symbols is a topic offering good possibilities for conversations with a mathematical touch. Through symbols, mathematics may serve as a common language by which you can convey a message in a world with many different ordinary languages. But only rarely do you find any mention of mathematics in art catalogues or in other contexts where the symbols appear. The octagon, as a symbol for eternity, is only one of many examples of this.

The eternal octagons

Once you notice it, you will find the octagon in very many places - in domes, cupolas and spires, often in religious sanctuaries. This representation is strong in Casteldel Monte, built in the Bari province in Italy in the first half of the 1200s for the holy Roman emperor Friedrich II. The castle has the shape of an octagon, and at each of the eight corners there is an octagonal tower [9]. The octagon is also found in the beautiful Al-Aqsa Mosque in Jerusalem from around the year 700, considered to be one of the three most important sites in Islam.

In Christian art and architecture, the octagon is a symbol for the '*eighth day*' (in Latin, *octave dies*), which gives the day, when the risen Christ appeared to his disciples for the second time after his resurrection on Easter Sunday. In the Jewish counting of the week, in use at the time of Christ, Sunday is the first day of the week, and hence the eighth day is the Sunday after Easter Sunday. In a much favored interpretation by the Catholic Fathers of the Church, the Christian Sunday is both the first day of the week and the eighth day of the week, and every Sunday is a celebration of the resurrection of Christ, which is combined with the hope of eternal life. Also in Islam, the number eight is a symbol of eternal life.

Such interpretations are rooted in old traditions associated with the number eight in oriental and antique beliefs. According to Babylonian beliefs, the soul wanders after physical death through the seven heavens, which corresponds to the material heavenly bodies in the Babylonian picture of the universe, eventually to reach the eighth and highest heaven. In Christian adaptation of these traditions, the number eight (octave) becomes the symbol for the eternal salvation and fuses with eternity, or infinity. This is reflected in the mathematical symbol for infinity, a figure eight lying down, used for the first time in 1655 by the English mathematician John Wallis.

The regular polyhedra

Polyhedra fascinate many people. A delightful and comprehensive study of polyhedra has been made by Cromwell [4]. Already Pythagoras in the 500s BC knew that there can exist only five types of regular polyhedra, with respectively 4 (tetra), 6 (hexa), 8 (octa), 12 (dodeca) and 20 (icosa) polygonal lateral faces. In the dialogue '*Timaeus*', Plato associated the tetrahedron, the octahedron, the hexahedron [cube] and the icosahedron with the four elements in Greek philosophy, fire, air, earth, and water, respectively, while in the dodecahedron, he saw an image of the universe itself. This has inspired some globe makers to represent the universe in the shape of a dodecahedron.

It is not difficult to speculate as to whether there exist more than the five regular polyhedra. Neither is it difficult to convince people that no kinds of experiments are sufficient to get a final answer to this question. It can only be settled by a mathematical proof. A proof can be based on the theorem that the alternating sum of the number of vertices, edges and polygonal faces in the surface of a convex polyhedron equals 2, stated by Euler in 1750; see e.g. [10].

The cuboctahedron

There are several other polyhedra that are ascribed a symbolic meaning in various cultures. A single example has to suffice.

If the eight vertices are cut off a cube by planes through the midpoints in the twelve edges in the cube one gets a polyhedron with eight equilateral triangles and six squares as lateral faces. This polyhedron, which is easy to construct, is known as the *cuboctahedron*, since dually it can also be constructed from an octahedron by cutting off the six vertices in the octahedron in a similar manner. The cuboctahedron is one of the thirteen semiregular polyhedra that have been known since Archimedes. In Japan cuboctahedra have been widely used as decorations in furniture and buildings. Lamps in the shape of cuboctahedra were used in Japan already in the 1200s, and they are still used today in certain religious ceremonies in memory of the dead [16].

The yin-yang symbol

Yin and yang are old principles in Chinese cosmology and philosophy that represent the dark and the light, night and day, female and male. Originally yin indicated a northern hill side, where the sun does not shine, while yang is the south side of the hill. Everything in the world is viewed as an interaction between yin and yang, as found among others in the famous oracular book *I Ching* (Book of Changes), central in the teaching of Confucius (551--479 BC). In this ancient Chinese system of divination, an oracle can be cast by flipping three

coins and the oracle is one of sixty-four different hexagrams each composed of two trigrams. The three lines in a trigram are either straight (yang) or broken (yin), thus giving eight different trigrams and sixty-four hexagrams. In Taoism, the eight trigrams are linked to immortality. Yin and Yang as philosophical notions date back to the 400s BC.

The mathematical symbol for yin-yang is a circle divided into two equal parts by a curve made up of two smaller semicircles with their centers on a diameter of the larger circle. The mathematics in this beautiful and very well known symbol is simple, but nevertheless it contains some basic geometrical forms, and thereby offers possibilities for mathematical conversations.

The Borromean link

Braids, knots and links form a good topic for raising public awareness of mathematics, as demonstrated in the CD-Rom [2]s.

Here we shall only mention the Borromean link. This fascinating link consists of a system of three interlocking rings, in which no pair of rings interlocks. In other words, the three rings in a Borromean link completely falls apart if any one of the rings is removed from the system.

The Borromean link is named after the Italian noble family Borromeo, who gained a fortune by trade and banking in Milano in the beginning of the 1400s. In the link found in the coat of arms of the Borromeo family, the three rings apparently interlock in the way described, but a careful study reveals that the link often has been changed so that it does not completely fall apart if an arbitrary one of the rings is removed from the system. The link in the coat of arms of the Borromeo family is a symbol of collaboration.

Mathematics in art and design

Artists, architects and designers give life to abstract ideas in concrete works of art, buildings, furniture, jewelry, tools for daily life, or, by presenting human activities and phenomena from the real world, dynamically in films and television. The visual expressions are realized in the form of paintings, images, sculptures, etc. From a mathematical point of view, all these expressions represent geometrical figures.

For a mathematician, the emphasis is on finding the abstract forms behind the concrete figures. In contrast, the emphasis of an artist or a designer is to realize the abstract forms in concrete figures. At the philosophical level many interesting

conversations and discussions about mathematics and its manifestations in the visual arts can take place following this line of thought.

More down to earth, the mathematics of perspective invites many explanations of concrete works of arts [8], and the beautiful patterns in Islamic art inspire discussions on geometry and symmetry [1]. In relation to the works of the Dutch artist Escher, it is possible to enter into conversations about mathematics at a relatively advanced level, such as the Poincar'e disc model of the hyperbolic plane [5], [7]. The sculptures of the Australian-British artist John Robinson -such as his wonderful sculpture Immortality that exhibits a Möbius band shaped as a clover-leaf knot - offer good possibilities for conversations on knots [2].

In his fascinating book [17], Wilson tells many stories of mathematics in connection with mathematical motifs on postage stamps.

Mathematics in nature

The old Greek thinkers - in particular Plato (427--347 BC) - were convinced that nature follows mathematical laws. This belief has dominated thinking about natural phenomena ever since, as witnessed so strongly in major works by physicists, such as Galileo Galilei in the early 1600s, Isaac Newton in his work on gravitation in *Principia Mathematica* 1687, and Maxwell in his major work on electromagnetism in 1865; cf. [10]. In his remarkable book *On Growth and Form* (1917), the zoologist D'Arcy Wentworth Thompson concluded that wherever we cast our glance we find beautiful geometrical forms in nature. With this point of departure, many conversations on mathematics at different levels are possible. I shall discuss a few phenomena that can be described in broad terms without assuming special mathematical knowledge, but nevertheless point to fairly advanced mathematics.

Spiral curves and the spider's web

Two basic motions of a point in the Euclidean plane are motion in a line, and periodic motion (rotation) around a central point. Combining these motions, one gets spiral motions along spiral curves around a spiral point. Constant velocity in both the linear motion and the rotation gives an Archimedean spiral around the spiral point. Linear motion with exponentially growing velocity and rotation with constant velocity gives a *logarithmic spiral* .

A logarithmic spiral is also known as a quiangular spiral, since it has the following characteristic property: *the angle between the tangent to the spiral and the line to the spiral point is constant*.

Approximate Archimedean and logarithmic spirals enter in the spider's construction of its web. First, the spider constructs a Y-shaped figure of threads fastened to fixed positions in the surroundings, and meeting at the centre of the web. Next, it constructs a frame around the centre of the web and then a system of radial threads to the frame of the web, temporarily held together by a non-sticky logarithmic spiral, which it constructs by working its way out from the centre to the frame of the web. Finally, the spider works its way back to the centre along a sticky Archimedean spiral, while eating the logarithmic spiral used during the construction.

Helices, twining plants and an optical illusion

A space curve on a cylinder, for which all the tangent lines intersect the generators of the cylinder in a constant angle, is a *helix*. This is the curve followed by twining plants such as bind weed (right-handed helix) and hops (left-handed helix). Looking up a long circular cylinder in the wall of a circular tower enclosing a spiral staircase, all the generators of the cylinder appear to form a system of lines in the ceiling of the tower radiating from the central point, and the helix in the banister of the spiral staircase appears as a logarithmic (equiangular) spiral. A magnificent instance of this is found in the spiral staircase in Museo do Popo Galergo, Santiago, Spain, where you have three spiral staircases in the same tower.

Curvature and growth phenomena in nature

Many growth phenomena in nature exhibit curvature. As an example, we discuss the shape of the shell of the primitive cuttlefish nautilus.

The fastest way to introduce the notion of curvature at a particular point of a plane curve is by approximating the curve as closely as possible in a neighborhood of the point with a circle, called the circle of curvature, and then measuring the curvature as the reciprocal of the radius in the approximating circle. If the curve is flat in a neighborhood of the point, or if the point is an inflection point, the approximating circle degenerates to a straight line, the tangent of the curve; in such situations, the curvature is set to 0. Finally, the curvature of a curve has a sign: positive if the curve turns to the left (anticlockwise) in a neighborhood of the point in question, and negative if it turns to the right (clockwise).

Now to the mathematics of a nautilus shell. We start out with an equiangular spiral. At each point of the spiral, take the circle of curvature and replace it with the similar circle centered at the spiral and orthogonal to both the spiral and the plane of the spiral. For exactly one angle in the equiangular spiral, the resulting

surface winds up into a solid with the outside of one layer exactly fitting against the inside of the next. The surface looks like the shell of a nautilus.

In the Spring of 2001, I discovered that this unique angle is very close to half the golden angle (the smaller of the two angles obtained by dividing the circumference of the unit circle in golden ratio), so close in fact that it just allows for thickness of the shell. More details can be found on my home page [14].

Geometry of space

Questions about geometries alternative to Euclidean geometry easily arise in philosophical discussions on the nature of space and in popularizations of physics. It is difficult material to disseminate, but still, one can come far by immediately incorporating a concrete model of a non-Euclidean geometry into the considerations. In this respect, I find the disc model of the hyperbolic plane suggested by Poincaré (1887) particularly useful. In addition to its mathematical uses, it was the inspiration for Escher in his four woodcuts *Circle Limit* I–IV, ([7], page 180). In ([13], Chapter 4), I gave a short account of the Poincaré disc model, which has successfully been introduced in Denmark at the upper high-school level, and where you encounter some of the surprising relations in hyperbolic geometry. In particular, the striking difference between tilings with congruent regular n -gons in the Euclidean plane, where you can tile with such n -gons only for $n = 3, 4, 6$, and in the hyperbolic plane, where you can tile with such n -gons for each integer $n \geq 3$. At a more advanced level, one can introduce a hyperbolic structure on surfaces topologically equivalent to the surface of a sphere with p handles, for each genus p greater than or equal to 2, by pairwise identification of the edges in a regular hyperbolic $4p$ -gon; cf.[11]. The appearance of non-Euclidean geometries raised the question of which geometry provides the best model of the physical world. This question was illustrated in an inspired poster designed by Nadja Kutz; cf. [6].

Eternity and infinity

Eternity and, more generally, infinity are notions both expressing the absence of limits. Starting from the classical paradoxes of Zeno, which were designed to show that the sensory world is an illusion, there are good possibilities for conversations about mathematical notions associated with infinity. And one can get far, even with fairly difficult topics such as infinite sums; cf. [15].

The harmonic series

A conversation about infinite sums (series) inevitably gets on to the harmonic series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

As you know, this series is *divergent*, i.e., the *N*th *partial sum*

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$$

increases beyond any bound, for increasing *N*.

The following proof of this fact made a very deep impression on me when I first met it. First notice, that for each number *k*, the part of the series from $\frac{1}{k+1}$ to $\frac{1}{2k}$ contains *k* terms, each greater than or equal to $\frac{1}{2k}$, so that

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

With this fact at your disposal, it is not difficult to divide the harmonic series into infinitely many parts, each greater than or equal to $\frac{1}{2}$, proving that the partial sums in the series grow beyond any bound when more and more terms are added.

The alternating harmonic series

The alternating harmonic series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

offers great surprises. As shown in 1837 by the German mathematician Dirichlet, this series can be rearranged, that is, the order of the terms can be changed, so that the rearrangement is a convergent series with a sum arbitrarily prescribed in advance. The proof goes by observing that the positive series (the series of terms with positive sign) increases beyond any upper bound, and that the negative series (the series of terms with negative sign) decreases beyond any lower bound,

when more and more terms are added to the partial sums in the two series. Now, say that we want to obtain the sum S in a rearrangement of the alternating harmonic series. Then we first take as many terms from the positive series as are needed just to exceed S . Then take as many of the terms from the negative series as needed just to come below S . Continue this way by taking as many terms as needed from the positive series, from where we stopped earlier, just again to exceed S . Then take as many terms as needed from the negative series, from where we stopped earlier, just again to come below S , and so on. Since $\frac{1}{n}$ tends to 0 as n increases, the series just described is convergent with sum S . The alternating harmonic series is the mathematical idea behind the episode from *Alice's Adventures in Wonderland*, mentioned at the beginning of this paper.

Mathematics as a sixth sense

In 1982, *Dirac's string problem* was presented on a shopping bag from a Danish supermarket chain [12]. This problem illustrates the property of half-spin of certain elementary particles, mathematically predicted by the physicist P.A.M. Dirac in the 1920s for elementary particles such as the electron and the neutron. To convince colleagues skeptical of his theory, Dirac conceived a model to illustrate a corresponding phenomenon in the macroscopical world. This model consists of a solid object (Dirac used a pair of scissors) attached to two posts by loose (or elastic) strings, say with one string from one end of the object and two strings from the other end to the two posts. Dirac then demonstrated that a double twisting of the strings could be removed by passing the strings over and round the object, while he was not able to remove a single twisting of the strings in this way. Rather deep mathematics from topology is needed to explain the phenomenon, and in this case mathematics comes in as a 'sixth sense', by which we 'sense' (understand) counter-intuitive phenomena. An application to the problem of transferring electrical current to a rotating plate, without the wires getting tangled and breaking, was patented in 1971.

Making mathematics visible

In many countries there are increasing demands to make the role and importance of the subjects taught in the school system visible to the general public. If the curriculum and the methods of teaching are not to stagnate, it is important that an informed debate takes place in society about the individual subjects in school.

For subjects strongly depending on mathematics, this is a great challenge. Where mathematicians (and scientists in general) put emphasis on explanations (proofs), the public (including politicians) are mostly interested in results and consequences. It is doubtless necessary to go part of the way to avoid technical language in presenting mathematics for a wider audience.

On the initiative of the International Mathematical Union, the year 2000 was declared *World Mathematical Year*. During the year many efforts were made to reach the general public through poster campaigns in metros, public lectures, articles in general magazines, etc. and valuable experience was gained. The mathematical year clearly demonstrated the value of an international exchange of ideas in such matters, and the issue of raising public awareness of mathematics is now on the agenda all over the world from eight to infinity.

References

- [1] S.J. Abas and A.S. Salman, ``Symmetries of Islamic geometrical patterns'', World Scientific, Singapore, 1994.
- [2] R. Brown and SUMit software, ``Raising Public Awareness of Mathematics through Knots'', CD-Rom (<http://www.cpm.informatics.bangor.ac.uk/>), 2001.
- [3] M. Chaleyat-Maurel et al, ``Mathematiques dans la vie quotidienne'', Booklet produced in France in connection with World Mathematical Year 2000.
- [4] P. R. Cromwell, ``Polyhedra'', Cambridge Univ. Press, 1997.
- [5] M. Emmer, ``The Fantastic World of M.C. Escher'', Video (50 minutes), ©1980.
- [6] EMS-Gallery (design Kim Ernest Andersen), ``European Mathematical Society, WMY 2000, Poster competition'', <http://www.mat.dtu.dk/ems-gallery/>, 2000.
- [7] M.C. Escher, J.L. Locher (Introduction), W.F. Veldhuysen (Foreword), ``The Magic of M.C. Escher'', Thames & Hudson, London, 2000.
- [8] J.V. Field, ``The Invention of Infinity - Mathematics and Art in the Renaissance'', Oxford Univ. Press, 1997.

[9] H. Götze, Friedrich II and the Love of Geometry, *Mathematical Intelligencer* 17 (1995), No. 4, 48--57.

[10] V.L. Hansen, ``Geometry in Nature'', A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, US, 1993.

[11] V.L. Hansen, *Jakob Nielsen (1890--1959)*, *Mathematical Intelligencer* 15 (1994), No. 4, 44--53.

[12] V.L. Hansen, *The Story of a Shopping Bag*, *Mathematical Intelligencer* 19 (1997), No. 2, 50--52.

[13] V.L. Hansen, ``Shadows of the Circle - Conic Sections, Optimal Figures and Non-Euclidean Geometry'', World Scientific, Singapore, 1998.

[14] V.L. Hansen, Mathematics of a Nautilus shell, Techn. Univ. of Denmark, 2001. See: http://www.mat.dtu.dk/persons/Hansen_Vagn_Lundsgaard/.

[15] V.L. Hansen, ``Matematikens Uendelige Univers'', Den Private Ingeniørfond, Techn. Univ. of Denmark, 2002.

[16] K. Miyazaki, The Cuboctahedron in the Past of Japan, *Mathematical Intelligencer* 15 (1993), No. 3, 54--55.

[17] R.J. Wilson, ``Stamping Through Mathematics'', Springer, New York, 2001.

[18] Mathematics in plays: (a) David Auburn: ``Proof'' (Review Notices AMS, Oct. 2000, pages 1082--1084). (b) Michael Frayn: ``Copenhagen''. (c) Tom Stoppard: ``Hapgood''. See also: Opinion, Notices AMS, Feb. 2001, page 161.

[19] Mathematics in movies: (a) ``Good Will Hunting'' (directed by Gus Van Sant), 1997. (b) ``A beautiful mind'' (directed by Ron Howard), 2001. Based in part on a biography of John Forbes Nash by Sylvia Nasar.

Algebraisk K -teori og sporinvarianter

Lars Hesselholt*

Algebraisk K -teori

Algebraisk K -teori—defineret af Quillen—er af natur multiplikativ. Med sporinvarianter indlejrer man denne teori i en additiv teori, som man lettere kan forstå. Dette muliggør en bestemmelse af den algebraiske K -teori (med koefficienter) af henselske diskrete valuationslegemer af blandet karakteristisk. Lad mig først forklare den forventede struktur af den algebraiske K -teori af et legeme k .

Tilsammen udgør grupperne $K_*(k)$ en sammenhængende gradueret ring. Endvidere er der en kanonisk isomorfi $\ell: k^* \xrightarrow{\sim} K_1(k)$, og $\ell(x) \cdot \ell(1-x) = 0$. Det universelle eksempel på denne algebraiske struktur kaldes Milnor K -teori og betegnes $K_*^M(k)$ [21]. Det er let at beskrive disse grupper ved frembringere og relationer, men det er normalt ganske svært at bestemme deres struktur. Den kanoniske afbildning $K_q^M(k) \rightarrow K_q(k)$ viser sig at være en isomorfi for $q \leq 2$. Lad os nu betragte K -teori med endelige koefficienter. (De rationale K -grupper, som også er af stor interesse, er helt anderledes af natur [8, 9].) Grupperne $K_*(k, \mathbb{Z}/m)$ udgør en anti-kommutativ

gradueret $\mathbb{Z}/m$ -algebra, og hvis k indeholder de m te enhedsrødder, findes der en kanonisk løftning

$$\begin{array}{ccc} & & K_2(k, \mathbb{Z}/m) \\ & \nearrow b & \downarrow \beta_m \\ \mu_m & \xrightarrow{\ell} & K_1(k), \end{array}$$

som til en primitiv m te enhedsrod ζ tilordner det såkaldte Bott element b_ζ . Ved at anvende den multiplikative struktur kan vi udvide b til en afbildning af graduerede ringe $S_{\mathbb{Z}/m}(\mu_m) \rightarrow K_*(k, \mathbb{Z}/m)$. ($S_{\mathbb{Z}/m}(\mu_m)$ er en polynomiums algebra på en enkelt ikke-kanonisk frembringer af grad 2.) En række formodninger af Beilinson og Lichtenbaum forudsiger, at den samlede afbildning

$$K_*^M(k) \otimes S_{\mathbb{Z}/m}(\mu_m) \rightarrow K_*(k, \mathbb{Z}/m)$$

er en isomorfi [1, 19]. Der findes typisk et N , sådan at $K_q^M(k)/m = 0$ for $q > N$. Formodningen siger derfor specielt, at $K_*(k, \mathbb{Z}/m)$ er (Bott-)periodisk i grader større end eller lig med N . I tilfældet $m = 2^v$ følger formodningen fra Voevodskys bevis for Milnors Galois kohomologi formodning. Vi skal her betragte henselske diskrete valuationslegemer af blandet karakteristisk $(0, p)$, hvor p er ulige, og $m = p^v$ [15, 10]. Alle ringe i denne artikel antages kommutative med enhed.

*Dette arbejde var støttet af midler fra National Science Foundation og Alfred P. Sloan Foundation

De Rham-Witt komplekset

Lad V være en henselsk (f.eks. komplet) diskret valuationsring med kvotientlegeme K af karakteristisk 0 og restlegeme k af ulige karakteristisk p . (I skrivende stund er det nødvendigt yderligere at antage, at V er af geometrisk type [13].) Det simpleste eksempel på en sporinvariant er den logaritmiske afledede

$$K_*^M(K) \rightarrow \Omega_{(V,M)}^*$$

der til et symbol $\{a_1, \dots, a_q\}$ tilordner differentialformen $d \log a_1 \dots d \log a_q$. Højresiden er de Rham komplekset med log poler defineret af Kato: en log-ring (A, M) består af en ring A og en afbildning af monoider $\alpha: M \rightarrow (A, \cdot)$; en log-differential-gradueret ring (E^*, M) består af en differential-gradueret ring E^* og afbildninger af monoider $\alpha: M \rightarrow (E^0, \cdot)$ og $d \log: M \rightarrow (E^1, +)$ som opfylder $d \circ d \log = 0$ og $d\alpha(a) = \alpha(a)d \log a$ for alle $a \in M$; de Rham komplekset $\Omega_{(A,M)}^*$ er per definition den universelle log-differential-graduerede ring med underliggende log-ring (A, M) . Vi vil altid give V den *kanoniske* log struktur

$$\alpha: M = V \cap K^* \hookrightarrow V.$$

(Man har da naturlige eksakte følger

$$0 \rightarrow \Omega_V^q \rightarrow \Omega_{(V,M)}^q \rightarrow \Omega_k^{q-1} \rightarrow 0.)$$

Den logaritmiske afledede er imidlertid langt fra at være injektiv. Det viser sig, at man kan råde bod på dette ved hjælp af Witt vektor konstruktionen.

Ringene af Witt vektorer hørende til en ring A , er givet ved mængden af “vektorer”

$$W(A) = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in A\}$$

udstyret med en ny ringstruktur, hvor ringoperationerne er visse polynomielle funktioner i koordinaterne, se [14]. Projektionen på første faktor $W(A) \rightarrow A$ er en naturlig ringhomomorfi med en entydig naturlig multiplikativ sektion givet ved

$$[\]: A \rightarrow W(A), \quad [a] = (a, 0, 0, \dots).$$

Hvis κ er et perfekt legeme af positiv karakteristisk p , så er $W(\kappa)$ den entydigt (op til entydig isomorfi) bestemte komplette diskrete valuationsring af blandet karakteristisk $(0, p)$ med $W(\kappa)/p \xrightarrow{\sim} \kappa$. Generelt er $W(A)$ den inverse limes af ringene $W_n(A)$ af Witt vektorer af længde n . Men istedet for at danne denne limes er det bedre at betragte hele limessystemet $W.(A)$ som en pro-ring. Der er en naturlig afbildning — Frobenius — af pro-ringe $F: W.(A) \rightarrow W._{-1}(A)$ og en naturlig afbildning — Verschiebung — af $W.(A)$ -moduler $V: F_* W._{-1}(A) \rightarrow W.(A)$. Vi bemærker også, at hvis (A, M) er en log-ring, da vil sammensætningen

$$M \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{[\]} W.(A)$$

gøre $(W.(A), M)$ til en pro-log ring.

Det viser sig, at man på naturlig vis kan kombinere differentialformer og Witt vektorer i en konstruktion, der kaldes de Rham-Witt komplekset. Dette blev først udført for $\mathbb{F}_p$ -algebraer af Bloch-Deligne-Illusie [3, 17]

med det mål at opnå en bedre forståelse af Berthelot-Grothendiecks krystallinske kohomologi [2]. Den følgende udvidelse til $\log\mathbb{Z}_{(p)}$ -algebraer (p ulige) blev opnået i samarbejde med Ib Madsen [14, 15]: Lad (A, M) være en $\log$ -ring, for hvilken A er en $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algebra (p ulige). Et *Witt kompleks* over (A, M) er per definition:

(i) en pro-log differential gradueret ring (E^*, M_E) og en afbildning af pro-log ringe

$$\lambda: (W.(A), M) \rightarrow (E^0, M_E);$$

(ii) en afbildning af pro-log-graduerede ringe

$$F: E^* \rightarrow E^*_{-1},$$

sådan at $\lambda F = F\lambda$ og

$$Fd \log_n a = d \log_{n-1} a, \quad \text{for alle } a \in M,$$

$$Fd \lambda[a]_n = \lambda[a]_{n-1}^{p-1} d \lambda[a]_{n-1}, \quad \text{for alle } a \in A;$$

(iii) en afbildning af pro-graduerede moduler over den pro-graduerede ring E^*

$$V: F_* E^*_{-1} \rightarrow E^*,$$

sådan at $\lambda V = V\lambda$, $FV = p$ og $FdV = d$.

En afbildning af Witt komplekser over (A, M) er en afbildning af pro-log-differential-graduerede ringe, der kommuterer med afbildningerne λ , F og V . Det følger fra en generel sætning i kategoriteori, at der findes et *universelt* Witt kompleks over (A, M) , og dette er per definition de Rham-Witt komplekset $W.\Omega^*_{(A, M)}$. Vi kan nu løfte den logaritmiske afledede til en afbildning

$$K_q^M(K) \rightarrow W_n \Omega_{(V, M)}^q,$$

der til symbolet $\{a_1, \dots, a_q\}$ tilordner $d \log_n a_1 \dots d \log_n a_q$. Som den følgende sætning opnået i samarbejde med Thomas Geisser viser, giver denne sporafbildning et bedre billede af Milnors K -grupper [10].

Sætning 1 Hvis $\mu_{p^v} \subset K$, og hvis k er separabelt lukket, inducerer sporafbildningen en isomorfi af pro-abelske grupper

$$K_q^M(K)/p^v \xrightarrow{\sim} (W.\Omega_{(V, M)}^q/p^v)^{F=1}.$$

I beviset definerer vi en (ikke-kanonisk) k -vektorrumsstruktur på $W_n \Omega_{(V, M)}^q/p$ og finder en eksPLICIT basis. Dimensionen er

$$\dim_k (W_n \Omega_{(V, M)}^q/p) = \binom{r+1}{q} e \sum_{s=0}^{n-1} p^{rs},$$

hvor $|k : k^p| = p^r$ og $pV = \mathfrak{m}^e$. Dernæst udregner vi kernen for $1 - F$ og sammenligner resultatet med $K_q^M(K)/p$, som er kendt fra en tidligere udregning af Kato [18, 4]. Der gælder en lignende sætning uden antagelsen, at k er separabelt lukket [13]. Antagelsen, at $\mu_{p^v} \subset K$, er formentlig heller ikke nødvendig.

Sætning 1 har følgende globale analog. Lad V_0 være en henselsk diskret valuationsring med kvotientlegeme K_0 af karakteristisk 0 og med *perfekt* restlegeme k_0 af ulige karakteristisk p . Lad $\mathfrak{X}$ være et glat V_0 -skema, og lad i (resp. j) betegne inklusionen af den specielle (resp. generelle) fiber:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{j} & \mathfrak{X} & \xleftarrow{i} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} K_0 & \hookrightarrow & \mathrm{Spec} V_0 & \longleftarrow & \mathrm{Spec} k_0. \end{array}$$

Antag yderligere, at $\mu_{p^v} \subset K_0$. Det følger da af beviset for sætning 1, at der er en isomorfi af sheaves af pro-abelske grupper på Y i den étale topologi

$$i^* R^q j_* \mathbb{Z}/p^v(q) \xrightarrow{\sim} (i^*(W. \Omega_{(\mathfrak{X}, M)}^q/p^v))^{F=1}.$$

Det cyklotomiske spor

Svarende til den logaritmiske afledede for Milnor K -teori har man for Quillens K -teori det topologiske Dennis spor

$$K_*(K) \rightarrow \mathrm{THH}_*(V|K)$$

til topologiske Hochschild homologi defineret af Marcel Bökstedt [5]. (Vi benytter her en variant af denne konstruktion, som skyldes Dundas-McCarthy [7, 20, 15].) Grupperne $\mathrm{THH}_*(V|K)$ udgør en log-differential-gradueret ring med underliggende log-ring (V, M) [15], hvor afbildningen $d \log$ er givet ved sammensætningen

$$M = V \cap K^* \xrightarrow{\ell} K_1(K) \rightarrow \mathrm{THH}_1(V|K).$$

Den kanoniske afbildning

$$\Omega_{(V, M)}^q \rightarrow \mathrm{THH}_q(V|K),$$

som er kompatibel med sporafbildningerne fra Milnor og Quillen K -teori, er en isomorfi for $q \leq 2$. I lighed med den logaritmiske afledede er det topologiske Dennis spor langt fra at være injektiv. Dette kan afhjælpes ved en konstruktion, der skyldes Bökstedt-Hsiang-Madsen, og som i retrospekt kan betragtes som en kombination af topologisk

Hochschild homologi og Witt vektorer. Jeg vil nu genkalde denne konstruktion: det cyklotomiske spor [6, 11].

Det topologiske Dennis spor er defineret som den inducerede afbildningen på homotopigrupper hørende til en kontinuert afbildning mellem topologiske rum

$$K(K) \rightarrow \mathrm{THH}(V|K).$$

Som en følge af Connes' teori om cykliske mængder har rummet på højre side en kontinuert virkning af cirkelgruppen $\mathbb{T}$. Desuden er billedet af sporet indeholdt i fixmængden for $\mathbb{T}$ -virkningen. Man definerer nu

$$\mathrm{TR}^n(V|K; p) = \mathrm{THH}(V|K)^{C_{p^{n-1}}}$$

til at være fixmængden for undergruppen $C_{p^{n-1}} \subset \mathbb{T}$ af orden p^{n-1} . Det viser sig da, at homotopigrupperne

$$\mathrm{TR}_q^n(V|K; p) = \pi_q(\mathrm{TR}^n(V|K; p))$$

udgør et Witt kompleks over (V, M) [16, 12, 15]. Frobenius-afbildningen F er induceret af den naturlige inklusionsafbildning og Verschiebung-afbildningen V af den tilhørende transfer. Men det er noget vanskeligere at definere strukturafbildningerne i limessystemet samt afbildningen λ ; se [6] og [16]. Det topologiske Dennis spor inducerer en afbildning af pro-abelske grupper

$$K_q(K) \rightarrow \mathrm{TR}_q^*(V|K; p),$$

og dette er det cyklotomiske spor. Billedet er indeholdt i fixmængden for Frobenius-operatoren. Den kanoniske afbildning

$$W_n \Omega_{(V, M)}^q \rightarrow \mathrm{TR}_q^n(V|K; p),$$

som er kompatibel med sporafbildningerne fra Milnor og Quillen K -teori, er en isomorfi for $q \leq 2$. Den følgende sætning, der er analog til sætning 1, er et resultat af samarbejder med Thomas Geisser [11] og Ib Madsen [16, 15].

Sætning 2 *Hvis k er separabelt lukket, da inducerer det cyklotomiske spor en isomorfi af pro-abelske grupper*

$$K_q(K, \mathbb{Z}/p^v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{TR}_q(V|K; p, \mathbb{Z}/p^v)^{F=1}.$$

Der er en mere generel version af denne sætning, hvor antagelsen, at k er separabelt lukket, kan udelades [13]. Det er heller ikke nødvendigt, at V er af geometrisk type.

Tate spektralfølgen

Hvis G er endelig gruppe og X et G -rum, er det normalt ikke muligt bestemme homotopigrupperne af fixmængden X^G udfra kendskab til homotopigrupperne af X med deres inducerede G -virkning. Ved første blik er det dette problem, man står over for, hvis man ønsker at bestemme grupperne

$$\mathrm{TR}_q^n(V|K; p) = \pi_q(\mathrm{THH}(V|K)^{C_{p^{n-1}}}).$$

Det viser sig imidlertid, at afbildningsfiberen af strukturaftbildningen

$$\mathrm{TR}^n(V|K; p) \rightarrow \mathrm{TR}^{n-1}(V|K; p)$$

lader sig identificere med Borel banerummet $\mathbb{H}.(C_{p^{n-1}}, \mathrm{THH}(V|K))$, hvis homotopigrupper er givet ved en spektralfølge

$$\begin{aligned} E_{s,t}^2 &= H_s(C_{p^{n-1}}, \mathrm{THH}_t(V|K)) \\ &\Rightarrow \pi_{s+t} \mathbb{H}.(C_{p^{n-1}}, \mathrm{THH}(V|K)). \end{aligned}$$

Dette antyder muligheden af at udregne grupperne $\mathrm{TR}_q^n(V|K; p)$ induktivt ved at løse disse spektralfølger. I praksis løser man i stedet en lignende spektralfølge — Tate spektralfølgen — som har bedre algebraiske egenskaber, og som desuden indeholder information om strukturaftbildningerne i limesystemet $\mathrm{TR}^\bullet(V|K; p)$. Det er herved muligt at vise den følgende sætning, som er kulminationen på et tiårigt langt samarbejde med Ib Madsen.

Sætning 3 *Hvis $\mu_{p^v} \subset K$, er den kanoniske afbildning*

$$W. \Omega_{(V,M)}^* \otimes S_{\mathbb{Z}/p^v}(\mu_{p^v}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{TR}_*(V|K; p, \mathbb{Z}/p^v)$$

en isomorfi af pro-abelske grupper.

Ved kombination af sætningerne 1, 2 og 3 får vi nu den følgende sætning, som bekræfter Beilinson og Lichtenbaums formodning for legemet K [15, 10]. Denne sætning er også gyldig, selvom k ikke er separabelt lukket.

Sætning 4 *Hvis $\mu_{p^v} \subset K$, da er den kanoniske afbildning*

$$K_*^M(K) \otimes S_{\mathbb{Z}/p^v}(\mu_{p^v}) \xrightarrow{\sim} K_*(K, \mathbb{Z}/p^v)$$

en isomorfi.

References

- [1] A. A. Beilinson, *Height pairing between algebraic cycles*, *K*-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer-Verlag, 1987, pp. 1–25.
- [2] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schemas de caractéristique $p > 0$* , Lecture Notes in Math., vol. 407, Springer-Verlag, 1974.
- [3] S. Bloch, *Algebraic K-theory and crystalline cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S. **47** (1977), 187–268.
- [4] S. Bloch and K. Kato, *p -adic étale cohomology*, Publ. Math. IHES **63** (1986), 107–152.
- [5] M. Bökstedt, *Topological Hochschild homology*, Preprint 1985, Universität Bielefeld.
- [6] M. Bökstedt, W.-C. Hsiang, and I. Madsen, *The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces*, Invent. Math. **111** (1993), 465–540.
- [7] B. I. Dundas and R. McCarthy, *Topological Hochschild homology of ring functors and exact categories*, J. Pure Appl. Alg. **109** (1996), 231–294.
- [8] J. L. Dupont, *Algebra of polytopes and homology of flag complexes*, Osaka J. Math. **19** (1982), 599–641.
- [9] J. L. Dupont and C.-H. Sah, *Scissors congruences, II*, J. Pure Appl. Alg. **25** (1982), 159–195.
- [10] T. Geisser and L. Hesselholt, *On the K-theory of a henselian discrete valuation field with non-perfect residue field*, Preprint 2002.
- [11] ———, *Topological cyclic homology of schemes*, *K*-theory (Seattle, 1997), Proc. Symp. Pure Math., vol. 67, 1999, pp. 41–87.
- [12] L. Hesselholt, *On the p -typical curves in Quillen’s K-theory*, Acta Math. **177** (1997), 1–53.
- [13] ———, *Algebraic K-theory and trace invariants*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, China, 2002), vol. 2, Higher Education Press, Beijing, China, 2002, pp. 415–425.
- [14] L. Hesselholt and I. Madsen, *On the de Rham-Witt complex in mixed characteristic*, Preprint 2002.
- [15] ———, *On the K-theory of local fields*, Ann. Math. (to appear).
- [16] ———, *On the K-theory of finite algebras over Witt vectors of perfect fields*, Topology **36** (1997), 29–102.
- [17] L. Illusie, *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) **12** (1979), 501–661.

- [18] K. Kato, *Galois cohomology of complete discrete valuation fields*, Algebraic K -theory, Part II (Oberwolfach, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 967, Springer, Berlin-New York, 1982, pp. 215–238.
- [19] S. Lichtenbaum, *Values of zeta-functions at non-negative integers*, Number theory, Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer-Verlag, 1983, pp. 127–138.
- [20] R. McCarthy, *The cyclic homology of an exact category*, J. Pure Appl. Alg. **93** (1994), 251–296.
- [21] J. Milnor, *Algebraic K -theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9** (1970), 318–344.



Matilde 14 / Oktober 2002

*Af: Bodil Branner, Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet
e-mail: B.Branner@mat.dtu.dk
og
Ib Madsen, Institut for Matematiske Fag, Århus Universitet
e-mail: imadsen@imf.au.dk*

IMU generalforsamling i Shanghai 17 – 18 august 2002.

Traditionen tro afholdt den Internationale Matematiske Union (IMU) generalforsamling umiddelbart før afholdelsen af den Internationale Matematikerkongres (ICM). De danske delegerede var denne gang Ib Madsen og Bodil Branner. Vi deltog begge for første gang i en IMU generalforsamling.

Alle delegerede var indlogeret på Peace Hotel, kendt fra Shanghais tidligere storhedstid i 1930'erne. Det ligger ned til floden HuangPu med udsigt til alle sider til ny-byggede eller ved-at-blive-byggede skyskrabere. Overalt i Shanghai er der byggeri igang. Efter sigende er byen pt verdens travleste byggeplads. For at komme til Convention Centret, hvor generalforsamlingen fandt sted, krydsede vi under floden i mindre kabel-vogne gennem den nyligt åbnede "the Bund sightseeing Tunnel", hvor man bliver bombarderet med blinkede kulørte lamper og lyde, så man føler sig hensat til Tivoli.

Generalforsamlingen består af beretninger fra præsident og sekretær, beslutning om kontingent for de kommende fire år, beslutning om stedet for den næste ICM, valg af medlemmer til bestyrelserne for IMU, og de permanente organer under IMU, dvs dels ICMI (International Committee of Mathematical Instructions), dels CDE (Commission on Development and Exchanges), samt valg af to medlemmer til ICHM (International Commission on the History of Mathematics). Mange beslutninger er taget på forhold og skal blot bekræftes af generalforsamlingen. Nogle valg afgøres dog af forsamlingen. Men med en organisation, der kun mødes til generalforsamling hvert fjerde år, er den direkte indflydelse fra medlemslandene i sagens natur meget begrænset.

Pr. 1. januar 2002 havde IMU 65 lande som medlemmer. De er opdelt i 5 grupper. Kontingentet og antallet af stemmer er bestemt af, hvilken gruppe landet er placeret i. Danmark er i gruppe II og kan altså sende to delegerede. Til stede var delegerede fra 47 lande, samt en del observatører.

Informationer om IMU kan findes på hjemmesiden:

<http://www.emis.de/mirror/IMU/>

Herunder bl.a. Bulletin nr 48, som indeholder den rapport, der blev fremlagt ved generalforsamlingen. Vi skal derfor kun fremhæve de vigtigste beslutninger fra generalforsamlingen og pege på anbefalinger fra den stående komite CEIC (Committee on Electronic Information and Communication).

Kontingent

Det blev besluttet at forhøje kontingentet med 10 % med den begrundelse, at det ikke var blevet forhøjet for fire år siden, og at det var vigtigt ikke mindst for aktiviteterne i forbindelse med CEIC at have et begrænset økonomisk råderum.

Eksekutivkomite for IMU 2003 - 2006

Der blev valgt ny eksekutivkomite for de kommende fire år. Den består af følgende 9 medlemmer:

Præsident:

John Ball (United Kingdom)

Vice-præsidenter:

Jean-Michel Bismut (Frankrig)

Masaki Kashiwara (Japan)

Sekretær:

Philip A. Griffiths (USA)

Medlemmer iøvrigt:

Andrey A. Bolibruch (Rusland)

Martin Grötschel (Tyskland)

Ma Zhi-Ming (Kina)

Ragni Piene (Norge)

Madabusi S. Raghunathan (Indien)

Efter valget bemærkede den nuværende præsident Jacob Palis, at Ragni Piene bliver det første kvindelige medlem af en IMU eksekutivkomite nogensinde.

Eksekutivkomite for ICMI 2003 – 2006

Der blev valgt ny eksekutivkomite for de kommende fire år. Den består af følgende 10 medlemmer:

Præsident:

Hyman Bass (USA)

Vice-præsidenter:

Jill Adler (Sydafrika)

Michele Artigue (Frankrig)

Sekretær:

Bernard R. Hodgson (Canada)

Medlemmer iøvrigt:

Carmen Batanero (Spanien)

Mary Elizabeth Falk de Losada (Colombia)
Nikolai Dolbilin (Rusland)
Peter Lawrence Galbraith (Australien)
Peter Stoyanov Kenderov (Bulgarien)
Frederick K. S. Leung (Hong Kong)

ICM 2006

Madrid i Spanien blev valgt som stedet for ICM 2006. Der havde på et tidligere tidspunkt været forslag om Rom i Italien og om Delhi i Indien, men begge disse forslag blev trukket tilbage af forslagsstillerne, som i stedet bakkede op om Spanien.

Abel Prisen og Gauss Prisen

To nyindstiftede priser blev omtalt. Abel Prisen, der vil blive uddelt hvert år fra Norge, første gang i 2003. Priskomiteen består af 5 medlemmer og nedsættes af det Norske Videnskaps-Akademi. Et medlem er en norsk matematiker, tre udpeges efter forslag fra IMU og et efter forslag fra EMS. Gauss Prisen vil blive uddelt ved fremtidige ICM, første gang i 2006, sammen med Fields-medaljerne og Nevanlinna Prisen. Den gives for matematiske resultater, der er af afgørende betydning for moderne teknologi. Priskomiteen vil blive nedsat af IMU. Iøvrigt administreres prisen af den Tyske Matematiske Forening DMV.

Best Current Practices:

Recommendations on Electronic Information Communications.

CEIC blev nedsat ved IMU generalforsamlingen i Dresden i 1998 med Peter Michor som formand. Han var på det tidspunkt sekretær for EMS og havde blandt meget andet etableret EMIS (European Mathematics Information Service). Komiteen blev forlænget for de næste fire år. Komiteen har udarbejdet en række anbefalinger, der bakkedes op af eksekutivkomiteen. Interesserede bør læse den fulde ordlyd, der findes under IMU hjemmesiden og også er aftrykt i Notices, September 2002, Vol.49, pp 922-925. Ved ICM var der desuden afsat en hel eftermiddag den 26. august (parallelt med foredrags sessionerne) til en mere dybtgående præsentation og diskussion. Her citerer vi blot indledningen af "Best Current Practices":

"Communication of mathematical research and scholarship is undergoing profound change as new technology creates new ways to disseminate and access the literature. More than technology is changing, however; the culture and practices of those who create, disseminate, and archive the mathematical literature are changing as well. For the sake of present and future mathematicians, we should shape those changes to make them suit the needs of the discipline. For this reason, we have identified a number of "best practices" for those involved with the mathematical literature-mathematicians, librarians, and publishers."

Del II

Øvrige artikler

*Af: Lisbeth Fajstrup, Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet
e-mail: fajstrup@math.auc.dk*

Mentorer søges.

Hvis man ønsker at have flere kvindelige matematikere i Europa, kan man basalt set sætte ind på to fronter: Prøve at få flere kvinder ind i matematik og prøve at få færre kvinder til at forlade matematik.

Ingen af delene er en let opgave, men nu forsøger European Women in Mathematics at holde på de kvinder, som allerede er i faget. Det er lykkedes at få EU-støtte til et web-baseret mentorprogram for kvinder i matematik. Der er gjort et stort forarbejde, hvor man bl.a. har lavet pilotundersøgelser af, hvilke behov der er for en mentor - hvad skal mentorer bruges til, skal de være fra samme land som ``mentee'en" (den mentorerede??), skal mentoren være af hunkøn,...

Til efteråret er web-siden klar. Det er meningen, at den, der ønsker at være mentor eller gerne vil have en mentor, lægger nogle generelle faktuelle oplysninger ind i databasen. F.eks. universitet, land og matematisk specialisering. Så vil Cathy Hobbs, Oxford Brookes University, som er ansvarlig for projektet, matche mentorer og ``mentees" og sætte dem i emailkontakt med hinanden. Derefter er det op til mentor og mentee at bruge hinanden. Der vil være generelle råd og vejledning på web-siden - særligt om mentorering via email. Desuden vil der være et diskussionsforum, hvor man kan diskutere ideer og spørgsmål med andre mentorer.

Pilotprojektet har vist, at de fleste gerne vil have en mentor, som arbejder i samme land, men at det ikke behøver at være en kvindelig mentor.

En mentor skal først og fremmest være villig til at investere noget tid i projektet. Mindst 1/2 time hver anden uge. Derudover kræves entusiasme samt viljen til at hjælpe andre ved at lytte, dele erfaringer og give gode råd.

For at projektet skal komme ordentligt igang, er det naturligvis vigtigt, at der er mentorer nok.

Hvis du vil være mentor, så skriv til

Dr. Catherine Hobbs

School of Computing and Mathematical Sciences

Oxford Brookes University

Wheatley Campus

Oxford OX33 1HX

UK

Tel: (+44) 1865 484530

cahobbs@brookes.ac.uk

Så vil hun fortælle, hvor web-siden er, og hvad du skal gøre, når den er klar. Man kan godt både være mentor og have en mentor.

Der er mere information om baggrunden for mentoringprogrammet på

<http://www.math.helsinki.fi/EWM/info/funding.html>



Matilde 14 / Oktober 2002

Af Tine Wedege, Roskilde Universitetscenter
e-mail: tiw@ruc.dk

Kan freden modelleres?

Et spørgsmål der også blev stillet på det internationale tværvidenskabelige møde om matematik og krig i Karlskrona sidst i august.

En flot sensommerdag mødtes halvtreds matematikere, matematik- og videnskabshistorikere, filosoffer, fysikere, dataloger samt militære analytikere og militærhistorikere i Karlskrona. Vi kom fra Danmark, Frankrig, Norge, Rusland, Storbritannien, Sverige, Tyskland og USA. Karlskrona blev anlagt som flådestation i 1680, og som en by stærkt præget af sin militære baggrund dannede den en passende ramme for konferencen *Mathematics and War*. Et usædvanligt videnskabeligt møde, der fandt sted den 29., 30. og 31. august på Blekinge Tekniska Högskola, som kollegaers markering af at Bernhelm Booss-Bavnbek sidste år rundede de 60.

Efter konferencen spurgte redaktøren mig om jeg ville lave en "øjenvidneskildring", og det gør jeg med glæde. Det var ikke alene en bemærkelsesværdig international begivenhed. (For første gang var matematik og krig koblet som overskrift på en videnskabelig conference.) Det var også en irriterende tankevækkende begivenhed. (Koblingen nødvendiggjorde at en række videnskabelige og politisk-etiske synsvinkler blev konfronteret.)

Det centrale tema for konferencen var *Co-development of mathematics and the means of war?* Arrangørerne havde på forhånd formuleret tre overordnede emner: (1) Militære spor i matematikkens historie og nutidens matematik. (2) Forandringer i krigens karakter under indflydelse af matematisk teori og matematikbaseret teknologi. (3) Ethiske og sociale aspekter af interaktionen mellem matematik og militær. Min skildring indeholder urimeligt korte præsentationer af foredragene, som anlagde hver deres specifikke synsvinkel.

Perspektiver fra matematikken

Roger Godement (matematiker, Le Groupe Bourbaki, Paris) indledte rækken af foredrag med at se på forbindelserne mellem militær, videnskab og teknologi i det 20. århundrede med fokus på USA efter 1930'erne. Han konkluderede at der var sket afgørende forandringer i spillet mellem militær og naturvidenskab og matematik, i forskningsfinansiering og i transfer mellem civil og militær teknologi, men at ingen endnu havde ønsket eller kunnet sammendrage hvad matematikkens rolle har været kvantitativt eller kvalitativt i denne udvikling. Han sammenfattede dog indtil videre matematikkens funktion med udtrykket "en servicevidenskab".

Reinhard Siegmund-Schultze (matematikhistoriker, Agder Lærerhøjskole, Norge) anlagde et internationalt perspektiv på matematikeres militærarbejde i 1914-45 ved hjælp af eksemplariske overvejelser om epistemisk transfer mellem matematik og militære anvendelser. Med et eksempel (W. Haaks hurtige og effektive skift fra ren differentialgeometri til anvendt anti-fly-projektil-design-hydrologi) demonstrerede han den "rene" matematiks nye rolle som øvelsesbane og beredskabsreserve for militæret.

Elisabeth Rakus-Andersson (matematiker, Blekinges Tekniska Högskola, Karlskrona) pegede på at tre begavede polske matematikstuderende allerede i 1929 blev sat til at bryde koden i den tyske maskine Enigma, på en tid hvor andre hemmelige militærtjenester kun ansatte ingeniører eller lingvister for eksotiske sprog til dekodering.

Kathleen Williams (militærhistoriker, CUNY, New York) fortalte historien om de to kvindelige matematikere Grace Hopper og Mina Rees, som blev involveret i den amerikanske flåde i Anden Verdenskrig. Hopper i banebrydende data-analyse arbejde, som førte til udvikling af høj-niveau programmeringssprog; Rees til at "oversætte" militære behov til matematiske forskningsprogrammer. Begge uden tid til at gennemprøve de videnskabelige resultater på sædvanlig vis.

Tinne Hoff Kjeldsen (matematikhistoriker, RUC) fokuserede i "War as the Midwife of Mathematical Disciplines" på Anden Verdenskrigs betydning for fremkomst og etablering af nye discipliner i anvendt matematik samtidig med en fornyet interesse og vækst inden for nogle relaterede emner i "ren" matematik. Disciplinerne var matematisk programmering, operationsanalyse, spilteori og teorierne om konveksitet og om systemer af lineære uligheder. Også her var det svært at skelne mellem dels den interne og anvendte motivation og dels den militære og civile betydning, som måske i det hele taget har været og er overvurderet.

Revaz Valerianovich Gamkrelidze (matematiker, Steklov Institute of Mathematics, Rusland) fortalte om Pontryagin's opdagelse af kontrolteoriens maksimumprincip under arbejdet med at løse et specifikt optimeringsproblem relateret til flymanøvrering. Hans pointe var at den militære sektor i 1950ernes Sovjetunion var så beskyttet og afgrænset fra den civile forskning, at Pontryagin og hans medarbejdere ikke for alvor blev involveret i den militære anvendelse.

Førstedagen blev afsluttet af Philip J. Davis på værdig og provokerende vis med et offentligt foredrag på Karlskronas Marinemuseum, hvori han kobkede matematik, underholdning og krig med udgangspunkt i numerisk grafik.

Perspektiver fra militæret

"War cannot be calculated" og "Warfare can be calculated" var titlerne for to på hinanden følgende foredrag af militæranalytikere på andendagen. De to lettere modstridende udsagn illustrerer en side af kompleksiteten inden for dette område.

Svend Bergstein (dansk pensioneret oberstløjtnant og forhenværende forskningsminister) hentede sin definition af krig som "an act of human intercourse" fra Carl von Clausewitz, som han citerede: "Selvom vi er i stand til at skønne udfaldet af et enkelt slag, må vi indse at det kun er et estimat og ikke en prognose." Ud fra hans synspunkt udgør krig et kontinuum fra politiske ambitioner, og Bergstein brugte i sit foredrag begrebet *social teknologi* hentet fra Popper til at fremhæve det menneskelige og sociale som en nødvendighed for at skabe sammenhæng i militære enheder. Han blev spurgt om matematisk tænkning, matematiske metoder og matematikstøttet ny teknologi gør den moderne krig til en afmålt begrænset risiko og dermed gør Clausewitz' ord om de uforudsigelige kræfter i krigen til skamme, især når de moderne matematiske redskaber koncentrerer sig i hånden på den ene af krigens sider. Han svarede "Nej" netop med henvisning til den principielt udtømmelige kategori "social teknologi".

Svend Clausen (fra det danske forsvarsakademi) præsenterede nogle danske modeller til at simulere og analysere mulige længerevarende krigsforløb på dansk territorium med Markovkæder og differentiaalligninger. I den efterfølgende diskussion viste den slags modeller sig at være ret kontroversielle. Der blev bl.a. peget på overparametrisering og på absurditeten i at estimere overgangssandsynlighederne for helt utænkelige situationer, som man kun kan forestille sig ender i ragnarok allerede efter første døgn. Desuden blev der peget på sådanne modellers rent legitimerende funktion for allerede truffne beslutninger. Modellerne blev dog også taget i forsvar som de eneste man har.

Overskriften for min skildring er inspireret af et spørgsmål stillet til den svenske militæranalytiker Helge Löfstedt: "Hvorfor ikke modellere fred og samarbejde i stedet for krig?" Han redegjorde for de nyeste forandringer i den praktiske krigsførelse p.g.a. nye matematiske redskaber, som *indbyder til* begrænsede operationer uden egne tab og kun med begrænset tab for modstanderen. I diskussionen blev der sået tvivl om den militære betydning af den matematiske teknologi (høj-hastighed bredbånd krypteret kommunikation, omfattende satellit- og flyrekognoscering, og høj-præcisions laser eller gps-styret bombning), for tilsyneladende har landtropper (nordalliancen) nemlig været helt afgørende i Afghanistan, mens fraværet af landtropper i Kosovo har bidraget til den militære stilstand dengang.

Ralf Bedrath (politolog, Research Group Information Society and Security Policy, Berlin) talte om muligheden for en "elektronisk Pearl Harbour". Med "cyberwar" mente han krig i, på og mod computer netværk. Han spurgte om vi har grund til at frygte cyberterrorisme eller måske snarere et nyt digitalt våbenkapløb mellem stater, og endelig diskuterede han det mulige, eller snarere umulige, i kvantitativ såvel som kvalitativ våbenkontrol i cyberspace.

Etiske problemstillinger

Konferencens tredje dag begyndte med præsentation af to ekstreme grundmodeller for stillingtagen til krig og ansvar. Finn Aaserud (Videnskabshistoriker, Niels Bohr Institutet) berettede om Niels Bohr's politiske korstog under Anden Verdenskrig. Imponerende var Bohr's klare forståelse for det truende atomare kapløb og hans vedholdende tale om den påkrævede åbenhed over for russerne med førende britiske og amerikanske videnskabsmænd og statsmænd. Tragisk var til gengæld hans manglende forståelse for en fysikers begrænsede indflydelse.

Andrew Hodges (Matematiker, Oxford, Storbritanien) brugte derimod Alan Turings konstruktion af en digital computer til at illustrere en ganske anden, mere realistisk og dermed i tendensen kynisk holdning til militært brug af matematik under og efter Anden Verdenskrig. I den efterfølgende diskussion pegede den tyske matematiker Matthias Kreck på at matematikere nu om dage bedst kan identificeres med små Grace Hoppers og Alan Turings: "Vores problemløsningsiver kan let tændes, f.eks. af en smule patriotisme; og så virker vores iver næsten som et euforiserende stof, så vi ikke tænker længere."

Jesper Ryberg (filosof, RUC) diskuterede videnskabsmænds personlige moralske ansvar når de bidrager til militær forskning. Han gennemheglede fem forskellige argumenter for det synspunkt at videnskabsmænd ikke har noget ansvar (eller kun et marginalt ansvar) for hvordan deres arbejde bliver brugt.

Konferencens to sidste bidrag skulle anlægge et positivt perspektiv på matematisk tænkning og matematiske modeller til at bevare fred og forebygge eller afslutte krig. I sit foredrag "Mathematical thinking and the law of war" tog Ib Martin Jarvad (jurist, RUC) udgangspunkt i den matematiske tanke der lå til grund for Keplers, Galileis og Newtons lovebegreb og kunne dokumentere at samme tanke også lå til grund for skabelsen af den moderne folkeret og

reguleringen af krigen, som blev introduceret af Vitoria og Grotius og internationalt etableret i en lang proces lige fra den Westfalske Fred 1648 til FN-systemet efter 1945.

Jürgen Scheffrans (fysiker, Institute for Climate Impact Research, Potsdam, Tyskland) titel var "Calculated Security? Mathematical Modelling of Conflict and Cooperation in Social Systems". Efter L.F. Richardsons pionerarbejde med at modellere våbenkapløbet mellem verdenskrigene håbede man at matematikken kunne bidrage til konfliktløsning. Ifølge Richardson er det en fordel ved matematikken at forholdene kan beskrives kort og klart, men ulempen er at det der udelukkes (fordi det ikke kan matematiseres) måske er det vigtigste.

Bernhelm afsluttede med at gentage at konferencens formål var at få et overblik over hvilken viden og hvilke argumenter der findes på området. Han konkluderede:

"(1) Der kan ikke være noget forkert i at tænke sig om og i den sammenhæng bruge logik, abstraktion, matematisk tænkning. Man kan håbe at den matematiske tanke som rationalitetsform kan hjælpe med til at forhindre det værste. (2) Militær matematisk teknologi er dog som al teknologi ambivalent. Den kan tjene til forsvar og til angreb; den kan indbyde til krigshandlinger eller afskrække. (3) Matematisk støttede lynkrigsillusioner er som andre illusioner livsfarlige og forfærdelige for dem det går ud over i første omgang, og ofte for illusionsbæreren i anden omgang. Den aktuelle etiske tilstand afgøres måske ved at se om den enkelte matematiker bidrager til at sprede sådanne illusioner eller til at modvirke dem"

Åbenhed og skarphed

Der findes ikke en enkelt, men mange fortællinger om matematik og krig. Det åbne videnskabelige møde i Karlskrona var det første af sin art. For at bevare konferencens åbenhed tror jeg at matematik og krig&fred som genstandsområde fortsat må dyrkes ved hjælp af multidisciplinære tilgange. For at skærpe udsagn og synspunkter er der dog behov for at konstruere nye interdisciplinære begreber, f.eks. om det helt specifikke forhold mellem teori og praksis i dette felt. Forhåbentlig følges konferencen op med en videnskabelig publikation på et forlag som kan stå for den internationale distribution. Indtil videre må vi nøjes med hjemmesiden <http://mmf.ruc.dk/~booss/mathwar/>

Tilføjet ved bladets trykning :

Konference proceedings udkommer på Birkhäuser Verlag, Basel & Boston (foråret 2003)



Matilde 14 / Oktober 2002

Ved: Poul Hjort, Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet
e-mail: p.g.hjorth@mat.dtu.dk

Towards a common framework for Mathematics degrees in Europe

THE MATHEMATICS TUNING GROUP¹

In the wake of the *Bologna Declaration* [B], signed in 1999 by Ministers responsible for Higher Education from 29 European countries, and its follow up, the *Prague Communiqué* [P], a group of universities established the project “Tuning educational structures in Europe” [T1, T2]. It was co-ordinated by the Universities of Deusto and Groningen and benefited from the financial support of the European Union. As its name suggests, the main objective of the project was to study how to “tune” (*not* to make uniform) educational structures in Europe, and thereby aid the development of the European Higher Education Area. This in turn should help mobility and improve the employability of European graduates.

Mathematics was one of the areas included in Tuning, and this paper reflects the unanimous consensus of the mathematics group of the project. But since the group does not pretend to have any representative role, we think it is necessary to make this document available for comment to the wider community of European mathematicians. We believe that any kind of action along the lines we sketch will only be possible and fruitful when a broad agreement has been reached. Indeed any mathematician member of the group welcomes comments on the document. E-mail addresses appear at the end.

The Mathematics Tuning Group is happy to express its thanks to the co-ordinators of the Tuning Project, Julia González (Universidad de Deusto) and Robert Wagenaar (Rijksuniversiteit Groningen), as well as to the European Commission, for creating the conditions for fruitful and pleasant interactions between its members.

Summary

- This paper refers only to universities (including technical universities), and none of our proposals apply to other types of institutions.

¹ Group members are listed at the end of the paper.

- The aim of a “common framework for mathematics degrees in Europe” is to facilitate an automatic recognition of degrees in order to help mobility.
- The idea of a common framework must be combined with an accreditation system.
- The two components of a common framework are similar (although not necessarily identical) structures and a basic common core curriculum (allowing for some degree of local flexibility) for the first two or three years.
- Beyond the basic common core curriculum, and certainly in the second cycle, programmes could diverge significantly. Since there are many areas in mathematics, and many of them are linked to other fields of knowledge, flexibility is of the utmost importance.
- Common ground for all programmes will include calculus in one and several real variables and linear algebra.
- We propose a broad list of further areas that graduates should be acquainted with in order to be easily recognised as mathematicians. It is not proposed that all programmes include individual modules covering each of these areas.
- We do not present a prescriptive list of topics to be covered, but we do mention the three skills we consider may be expected of any mathematics graduate:
 - (a) the ability to conceive a proof,
 - (b) the ability to model a situation mathematically,
 - (c) the ability to solve problems using mathematical tools.
- The first cycle should normally allow time to learn some computing and to meet at least one major area of application of mathematics.
- We should aim for a wide variety of flavours in second cycle programmes in mathematics. Their unifying characteristic feature should be the requirement that all students carry out a significant amount of individual work. To do this, a minimum of 90 ECTS credits² seems necessary for the award of a Master's qualification.
- It might be acceptable that various non-identical systems coexist, but large deviations from the standard (in terms of core curriculum or cycle structure) need to be grounded in appropriate entry level requirements, or other program specific factors, which can be judged by external accreditation. Otherwise, such degrees risk not benefiting from the automatic European recognition provided by a common framework, even though they may constitute worthy higher education programmes.

1. A common framework: what it should and shouldn't be or do

1.1 The only possible aim in agreeing a “common European framework” should be to facilitate the automatic recognition of mathematics degrees in Europe in order to help mobility. By this we mean that when somebody with a degree in mathematics from country A goes to country B:

a) He/she will be legally recognised as holding such a degree, and the Government of country B will not require further proof of competence.

² ECTS stands for "European Credit Transfer System". ECTS credits measure the learning outcomes attained by students. The basic general assumption is that the learning outcomes that an average full time student is expected to attain in one academic year are worth 60 ECTS credits. Therefore, the workload required to get 60 ECTS credits should correspond to what an average full time student is expected to do in one academic year.

b) A potential employer in country B will be able to assume that he/she has the general knowledge expected from somebody with a mathematics degree.

Of course, neither of these guarantees employment: the mathematics graduate will still have to go through whatever procedures (competitive exams, interviews, analysis of his/her curriculum, value of the degree awarding institution in the eyes of the employer,...) are used in country B to obtain either private or public employment.

1.2 One important component of a common framework for mathematics degrees in Europe is that all programmes have similar, although not necessarily identical, structures. Another component is agreeing on a basic common core curriculum while allowing for some degree of local flexibility.

1.3 We should emphasise that by no means do we think that agreeing on any kind of common framework can be used as a tool for automatic transfer between Universities. These will always require consideration by case, since different programmes can bring students to adequate levels in different but coherent ways, but an inappropriate mixing of programmes may not.

1.4 In many European countries there exist higher education institutions that differ from universities both in the level they demand from students and in their general approach to teaching and learning. In fact, in order not to exclude a substantial number of students from higher education, it is essential that these differences be maintained. We want to make explicit that **this paper refers only to universities (including technical universities)**, and that any proposal of a common framework designed for universities would not necessarily apply to other types of institutions.

2. Towards a common core mathematics curriculum

2.1 General remarks

At first sight, mathematics seems to be well suited for the definition of a core curriculum, especially so in the first two or three years. Because of the very nature of mathematics, and its logical structure, there will be a common part in all mathematics programmes, consisting of the fundamental notions. On the other hand, there are many areas in mathematics, and many of them are linked to other fields of knowledge (computer science, physics, engineering, economics, etc.). Flexibility is of the utmost importance to keep this variety and the interrelations that enrich our science.

There could possibly be an agreement on a list of subjects that must absolutely be included (linear algebra, calculus/analysis) or that should be included (probability/statistics, some familiarity with the mathematical use of a computer) in any mathematics degree. In the case of some specialised courses, such as mathematical physics, there will certainly be variations between countries and even between universities within one country, without implying any difference of quality of the programmes.

Moreover, a large variety of mathematics programmes exist currently in Europe. Their entry requirements vary, as do their length and the demands on the student. It is extremely important that this variety be maintained, both for the efficiency of the education system and

socially, to accommodate the possibilities of more potential students. To fix a single definition of contents, skills and level for the whole of European higher education would exclude many students from the system, and would, in general, be counterproductive.

In fact, the group is in complete agreement that programmes could diverge significantly beyond the basic common core curriculum (e.g. in the direction of "pure" mathematics, or probability - statistics applied to economy or finance, or mathematical physics, or the teaching of mathematics in secondary schools). The presentation and level of rigour, as well as accepting there is and must continue to be variation in emphasis and, to some extent, content, even within the first two or three years, will make all those programmes recognisable as valid mathematics programmes.

As for the second cycle, not only do we think that programmes could differ, but we are convinced that, to reflect the diversity of mathematics and its relations with other fields, all kinds of different second cycles in mathematics should be developed, using in particular the specific strengths of each institution.

2.2 The need for accreditation

The idea of a basic core curriculum must be combined with an accreditation system. If the aim is to recognise that a given program fulfils the requirement of the core curriculum, then one has to check on three aspects:

- a list of contents
- a list of skills
- the level of mastery of concepts

These cannot be reduced to a simple scale.

To give accreditation to a mathematics programme, an examination by a group of peer reviewers, mostly mathematicians, is considered essential. The key aspects to be evaluated should be:

- (a) the programme as a whole
- (b) the units in the programme (both the contents and the level)
- (c) the entry requirements
- (d) the learning outcomes (skills and level attained)
- (e) a qualitative assessment by both graduates and employers

The group does not believe that a (heavy) system of European accreditation is needed, but that universities in their quest for recognition will act at the national level. For this recognition to acquire international standing, the presence on the review panel of mathematicians from other countries seems necessary.

3. Some principles for a common core curriculum for the first degree (Bachelor) in mathematics

We do not feel that fixing a detailed list of topics to be covered is necessary, or even convenient. However, we do think that it is possible to give some guidelines for the common

content of a “European first degree in mathematics”, and more important, for the skills that all graduates should develop.

3.1 Contents

3.1.1 All mathematics graduates will have knowledge and understanding of, and the ability to use, mathematical methods and techniques appropriate to their programme. Common ground for all programmes will include

- calculus in one and several real variables
- linear algebra.

3.1.2 Mathematics graduates must have knowledge of the basic areas of mathematics, not only those that have historically driven mathematical activity, but also others of more modern origin. Therefore graduates should normally be acquainted with most, and preferably all, of the following:

- basic differential equations
- basic complex functions
- some probability
- some statistics
- some numerical methods
- basic geometry of curves and surfaces
- some algebraic structures
- some discrete mathematics

These need not be learned in individual modules covering each subject in depth from an abstract point of view. For example, one could learn about groups in a course on (abstract) group theory or in the framework of a course on cryptography. Geometric ideas, given their central role, could appear in a variety of courses.

3.1.3 Other methods and techniques will be developed according to the requirements and character of the programme, which will also largely determine the levels to which the developments are taken. In any case, all programmes should include a substantial number of courses with mathematical content.

3.1.4 In fact, broadly two kinds of mathematics curricula currently coexist in Europe, and both are useful. Let us call them, following [QAA]³, “theory based” and “practice based” programmes. The weight of each of the two kinds of programmes varies widely depending on the country, and it might be interesting to find out whether most European university programmes of mathematics are “theory based” or not.

Graduates from theory-based programmes will have knowledge and understanding of results from a range of major areas of mathematics. Examples of possible areas are algebra, analysis, geometry, number theory, differential equations, mechanics, probability theory and statistics, but there are many others. This knowledge and understanding will support the knowledge and

³ This document was considered extremely useful and met with unanimous agreement from the group. In fact we have quoted it almost verbatim at some points.

understanding of mathematical methods and techniques, by providing a firmly developed mathematical context.

Graduates from practise-based programmes will also have knowledge of results from a range of areas of mathematics, but the knowledge will commonly be designed to support the understanding of models and how and when they can be applied. Besides those mentioned above, these areas include numerical analysis, control theory, operations research, discrete mathematics, game theory and many more. (These areas may of course also be studied in theory-based programmes.)

3.1.5 It is necessary that all graduates will have met at least one major area of application of mathematics in which it is used in a serious manner and this is considered essential for a proper appreciation of the subject. The nature of the application area and the manner in which it is studied might vary depending on whether the programme is theory-based or practice-based. Possible areas of application include physics, astronomy, chemistry, biology, engineering, computer science, information and communication technology, economics, accountancy, actuarial science, finance and many others.

3.2 Skills

3.2.1 For a standard notion like integration in one variable, the same “content” could imply:

- computing simple integrals
- understanding the definition of the Riemann integral
- proving the existence and properties of the Riemann integral for classes of functions
- using integrals to model and solve problems of various sciences.

So, on one hand the contents must be clearly spelled out, and on the other various skills are developed by the study of the subject.

3.2.2 Students who graduate from programmes in mathematics have an extremely wide choice of career available to them. Employers greatly value the intellectual ability and rigour and the skills in reasoning that these students will have acquired, their firmly established numeracy, and the analytic approach to problem-solving that is their hallmark.

Therefore, the three key skills that we consider may be expected of any mathematics graduate are:

- (a) the ability to conceive a proof,
- (b) the ability to model a situation mathematically,
- (c) the ability to solve problems using mathematical tools.

It is clear that, nowadays, solving problems should include their numerical and computational resolution. This requires a sound knowledge of algorithms and programming and the use of available software.

3.2.3 Note also that skills and level are developed progressively through the practice of many subjects. We do not start a mathematics programme with one course called "how to make a proof" and one called "how to model a situation", with the idea that those skills will be acquired immediately. Instead, it is through practice in all courses that these develop.

3.3 Level

All graduates will have knowledge and understanding developed to higher levels in particular areas. The higher-level content of programmes will reflect the title of the programme. For example, graduates from programmes with titles involving statistics will have substantial knowledge and understanding of the essential theory of statistical inference and of many applications of statistics. Programmes with titles such as mathematics might range quite widely over several branches of the subject, but nevertheless graduates from such programmes will have treated some topics in depth.

4. The second degree (Master) in mathematics

We have already made explicit our belief that establishing any kind of common curriculum for second cycle studies would be a mistake. Because of the diversity of mathematics, the different programmes should be directed to a broad range of students, including in many cases those whose first degree is not in mathematics, but in more or less related fields (computer science, physics, engineering, economics, etc.). We should therefore aim for a wide variety of flavours in second cycle programmes.

Rather than the contents, we think that the common denominator of all second cycles should be the level of achievement expected from students. A unifying characteristic feature could be the requirement that all second cycle students carry out a significant amount of individual work. This could be reflected in the presentation of a substantial individual project.

We believe that, to be able to do real individual work in mathematics, the time required to obtain a Master's qualification should be the equivalent of at least 90 ECTS credits. Therefore, depending on the national structure of first and second cycles, a Master would typically vary between 90 and 120 ECTS credits.

5. A common framework and the Bologna agreement

5.1 How various countries implement the Bologna agreement will make a difference on core curricula. In particular, 3+2 may not be equivalent to 5, because, in a 3+2 years structure, the 3 years could lead to a professional diploma, meaning that less time is spent on fundamental notions, or to a supplementary 2 years, and in that case the whole spirit of the 3 years programme should be different.

5.2 Whether it will be better for mathematics studies to consist of a 180 ECTS Bachelor, followed by a 120 ECTS Master (a 3+2 structure in terms of academic years), or whether a 240+90 (4+1+project) structure is preferable, may depend on a number of circumstances. For example, a 3+2 break up will surely facilitate crossing between fields, where students pursue Masters in an area different from that in which they obtained their Bachelor degree.

One aspect that can not be ignored, at least in mathematics, is the training of secondary school teachers. If the pedagogical qualification must be obtained during the first cycle studies, these should probably last for 4 years. On the other hand, if secondary school teaching requires a Master (or some other kind of postgraduate qualification), a 3 years Bachelor may be adequate, with teacher training being one of the possible postgraduate options (at the Master's level or otherwise).

5.3 The group did not attempt to solve contradictions that could appear in the case of different implementations of the Bologna agreement (i.e. if three years and five years university programmes coexist; or different cycle structures are established: 3+1, 3+2, 4+1, 4+1+project, 4+2 have all been proposed). As we said before, it might be acceptable that various systems coexist, but we believe that large deviations from the standard (such as a 3+1 structure, or not following the principles stated in section 3) need to be grounded in appropriate entry level requirements, or other program specific factors, which can be judged by external accreditation. Otherwise, such degrees risk not benefiting from the automatic European

recognition provided by a common framework, even though they may constitute worthy higher education programmes.

6. References

- [B] http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/bologna_declaration.pdf
- [P] http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/Prague_communicuTheta.pdf
- [QAA] The Benchmark document on Mathematics, Statistics and Operational Research, from the UK Quality Assurance Agency for Higher Education, <http://www.qaa.ac.uk/crntwork/benchmark/phase2/mathematics.pdf>.
- [T1] The official sites of the project *Tuning educational structures in Europe*: <http://www.relint.deusto.es/TuningProject/index.htm>,
<http://www.let.rug.nl/TuningProject/index.htm>
- [T2] Information on the project *Tuning educational structures in Europe* in the European Commission site: <http://europa.eu.int/comm/education/tuning.html>

MEMBERS OF “THE MATHEMATICS TUNING GROUP”

Stephen Adam, University of Westminster (Higher education expert)
José Manuel Bayod, Universidad de Cantabria (bayodjm@unican.es)
Martine Bellec, Université Paris IX Dauphine (martine.bellec@dauphine.fr)
Marc Diener, Université de Nice (diener@math.unice.fr)
Alan Hegarty, University of Limerick (Alan.Hegarty@ul.ie)
Poul Hjorth, Danmarks Tekniske Universitet (P.G.Hjorth@mat.dtu.dk)
Anne Mette Holt, Danmarks Tekniske Universitet (International relations expert)
Günter Kern, Technische Universität Graz (Kern@opt.math.tu-graz.ac.at)
Frans J. Keune, Katholieke Universiteit Nijmegen (keune@sci.kun.nl)
Luc Lemaire, Université Libre de Bruxelles (llemaire@ulb.ac.be)
Andrea Milani, Università degli Studi di Pisa (milani@dm.unipi.it)
Julian Padget, University of Bath (jap@maths.bath.ac.uk)
Maria do Rosário Pinto, Universidade de Porto (mspinto@fc.up.pt)
Adolfo Quirós, Universidad Autónoma de Madrid (adolfo.quirós@uam.es)
Wolfgang Sander, Technische Universität Braunschweig (w.sander@tu-bs.de)
Hans-Olav Tylli, University of Helsinki (hojtylli@cc.helsinki.fi)



Matilde 14 / Oktober 2002

*Af: Bodil Branner, Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet.
e-mail: B.Branner@mat.dtu.dk*

Rådsmøde for EMS i Oslo 1 – 2 juni 2002

Hvert andet år indkalder European Mathematical Society (EMS) til rådsmøde (council meeting). Her vedtages de overordnede retningslinier for foreningens virke, der er valg til nogle af pladserne i eksekutivkomiteen, kontingentet fastlægges, der aflægges beretning fra de forskellige EMS komiteer og eksekutivkomiteen fremlægger sine visioner for den nærmeste fremtid.

De tidligere rådsmøder har alle været afholdt i forbindelse med de af EMS arrangerede Europæiske Matematikkongresser (European Congress of Mathematics) hvert fjerde år (i år, der er delelige med 4) eller de Internationale Matematikerkongresser (International Congress of Mathematicians), der også afholdes hvert fjerde år (i lige år, der ikke er delelige med 4). Den internationale kongres blev i 1994 afholdt i Zürich og i 1998 afholdt i Berlin. Da den internationale kongres i 2002 fandt sted i Beijing, blev dette års rådsmøde efter invitation fra Norsk Matematisk Forening holdt umiddelbart inden Abel konferencen i 200-året for Abels fødsel (Abel bi-centennial Conference).

EMS har knap 50 forskellige matematiske foreninger i Europa som medlemmer. Foreningerne er medlemmer af klasse 1, 2 eller 3 og betaler kontingent i forhold hertil. Hver forening kan sende samme antal delegerede til mødet som klassen angiver. Dansk Matematisk Forening er medlem af klasse 2. Som delegerede for DMF deltog i år Vagn Lundsgaard Hansen og Bodil Branner. Godt 40 af medlemsforeningerne var repræsenteret på mødet. Desuden var de fleste af de individuelle delegerede til stede, samt de fleste af medlemmerne af EMS' eksekutivkomite. De individuelle delegerede er valgt af de individuelle medlemmer af EMS. Der er ca. 2300 individuelle medlemmer. (Se også i dette nummer af Matilde opfordringen fra David Salinger, EMS Publicity Officer, til at blive individuelt medlem af EMS.)

Eksekutivkomite 2003 - 2004

Til eksekutivkomiteen blev for de næste fire år, 2003 – 2006, valgt:

Præsident:

Sir John Kingman, Isaac Newton Institute, Cambridge, England

Vice-præsident:

Luc Lemaire (genvalg), Université Libre de Bruxelles, Belgien

Kasserer:

Olli Martio (genvalg), University of Helsinki, Finland

Sekretær:

Helge Holden, Norges teknisk-naturvidenskapelige Universitet, Trondheim, Norge

Medlemmer iøvrigt:

Doina Cioranescu (genvalg), Université Paris VI, Frankrig

Pavel Exner, Academy of Sciences, Rez near Prague, Tjekkiet

Sammen med de nedenstående fire med valgperiode 2001 – 2004 udgør de den samlede eksekutivkomite:

Vice-præsident:

Bodil Branner, Danmarks Tekniske Universitet, Kgs. Lyngby, Danmark

Medlemmer iøvrigt:

Victor M. Buchstaber, Moscow State University, Rusland

Marta Sanz Solé, Universitat de Barcelona, Spanien

Mina Teicher, Bar-Ilan University, Ramat-Gan, Israel.

Kontingentforhøjelse

For 2003 og 2004 vil kontingentet for individuelt medlemskab af EMS være 20 Euros per år (mod tidligere 15 Euros), forudsat at man er medlem af DMF eller en anden af EMS' medlemsforeninger.

Ændring af statutten

Der blev vedtaget følgende ændringer af statutten:

- Et medlem af eksekutivkomiteen kan være medlem i 12 år, hvis de sidste 4 års er som præsident. Kommentar: Alle valg til eksekutivkomiteen er for 4 år; en præsident kan ikke genvælges, øvrige medlemmer kan genvælges en gang, og som noget nyt kan man altså derefter vælges til præsident.
- Der blev indført regler for reciprocitetsmedlemmer. Kommentar: I den oprindelige statut, var der ikke tænkt på reciprocitetsaftaler.
- Et forslag om at give mulighed for at udpege æresmedlemmer af EMS blev nedstemt.

EMS Priser ved ECM

Det blev præciseret, hvem der kan modtage en pris ved en af de Europæiske Matematikkongresser. Priser (op til 10) gives til yngre matematikere i Europa. For at være valgbar må man ikke være fyldt 35 år den 30 juni i det år kongressen afholdes. Ved et brudt karrieremønster kan aldersgrænsen dog øges op til 38 år. En matematiker erklæres for at være Europæisk, hvis vedkommende er af Europæisk nationalitet eller har arbejde (inkluderer også studium) i Europa eller har udført en væsentlig del af sit matematiske arbejde i Europa.

Visioner

Blandt visionerne for den nærmeste fremtid er opbygningen af EMS Publishing House, der netop er startet i år.

Derudover er det værd at nævne EMS' deltagelse i det verdensomspændende projekt om opbygningen af et Digitalt Matematisk Bibliotek, samt i en fortsat indsats for modernisering og udbygning af databasen Zentralblatt-MATH. For de sidste to projekter har EMS indsendt interessetilkendegivelser (Expressions of Interest) til EU, indkaldt i forbindelse med det 6te rammeprogram. Til at belyse disse to projekter er der nedenfor gengivet resumé for hver af de to interessetilkendegivelser.

A Digital Mathematics Library

The European Mathematical Society seeks the support of the European Union in contributing to the Digital Mathematics Library, in the framework of an international endeavour endorsed by national mathematical societies in Europe and by the International Mathematical Union. This will be Europe's contribution to a world-wide project to digitise all the mathematical literature, with further support from non European funding agencies like the National Science Foundation in the United States. This project will have a strong impact on the way mathematics is done and used in the 21st century. The outcome will be a digital collection representing a significant amount of Europe's Cultural Heritage, an enhancement of existing Knowledge and Interface Technologies, and an important path towards a Knowledge Society.

CITIZEMS – akronym for -

**A Comprehensive Information system Through Integration of the
Zentralblatt-MATH Europe-based database in the
Mathematical Sciences**

Setting up a comprehensive information system in the mathematical sciences has become an issue of central importance in the communication and information society in which we live because of the new more central role played by mathematics in the global economy. Zentralblatt-MATH (Z-MATH), the European-based bibliographic database in mathematics, forms already a solid basis for accessing the world-wide mathematical

literature, with special attention to its European component. To properly position Z-MATH in line with the new standards for access in the electronic age it is important to take a number of technical and conceptual steps for which the European Mathematical Society is seeking support from the European Union. This proposal is deliberately geared towards easing the access to potential users of mathematical results outside the academic community.

Tak til Rolf Jeltsch

Rådsmødet sluttede med en tak til Rolf Jeltsch for den kæmpe indsats, han har ydet som præsident for EMS siden 1999.

*Af: Carsten Lunde Petersen, IMFUFA, Roskilde Universitets Center
e-mail: lunde@mmf.ruc.dk*

DMF's sommerskole i matematisk modellering og ikke-lineær dynamik

Samarbejde og samvær på tværs af institutioner.

Det var en stor fornøjelse at skue ud over den skiftevis intenst lyttende og ivrigt snakkende forsamling af matematik studerende fra landets universiteter på DMF's sommerskole på Søminestationen i Holbæk.

For mig som arrangør var det en særlig glæde at set sommerskolens to målsætninger, at medvirke til at styrke samarbejdet såvel fagligt som socialt i dansk matematik og at præsentere aktuelle matematiske temaer for deltagerne, opfyldt i rigt mål.

Ideen til dette års sommerskole om matematisk modellering og ikke-lineær dynamik fødtes mens jeg deltog i sidste års sommerskole på Sandbjerg Gods. Den modnedes gennem diskussion med kolleger og blev fuldbragt ved hjælp af de studerende i sommerskolens programkomite.

Sommerskolens program bød på seks et halvt spændende og veltilrettelagte forløb/oplæg, et fra hver af Per W. Karlson, DTU, Poul Hjorth, DTU, Mogens Niss, RUC, Johnny Ottesen, RUC, Steen Thorbjørnsen, SDU og Kasper Larsen, SDU samt Jan Phillip Solovej, KU. Forløbene var blandet op med passende pauser til refleksion og samvær.

For mange af sommerskolens deltagere var det åbenlyst gensynets glæde at gense andre deltagere fra sidste år. I år havde vi endvidere belært at sidste års erfaringer, gjort forskellige tiltag for at øge integrationen institutionerne imellem. Først og fremmest havde vi på forhånd inddelt deltagerne i grupper, hvis sammensætning var så blandet, som det nu lod sig gøre. Disse grupper fungerede både som arbejdsgrupper i forbindelse med opgaver og miniprojekter ved forløbene og som arbejdsgrupper med praktiske gøre mål. F.eks. skulle hver arbejdsgruppe stå for en borddækning og en opvask. Som antydte lykkedes integrationen.

På det organisatoriske niveau lykkedes integrationen også. Som en nyskabelse i forhold til sidste år var der studerende med i program komiteen. Ved den afsluttende evaluering snakkede de allerede om næste års sommerskole. Selvom de syntes der skal nye kræfter til næste år, vil de meget gerne være med til at bestemme det faglige indhold af næste års sommerskole og stiller sig til rådighed med deres erfaringer (Selve det faglige program var i realiteten fastlagt da de indtrådte i komiteen.). Der er derfor brug for nye studerende som vil være med til at arrangere næste sommerskole. Endvidere er der brug for en VIP, som stiller sig og evt. sine ideer til rådighed. Jeg kan varmt anbefale jobbet.

En sådan sommerskole kan selvfølgelig ikke afholdes uden resurser. Når det overhovedet har kunnet lade sig gøre at arrangere sommerskolen uden at flå de studerende skyldes det sommerskolens sponsorer. Sommerskolen har modtaget sponsorater fra Nykredit, SimCorp og Aloc-Bonnier og støtte i form af hjælp til deltagerbetalingen fra deltagerne hjeminstitutioner.

Sommerskolen 2002

Vi har i dette indlæg valgt at skrive om hvordan det sociale har været på Sommerskolen 2002, da vi mener, det har været en meget vigtig del af sommerskolen, og det har været en god oplevelse.

Noget af det, der blev snakket flittigt om på sommerskolen var, hvordan det var læse matematik på de andre uddannelsesinstitutioner end ens egen. Det var tilsyneladende interessant for de fleste at høre om hvilke kurser de andre havde fulgt, hvordan studieformen, studiemiljøet og studenterlivet var de andre steder. Fælles for AAU og RUC er det gruppeorganiserede, problemorienterede projektarbejde, hvor der i løbet af et semester udarbejdes en projektrapport, der skal forsvares ved slutningen af semesteret ved siden af de andre eksaminer i kurserne. På KU og AU derimod er der mere tid til kurserne, og intet projektarbejde udover et mindre antal som f.eks. Bachelor-opgaven og naturligvis specialet. Alt i alt har det været en positiv oplevelse, som vi ser frem til næste år.

Hold 1

Halvti håbløse Holbæk Haiku

Nogen kommer sent
Hører ikke velkommen
Pyt der er pita.

Skabe stor model
Mon målene de passer
Ikke mannequin

Rødvinsoksesovs
Dansorama natten lang
Morgen i stilhed

Optioner til salg
Tid til matematik nu
Mange tal til sidst

Mogens slutter af
Afskedens time er nær
Sommerskole slut

Gruppe 6

En mail: Hvem har lyst til at arrangere sommerskole? Det var meget skægt sidste år, så hvorfor ikke give en hånd med. Sådan ender man som medarrangør. Sådan endte vi som medarrangørgruppe eller sagt på en anden måde som supportgruppe for arrangøren Carsten.

Rollen som supportgruppe var yderst afslappet. To ture til RUC, hvor der over kaffe og kage blev diskuteret indhold og praktiske rammer omkring sommerskolen. Det faglige var der styr på. Tilbage var der så for os at få styr på det sociale.

En filmaften og en fest. Til filmaftenen blev der selvfølgelig valgt en film med matematisk islæt, nemlig "A beautiful mind". Vi fik Jan Philip Solovej til at introducere filmen, hvilket gav os alle mulighed for at finde ud af hvad vi burde kende Nash for som matematikere. Og festen dagen derpå blev en succes.

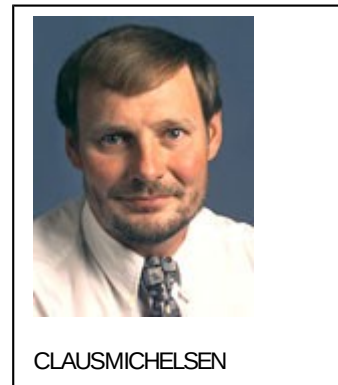
Tja, hva' er der andet tilbage at sige end at vi håber nogle andre er med på at stable et arrangement på benene til næste år.

Gruppe 7

Uddannelsesfronten, Matilde nr. 14

Består denne gang af to artikler (nedenfor). Husk illustrationer

- *til Michelsens artikel: billede af forfatteren (nedenfor, side 2-4)*
- *til mit stykke: billede af Raymond Duval (nedenfor, s. 5-6)*



Matematik og gymnasiereformer

Af: lektor ph.d. Claus Michelsen,

Dansk Institut for Gymnasiepædagogik/Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet

I handlingsplanen *Bedre Uddannelser*¹ annoncerer regeringen en række større reformer på bl.a. gymnasie- og hf-området. Der planlægges en konference efteråret 2002 om mål og indhold i en kommende gymnasiereform med henblik på en redegørelse til Folketinget januar 2003. Regeringen vil fremsætte lovforslag om reform af det almene gymnasium efteråret 2003 med virkning fra august 2005. Ifølge handlingsplanen er formålet med en reform, at forbedre de unges reelle studiekompetence og dermed styrke grundlaget for, at flere unge gennemfører en videregående uddannelse. Som elementer i en kommende reform, der skal medvirke til en styrkelse af den reelle studiekompetence peges der bl.a. på vægt på samspil mellem fag, vægt på fordybelse, styrkelse af de naturvidenskabelige fag og de naturvidenskabelige dannelseselementer samt en ophævelse af den nuværende linjeopdeling og indførelse af en kort fælles indledende periode inden valg af endelig fagsammensætning.

Den seneste reform af det almene gymnasium trådte i kraft i 1988. I årene inden reformen var der en heftig debat om gymnasieskolens rolle og navnlig indretning. Der var både blandt uddannelsespolitikere og gymnasieskolens organisationer bred enighed om, at gymnasiet ikke længere var tidssvarende, og at en omstrukturering af gymnasiet med henblik på at imødegå ændrede samfundsmæssige og demografiske betingelser var nødvendig. Der blev iværksat en række formelle og uformelle forsøg på forskellige planer: strukturelle, indholdsmæssige og arbejdsformsmæssige. Der blev udstedt forsøgsbekendtgørelser og givet dispensationer til realisering af disse. For matematikfaget var det vigtigste træk ved disse initiativer uden tvivl indførelsen af de såkaldte *aspekter*. Det storstilede forsøgs- og udviklingsarbejde døde ud i 1988, da den nye gymnasiereform trådte i kraft. Reformen var fremsat af daværende undervisningsminister Bertel Haarder, og blev vedtaget i folketingssamlingen 1986-87 med stemmerne fra den borgerlige VCQM regering, det Radikale Venstre samt Fremskridtspartiet. For matematikfaget betød reformen, at de tre aspekter *Det historiske aspekt*, *modelaspektet* og *matematikens indre struktur* blev en del af fagets bekendtgørelse.

Den aktuelle situation i gymnasieskolen er meget lig den, skolen befandt sig i tiden op til reformen i 1988. Folketinget vedtog i 1999 *Udviklingsprogrammet for fremtidens ungdomsuddannelser*², og som led i udviklingsprogrammet er der igangsat et stort antal specifikke forsøgs- og udviklingsarbejder og enkelte større strukturarbejder. I 2001 udsendte Undervisningsministeriet

¹ Se <http://pub.uvm.dk/2002/bedre1>

² Se <http://us.uvm.dk/gymnasie/udvikling/udvikgym.htm>

rapporten *Det Virtuelle Gymnasium – Det almene gymnasium i viden- og netværkssamfundet*³, hvori der fremlægges en vision og en strategi for, hvordan gymnasierne kan igangsætte en proces, der over tid kan resultere i udvikling af virtuelle læringsmiljøer. Med en ekstraordinær runde for ansøgninger udviklingsarbejder og forsøg i skoleåret 2002/2003 understøtter Undervisningsministeriet forsøgs- og udviklingsarbejder, hvor skoler arbejder videre med de perspektiver for udvikling af undervisningen og af hele gymnasiet/hf, som rapporten lægger op til. Med henblik på at imødekomme de ganske store udfordringer matematikfaget og matematikundervisningen i gymnasiet kommer til at stå overfor i forbindelse med reformen, er der iværksat et omfattende forsøgsarbejde. Gennem nogle år har der været en række pionerforsøg med brugen af CAS-værktøjer i undervisningen og ved eksamen. Selv om der kun er omkring 40 CAS-hold, så vil de erfaringer, der her er indhøstet, givetvis få en betydelig indvirkning på matematikundervisningens udvikling. Pensum for disse forsøgshold er det samme som for de øvrige matematikhold, men det ordinære eksamenssæt ændres, så der ved prøven med hjælpemidler tages hensyn til, at eksaminanderne har avancerede symbolmanipulerende lommeregner til rådighed. Et samarbejde mellem Uddannelsesstyrelsen og en arbejdsgruppe i Matematiklærerforeningen har ført til et mere bredt standardforsøg fra og med skoleåret 2002/2003 til afløsning af CAS-forsøgene. Temaerne for standardforsøget er: Plads til fordybelse i valgfrie emneforløb, mulighed for udbygning af elevernes IT-kompetencer i matematik, bedre muligheder for projektarbejde og tværfagligt samarbejde, samt fri adgang til anvendelse af alle hjælpemidler ved 2. del af den skriftlige eksamen, herunder CAS-værktøjer. På hvert niveau (B-niveau, A3-niveau og A1-niveau) vil pensum til den skriftlige prøve blive reduceret med 25-30% i forhold til de nugældende bestemmelser, hvorved der skabes plads til de valgfrie emneforløb, der skal indgå med stor vægt i pensum til den mundtlige prøve. Der er i forsøget lagt et initiativ ud til den enkelte lærer om at finde nogle gode emneforløb. Fagkonsulent Bjørn Grøn og Matematiklærerforeningens styrelse har udarbejdet en plan for, hvordan lærerne kan aktiveres og inspireres til at udvikle emneforløb. Der vil blive udgivet et lille hæfte indeholdende beskrivelser af emneforløb, lærerne opfordres til at indsende undervisningsmateriale til Matematiklærerforeningens hjemmeside og der planlægges udgivelse af små 24-siders elevhæfter, der viser eksempler på nye emneforløb og lægger op til nye undervisningsformer. Forhåbentlig vil mange lærere deltage i standardforsøget. Desværre er der blandt matematiklærere ikke den store tradition for at dele for at dele erfaringer. Men de mange initiativer fra fagkonsulenten og Matematiklærerforeningen skaber en enestående mulighed for, at deltagerne i standardforsøget kan udveksle erfaringer, diskutere og inspirere hinanden. Beretninger om undervisningspraksis vil bidrage til at gøre erfaringer til mere end noget personligt og løfte det til erfaringer som mange kan lære af - erfaringer overbringes til andre personer og bliver en del af disse personers egne erfaringer.

Standardforsøget peger i retning af en gymnasiereform, hvor matematikfaget kommer til at bestå af en fælles kerne og en stor grad af frihed til at tage emner ind, som ikke er skriftlig pensum. Men standardforsøget nytænker ikke pensum, der er kun tale om en reduktion af det gamle pensum. Gymnasiereformen vil nok kræve et andet indhold i faget. Der skal specificeres et kernepensum, og så skal det beskrives, hvilke almene kompetencer faget kan bidrage med. Netop nu foregår der i Undervisningsministeriet en intern afsøgning og afprøvning af forskellige muligheder, og forhåbentlig vil lærernes erfaringer fra forsøgsarbejdet indgå i ministeriets arbejde og derved blive en del af grundlaget for den kommende gymnasiereform. Lærernes aktive medvirken og ejerskab er en nødvendig betingelse for en reform, der lægger vægt på et nyt syn på undervisning, indhold og lærerrolle. Men erfaringerne fra tidligere reformer er skræmmende. Som den

³ Se <http://us.uvm.dk/gymnasie/almen/it/virtueltgym.html>

amerikanske undervisningsforsker Larry Cuban⁴ peger på, bærer reformer af uddannelsessystemet præg af lappeløsning-tænkning, hvor man forsøger at forbedre og effektivisere det eksisterende undervisning uden at gribe ind i grundlæggende organisationsstrukturer, og uden at gå ind i hvordan lærere og elever udfører deres roller. Som plausible forklaringer på dette, peger Cuban bl.a., på, at i perioder hvor økonomiske, sociale og demografiske ændringer påvirker den offentlige opinion vil specielle værdier få fornyet opmærksomhed og vil af enkeltindivider, interessegrupper, medier og politiske grupperinger blive transformeret til den offentlige og politiske scene. Specielt anvendes skolen som en kamparena, hvilket bl.a. skyldes en i offentligheden udbredt opfattelse af at uddannelsessystemet er stedet, hvor man kan løse alle typer af problemstillinger. Skolen og lærerne udsættes for et betydeligt pres for forandring og forventningerne har ofte været både urimelige og dårligt funderet.

⁴ L. Cuban (1990). Reforming Again, Again, and Again. *Educational Researcher*, 19 (1), 3-13

Et grundproblem i matematikundervisningen – og et fransk visit.

Af Carl Winsløw, DPU

Enhver matematikunderviser bruger en stor del af sin tid på at *repræsentere*. Ikke i den officielle forstand, med cocktailparties, damekjoler, visitkort i sølvbakker osv. – men i den *semiotiske* forstand, hvor symboler, diagrammer, fagter osv. er de ydre manifestationer af en indre tankeverden. Vi holder normalt ikke lange foredrag om vores personlige oplevelse af denne tankeverden. Tværtimod lægger matematiklæreren ofte bevidst eller ubevidst en vis distance til det subjektive. Det drejer sig ikke om at 'tro på hvad læreren siger' – fx fordi han er sympatisk eller fordi man respekterer ham – og det drejer sig heller ikke om at 'gøre som læreren', fx ved at bruge de samme symboler eller gentage hvad han har sagt. Det drejer sig om i en eller anden forstand at 'gennemskue' – at se igennem – de mange tegn og gerninger, at se 'meningen bagved'. Og derved få adgang til den matematiske tankeverden og de objekter og sammenhænge, som den indeholder.

Det er matematikundervisningens dilemma nr. 1: matematiske objekter – trekanter, funktioner, vektorrum osv. – kan kun 'betragtes' gennem mere eller mindre tilfældige repræsentationer, men alligevel kræver 'forståelse' af objektet en opfattelse af det, som er uafhængig af konkrete repræsentationer, i den forstand at objektet kan 'genkendes' i mange skikkelser, selv når det ikklædes en hidtil uset. Mange matematiklærere – fra skole til universitet, og fra Oldtiden til vore dage – har utvivlsomt fortvivlet over den kendsgerning, at mange – trods ihærdige forsøg – ikke når udover det 'rutinemæssige', at følge visse algoritmiske forskrifter for brug af repræsentationerne. I mange tilfælde stiller man sig da også tilfreds med mere eller mindre mekaniske færdigheder i (gen)brug af 'metoder' og 'resultater'. Men selvom efterligning kunne være et skridt på vejen, er den ikke målet.

For at sætte problemet i relief, kan vi bruge analogien med en ganske anden situation. Når et lille barn lærer at tale, er der også en del gentagelse involveret. Og lidt efter lidt sker 'miraklet': barnet bliver i stand til både at forme og forstå sætninger, det aldrig har hørt, og i situationer, som det ikke har været ude for før. Naturligvis på basis af et 'inventar' af ord og sætningsformer, som barnet tidligere har mødt – men i nye anvendelser, som ofte kan virke stærkt overraskende. Det er oplagt, at barnet fra fødslen er udstyret med en slags 'sprogeevne' (som studeret af bl.a. Noam Chomsky), som langt overgår hvad hukommelse og '(endelige) algoritmer' alene kan præstere. Og som matematiklærere må vi ofte konstatere, at en tilsvarende 'matematikevne' i hvert fald ikke altid er til stede hos elever og studerende. Men det, at i hvert fald nogle af dem alligevel bliver i stand til at 'gennemskue' de konkrete repræsentationer og gøre selvstændigt brug af dem, rejser også spørgsmålet: *hvad skal der egentlig til?* Er der nogle 'evner', som i særlig grad er nødvendige for at lære matematik?

Den verdensberømte franske matematikdidaktiker, filosof og psykolog Raymond Duval har studeret dette problem i 30 år. Hans tesis – som er udforsket gennem en lang række af eksperimenter med elever hovedsageligt på det sekundære niveau – er, at matematiklæring for at være succesfuld må mobilisere visse 'kognitive funktioner' (systematiske former for tankegang), som handler om at *skifte* mellem repræsentationer i *forskellige tegnsystemer* (herunder sædvanligt sprog, symbolsprog, diagrammer osv.). Et matematisk objekt vil for individet være en slags *ækvivalensklasse af mulige repræsentationer*, og forståelsen af det er knyttet til *evnen til at koordinere sådanne repræsentationer*. Den 'proces-orienterede' forståelse begrænser sig til repræsentationer af objektet i *samme* tegnsystem. I de fleste situationer – ganske særlig i den lidt videregående matematik – er det derimod nødvendigt at betjene sig af repræsentationer i forskellige tegnsystemer. Kun i ganske få tilfælde er sådanne 'skift' automatiserbare – man kan fx tænke på, hvad et

computeralgebrasystem kan præstere (fx plot af en funktionsforskrift, men ikke funktionsforskrift ud fra forelagt graf). Eksperimenter viser da også, at skift af repræsentation ikke altid er lige 'let' i begge retninger. Og da tilegnelsen af objektet fordrer koordination mellem repræsentationer – herunder ubesværet at 'skifte' mellem dem – ser vi her en fundamental didaktisk problemstilling, som undervisningen må forholde sig til. Fx ved at indse, at den 'monoregistrielle' færdighed – knyttet til operationer i et bestemt tegnsystem – er nødvendig, men ikke tilstrækkelig.

Netop behovet for at *forstå* kompleksiteten og karakteren af de kognitive krav, som matematiklæring stiller, er en hoveddrivkraft i Duvals omfattende forfatterskab. Man vil i det lede forgæves efter metodiske 'genveje'. Der er da også god grund til skepsis overfor lette 'løsninger' af vanskelige problemkomplekser, hvad enten de drejer sig om at reformere indhold, perspektiv eller undervisningsformer. Sådanne reformer kan være påkrævede af praktiske grunde og kan endda være succesfulde i konkrete situationer og efter konkrete kriterier. Men den matematikdidaktiske *grundforskning* drejer sig om de problemer, der både er *specifikke* og *uomgængelige* for matematikundervisningen. For matematikdidaktikeren er disse ofte mere interessante end problemer, der drejer sig om undervisning i almindelighed, eller som kan fjernes med snuptag af de nævnte typer.

Duval besøgte Danmark i perioden 30/10-12/11. Program for besøget (offentlige foredrag mv.) findes på: dpu.dk/~cawi/duval.html.

(Illustration til ovst. artikel:)



Raymond Duval

Baggrund

ved Tage Bai Andersen

Pædagogikumsordningen brudt sammen?

Efter en kaotisk sommer er tallene for sidefagssupplering offentliggjort. Der er tilmeldt 5 studerende, der skal supplere deres sidefag i matematik gennem hele det næste år. Der er tilsyneladende ikke udsigt til afhjælpning af lærermangelen i matematik i gymnasiet via sidefag i matematik.

Finanslovsforslaget

Finanslovsforslaget fra slutningen af august ledsages af en række hensigtserklæringer:

Mia.kr.	2003	2004	2005	2006
I alt	0,4	0,8	1,3	1,7
Mio.kr.	2003	2004	2005	I alt
FL02	9.000	8.400	7.500	
UMTS	138	473	593	1.204
Reserve	250	500	1.270	2.020
FFL03	9.400	9.400	9.400	

Sanders plan var hemmelig

Helge Sanders plan for styring af universiteterne var delvis hemmelig indtil den blev offentliggjort af universitetslærernes blad Forskerforum på hjemmesiden www.forskeren.dk. Planen varsledes i finanslovsforslaget, men store dele var i forvejen sivet til pressen. Den forhandles i efteråret blandt Christiansborgpolitikere.

Planen indledes med en præcisering af universiteternes opgaveportefølje:

'Universiteterne har til opgave at bedrive forskning og udbyde forskningsbaseret uddannelse på højeste internationale niveau og på den baggrund tilføre samfundet forskningsresultater og viden med innovation, vækst og velstand til følge. Den nye komponent er således: Vidensudveksling og videns- og teknologioverførsel til det omgivende samfund, herunder erhvervslivet, som en væsentlig opgave for universiteterne.'

Det ventede udspil om ledelse har følgende komponenter: Universitetets øverste organ foreslås at være en bestyrelse med eksternt flertal. De eksterne medlemmer udpeges af et repræsentantskab, medens de interne vælges af 'stænderne'. Bestyrelsen ansætter rektor, der skal være en anerkendt forsker. Dekan ansættes af rektor. Institutledere ansættes af dekan (eller rektor). På de enkelte institutter udpeges en eller flere forskningsledere.

Der oprettes uddannelsesudvalg på institutniveau, på fakultetsniveau og - som noget nyt - på landsplan.