

Matilde 13 foreligger ikke som samlet PDF-fil. Dette dokument er en samling af de HTML-, Word- og PDF-filer der var at finde i Matilde arkivet vedr. Matilde 13.

MATH-AU
2015-11-18

Matematikens Filosofi

Af: Stig Andur Pedersen, Roskilde Universitetscenter, Email: sap@wiggum.ruc.dk

Matematikken har altid givet anledning til filosofiske overvejelser. Det skyldes naturligvis den særlige karakter, den matematiske erkendelse har. På den ene side synes matematiske sætninger at være uomtvisteligt sande. At forholdet mellem omkredsen og diameteren i en sædvanlig euklidisk cirkel er en universel konstant, som vi kan beregne med vilkårlig nøjagtighed, er en ubetvivlelig kendsgerning, som vi har kendt siden antikken. Ingen kan betvivle det. Vi er endda i stand til at bevise det uden at foretage empiriske observationer. På den anden side, synes matematikken også at give os egentlig information om den verden, som omgiver os. Geometrien, statistikken, talteorien, topologien, den komplekse analyse, og alle de andre matematiske discipliner producerer viden, som er med til at udbygge vor forståelse af verdenen, og som spiller en afgørende rolle for praktisk teknisk udvikling. De store tals lov er ikke kun en ideal matematisk kendsgerning, men giver os uvurderlig information om, hvordan man f.eks. kan opnå præcisionsmålinger.

Denne kendsgerning, at matematisk erkendelse tilsyneladende er uomtvisteligt gyldig uafhængig af vore empiriske erfaringer, hvorimod fysisk, biologisk og anden empirisk erkendelse kun synes at være tilnærmelsesvis gyldig og afhængig af vore empiriske erfaringer, var forstået af Platon allerede i oldtiden og dannede grundlaget for hans filosofi. Ifølge Platon er den empiriske verden flygtig, forgængelig og i en vis udstrækning uvirkelig, hvorimod verdenen bestående af de ideale matematiske ideer er den egentlige uforanderlige virkelighed. Det er tal og figurer, der giver verdenen form, som Platon skriver i sin dialog om verdenens skabelse: ”Men da Gud skulle til at indrette verden, begyndte han med ved hjælp af figurer og tal at give en tydelig skikkelse til ild og vand og jord og luft ...”^[1]. Verden kan derfor ikke blot beskrives matematisk, den er dybest set matematik, og det er igennem matematikken, vi når frem til sikker viden.

Platons filosofi er naturligvis ikke tilfredsstillende for en moderne matematikere. Men den rammer dog noget væsentligt ved matematikken. Det kan godt være, at vi har fundet på geometrierne og talsystemerne, men det ændrer ikke ved, at vi har objektiv sikker viden om disse systemer. Om vi vil det eller ej, er π en vigtig geometrisk konstant og et transcendent reelt tal. For mange matematikere er π lige så virkelig som bordet foran mig. Matematikere har en tendens til at være platonikere, så længe de ikke aftvinges en nærmere begrundelse: ”The Realist [i.e., Platonist] position is probably the one which most mathematicians would prefer to take. It is not until he becomes aware of some of the difficulties in set theory that he would even begin to question it.”^[2]. Den typiske matematiker ”is both a Platonist and a formalist – a secret Platonist with a formalist mask that he puts on when the occasion calls for it”^[3].

Formalismen bestemmes af forfatterne til *The Mathematical Experience*^[4] som det synspunkt, at der ikke findes matematiske objekter. Matematik består udelukkende af aksiomer, definitioner og teoremer, og i det helt ekstreme tilfælde bliver matematik betragtet som blot manipulation af symboler efter simple regler. Denne opfattelse af matematikken er naturligvis lige så uholdbar som platonismen. Det nylige bevis for Fermats hypotese er ikke kun symbolmanipulation, men resultatet af en århundredelang udvikling, hvor nye begreber, objekter, teorier og ideer er blevet indført og har ført til resultater af stor betydning for andre områder en simpel talteori. Eugene P. Wigner giver en klar kritik af formalismen igennem følgende udsagn: ”...the mathematician could formulate only a handful of interesting theorems without defining concepts beyond those contained in the axioms and that the concepts outside those contained in the axioms are defined

with a view of permitting ingenious logical operations which appeal to our aesthetic sense both as operations and also in their results of great generality and simplicity”[\[5\]](#). I mange tilfælde har aksiomer også været brugt i lang tid i matematiske beviser uden at have været erkendt. Tænk f.eks. på Paschs aksiom eller udvalgsaksiomet.

Der findes andre filosofiske synspunkter, som matematikere kan og har indtaget i tidens løb, f.eks. logisistiske og konstruktivistiske. De er imidlertid alle abstraktioner, som ikke giver et fyldestgørende billede af matematikken. Deres berettigelse er først og fremmest, at de ofte har været med til at præcisere og belyse vigtige grundlagsspørgsmål, f.eks. spørgsmålet om naturen af matematiske objekter, betydningen af matematiske beviser, karakteren af konstruktive eller finistiske metoder.

I sit indlæg *Matematikkens ontologi belyst ved en historisk case* antyder Jessica Carter en realistisk opfattelse af matematiske objekter, der er betydelig mere acceptabel end den rene platonisme. Hun diskuterer udviklingen af K-teori og viser, hvordan K-grupper indføres som nye objekter som led i at løse bestemte matematiske problemer. I forlængelse af Wigner kan man sige, at ikke kun indføres der nye begreber, men der dannes nye objekter med det formål at opnå elegante svar på matematiske spørgsmål. Disse nye objekter er konstrueret ud fra tidligere indførte objekter (varieteter, knipper, osv.). De eksisterede altså ikke som evige platoniske former, men blev introduceret af os på samme måde, som vi bygger nye huse og broer. Når de først er indført, har de naturligvis objektiv eksistens. Hvordan dette nærmere skal forstås, kan vi ikke diskutere her. Men tanken om, at en vigtig del af det matematiske arbejde og af matematisk kreativitet består i at introducere nye objekter, er på elegant vis beskrevet af David Hilbert. Han taler om *de ideale elementers metode*[\[6\]](#).

Hilbert understreger, at der ikke er særlige problemer forbundet med simple matematiske objekter som de naturlige tal og simple geometriske figurer. Problemerne kommer først for alvor frem, når man introducerer ideale konstruktioner som uendeligt fjerne punkter, imaginære tal og især transfinite objekter. Hilbert kalder disse størrelser ideale elementer. De indføres for at opnå elegante matematiske teorier, men de lader sig ikke uden videre begrunde, hvilket mængdelærens paradokser vidner om. Som Klaus Frovin Jørgensen og Ulrich Kohlenbach skriver i deres bidrag *Konstruktive aspekter af matematikken* og *Applied Foundations: Proof Mining in Mathematics*, udviklede Hilbert sin bevisteori med det mål for øje at begrunde de ideale elementers metode, en metode som var en uvurderlig vigtig del af matematisk kreativitet. Hilberts program kunne ikke gennemføres, men i en ændret form udgør det fortsat et af de vigtigste moderne bidrag til den matematiske grundlagsdiskussion. Forskellige former for partielle udgaver af Hilberts program udgør i dag betydningsfulde forskningsprogrammer, som har stor betydning for matematikkens filosofi, og som også i sig selv fører til nye matematiske resultater. Klaus Frovin Jørgensen viser således, hvordan moderne bevisteori fører til en nuanceret forståelse af forholdet mellem forskellige former for konstruktiv matematik og klassisk matematik. Ulrich Kohlenbach har i sit proof mining program vist, hvordan bevisteoretiske metoder fører til dybtgående nye resultater i moderne analyse.

De ideale elementers metode, som beskrevet af Hilberts i begyndelsen af det 20. århundrede, er således i dag fortsat en interessant beskrivelse af matematisk kreativitet. Hilberts bevisteoretiske program kunne ikke gennemføres. Det er derfor ikke muligt at give de ideale elementers metode en sikker erkendelsesteoretisk begrundelse. Filosofisk set er matematikken derfor ikke en apodiktisk sikker videnskab. Dens grundlag må gentænkes og reformuleres igen og igen i takt med matematikkens udvikling. Men som det antydes af Jessica Carter, er vi i dag i stand til at give en bedre analyse af de matematiske objekters natur end Platon kunne, og videreudviklingen af

bevisteorien har ikke kun ført til en dybere forståelse af forholdet mellem konstruktiv og klassisk matematik, men også til egentlige nye matematiske metoder og resultater.

Et yderligere interessant spørgsmål i moderne matematikfilosofi bliver berørt i Terese Nielsens bidrag *Bevisbegrebet under forandring?*. Det drejer sig om, hvilken betydning det matematiske bevis har. Siden Kurt Gödels banebrydende resultater har det været klart, at beviser inden for givne aksiomatiske rammer ikke kan føre til et sikkert grundlag for matematikken. Logisk tvingende beviser er fortsat matematikkens kendemærke, men de er ikke i sig selv en garanti for matematikkens sikkerhed, og der er i de seneste år fremkommet flere interessante analyser og iagttagelser, som viser både at beviser spiller en bredere erkendelsesteoretisk rolle, og at karakteren af beviser også er noget, der udvikler sig. Især gav Arthur Jaffe og Frank Quinns artikel *Theoretical Mathematics* fra 1993 anledning til mange interessante diskussioner af det matematiske bevis' natur.

I sit svar på Jaffe og Quinns artikel understreger William P. Thurston, at det er nødvendigt for matematikere "to put far greater effort into communicating mathematical *ideas*". Det er ikke nok kun at kommunikere definitioner, sætninger og beviser, men også forskellige måder at tænke på. De uformelle beviser er et vigtigt redskab til dette: "... we should recognize that the humanly understandable and humanly checkable proofs that we actually do are what is most important to us, and that they are quite different from formal proofs". I denne forstand bliver beviser ikke kun et formelt check på, om en given matematisk sætning er sand eller ej. De er snarere midler til at opnå erkendelse og forståelse af matematiske fænomener. Der findes efterhånden mange nye analyser af naturen af matematiske beviser og argumenter, som er med til at sætte den matematiske grundlagsdiskussion ind i et større erkendelsesteoretisk perspektiv.

I første halvdel af det 20. århundrede var matematikkens filosofi i det væsentlige relateret til de klassiske grundlagsskoler (logicisme, formalisme og intuitionisme). Men som det fremgår af de forskellige bidrag i dette nummer af Matilde, har matematikkens filosofi udviklet sig til en vifte af aktiviteter, der spænder fra tekniske logiske arbejder til generelle studier af matematiske objekters natur, udvikling af matematisk viden, betydningen af matematiske beviser og meget mere. Det er naturligvis vigtigt for moderne matematikfilosofi, at arbejdet sker i samarbejde mellem matematikere, matematikhistorikere, logikere og filosoffer. Samarbejde mellem disse grupper er nødvendig, hvis vi skal nå frem til en dybere forståelse af naturen af matematisk erkendelse, en forståelse som i disse tider kan være med til at give matematikken den opmærksomhed, den rettelig fortjener.^[7]

^[1] Platon: *Timaios*, 52C.

^[2] P.J. Cohen, citeret fra Philip J. Davis and Reuben Hersh: *The Mathematical Experience*, The Harvester Press, 1982, p. 321.

^[3] *The Mathematical Experience*, p. 322.

^[4] *The Mathematical Experience*, p. 319

^[5] Eugene P. Wigner: The Unseasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences, fra Eugene P. Wigner: *Symmetries and Reflections*, Indiana Univ. Press, 1967, p. 224-5.

^[6] Hilbert diskuterer de ideale elementers metode i artiklen *Über das Unendliche*, *Mathematische Annalen*, 95, 1925, 161-190 og i forelæsningerne *Natur und mathematisches Erkennen*. Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen, herausgegeben von David E. Rowe, Birkhäuser

Verlag 1992.

[7] *Dansk Netværk for Matematikkens Historie og Filosofi*, <http://www.mathnet.ruc.dk/>, arrangerer møder, konferencer og andre aktiviteter vedrørende matematikkens filosofi, som henvender sig både til matematikere og filosoffer.

Matematikens ontologi belyst ved en historisk case

Af: PhD studerende Jessica Carter, IMADA, Syddansk Universitet, Odense,
Email: jessica@imada.sdu.dk

Spørgsmålet om matematikkens ontologi er spørgsmålet om hvorvidt de matematiske objekter eksisterer eller ej, d.v.s., om de er skabt eller opdaget. I min Ph.D afhandling prøver jeg på at besvare dette spørgsmål, dels ved at studere den filosofiske debat om matematikkens ontologi og dels ved at lave en historisk case indenfor den moderne matematik.

Blandt filosoffer er der en livlig debat angående spørgsmålet om eksistensen af matematiske objekter. Der er både realister, som mener at matematikkens objekter eksisterer uafhængigt af mennesker og anti-realister, som mener at matematikkens objekter ikke eksisterer.

Blandt realister kan jeg nævne P. Maddy (i 1990) og J. Katz. Af forskellige grunde vælger Maddy at koncentrere sig om mængdeteori. I sin bog 'Realism in Mathematics' fra 1990 beskriver hun en position som hun benævner Mængdeteoretisk Realisme. Ifølge Maddy eksisterer (små) mængder som fysiske objekter og derfor kan vi få viden om dem på samme måde som vi får viden om de almindelige fysiske objekter, nemlig via sanse-erfaring. Modsat Maddy, mener J. Katz (Katz, 1998) at de matematiske objekter eksisterer som abstrakte objekter, d.v.s., ikke i tid eller rum, og som sådanne eksisterer de nødvendigt. Ifølge Katz opnår vi derfor viden om de matematiske objekter udelukkende ved brug af vores fornuft og ikke ved hjælp af vores sanser. Det største problem med Maddys position er at hun ikke gør rede for hvordan vi opnår viden om de abstrakte matematiske objekter som matematikerne arbejder med, og Katz har problemer med at forklare hvor forudsætningerne i matematikken stammer fra, når han udelukker at vi kan benytte os af sanseerfaring når vi opnår viden om matematikken. Derfor vil jeg her antyde, at en løsning måske kan findes i en kombination af disse muligheder, dvs. at kilden til matematiske objekter er både erfaring og fornuft.

Jeg mener at en filosofi om matematikken skal stemme overens med praksis indenfor matematik. Jeg har derfor udtaget en del af den moderne matematik, nemlig K-teori, for at studere hvorfor og hvordan nye objekter introduceres i matematikken. K-teori blev først udviklet som en teori indenfor topologi af sir Michael Atiyah (i samarbejde med F. Hirzebruch) i slutningen af 1950'erne. Atiyah var inspireret af Alexander Grothendieck, som definerede den første K-gruppe i forbindelse med en generalisering af Riemann-Roch sætningen. Som navnet antyder går denne sætning tilbage til Riemann, som efter at have defineret begrebet Riemann-flader i 1850'erne stillede spørgsmålet om eksistens af meromorfe (komplekse) funktioner på sådanne flader. Riemanns bidrag til Riemann-Roch sætningen var at fastslå eksistensen af sådanne funktioner under bestemte betingelser, mens hans elev G. Roch i 1865 kunne bestemme dimensionen af vektorrummet af sådanne funktioner på en given Riemann-flade. Da en Riemann-flade er en kompleks en-dimensionel flade, stillede matematikere derefter spørgsmålet om det var muligt at generalisere Riemann-Roch sætningen til n -dimensionale flader. Dette lykkedes ikke før i 1956, hvor F. Hirzebruch publicerede sin version af sætningen i bogen 'Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie'. Beviset for denne generalisering krævede at der introduceredes mange nye objekter, f.eks. knipper, som blev defineret af J. Leray i 1946.

Grothendiecks version af Riemann-Roch sætningen er en generalisering af Hirzebruchs version (se Borel og Serre, 1958). Hirzebruchs version er formuleret indenfor topologi, og udtrykker Euler-Poincaré karakteristikken:

$$\chi(V, W) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(V, W)$$

som et polynomium i Chern-klasserne for V og W . Her er V en algebraisk mangfoldighed og W et

komplekst analytisk vektorbundt over V , og $H^i(V, W)$ er cohomologi-grupper med koefficienter i et knippe.

Nogle af de forhold der inspirerede Grothendiecks generalisering var:

- Grothendieck brugte algebraiske metoder, d.v.s. objekter er defineret over et vilkårligt legeme, hvor Hirzebruch brugte analytiske metoder.
- Grothendieck ville gerne bruge de kategori-teori begreber der dukkede op i 1940-1950'erne.
- Han var inspireret af og del af, den franske gruppe af matematikere, der arbejdede under pseudonymet Bourbaki.

Da Grothendieck arbejder indenfor algebraisk geometri, består hans objekter af algebraiske varieteter og over disse er der defineret knipper.

P.g.a. inspirationen fra kategori-teori er Grothendiecks udgangspunkt at betragte den situation hvor der er defineret en (proper) afbildning mellem to algebraiske varieteter,

$f: X \rightarrow Y$ og hvor der er defineret et (koherent) knippe, $\mathcal{F}$, over X .

For at formulere sætningen, skal Grothendieck definere en afbildning $f_!$, som givet et knippe over X producerer et knippe over Y . Udtrykket for denne afbildning skal kunne reduceres til Euler-Poincaré karakteristikken i Hirzebruchs version og afbildningen skal være en homomorfi.

Når Y reduceres til et punkt vil de så kaldte højere direkte billeder af $\mathcal{F}$ under f reduceres til cohomologi-grupperne i Hirzebruchs formel. Problemet er bare at kunne udtrykke den alternerende sum af disse. For at gøre dette muligt, samt at sikre at funktionen er en homomorfi definerer Grothendieck K -gruppen $K(X)$:

$$K(X) = \frac{E(X)}{Q(X)}$$

hvor $E(X)$ er den frie abelske gruppe genereret af koherente knipper over X , og $Q(X)$ er undergruppen genereret af elementer på formen $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$, når

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

er en kort eksakt følge af koherente knipper defineret over X .

Endeligt defineres afbildningen $f_!$ fra $K(X)$ til $K(Y)$, hvor et knippe, $\mathcal{F}$, over X sendes over i den alternerende sum af de højere direkte billeder,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i R^i f_* (\mathcal{F})$$

så den får de ønskede egenskaber. (Grothendiecks version af Riemann-Roch sætningen er publiceret i (Borel og Serre, 1958) .)

En konklusion, som jeg drager ud fra dette case studium, er at introduktionen af K -gruppen bliver nødvendig for at løse det problem som Grothendieck har formuleret på baggrund af den matematiske praksis. Man kan sige at K -gruppens eksistens er berettiget fordi den er konstrueret ud fra allerede eksisterende objekter og fordi den er nødvendig i formuleringen af Grothendiecks Riemann-Roch sætning.

Det ser således ud til at de matematiske objekter "vokser" ud af den matematiske praksis: matematikere formulerer problemer og for at kunne løse dem bliver de nødt til at introducere nye objekter. For at kunne svare på det oprindelige spørgsmål om hvorvidt de matematiske objekter opdaget eller skabes, kan man så spørge hvor de matematiske problemer kommer fra. Casen

viser at Grothendieck formulerer sin generalisering på baggrund af udvikling indenfor matematikken, d.v.s. at problemet i dette tilfælde kommer af indre matematiske forhold. I andre tilfælde inspireres matematiske problemer af f.eks. spørgsmål indenfor naturvidenskaben, d.v.s. på baggrund af ydre forhold. Det vil altså sige, at betragter man den matematiske praksis, ser det ud til at det er matematikerne der introducerer matematikkens objekter, og svaret på mit spørgsmål er at de er skabte. Objekterne introduceres ikke vilkårligt, men har deres oprindelse både fra vores omgivelser og fra indre-matematiske forhold.

Referencer:

Borel, A. og Serre J.-P. 1958, Le Théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France 86, 97-136.

Hirzebruch, F. 1956, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin: Springer.

Katz, J. 1998, Realistic Rationalism, MIT Press.

Maddy, P. 1990, Realism in Mathematics, Oxford: Oxford University Press.

Applied Foundations: Proof Mining in Mathematics

Ulrich Kohlenbach

BRICS*

Department of Computer Science

University of Aarhus

Ny Munkegade

DK-8000 Aarhus C, Denmark

A central theme in the foundations of mathematics, dating back to D. Hilbert, can be paraphrased by the following question

‘How is it that abstract methods (‘ideal elements’) can be used to prove ‘real’ statements e.g. about the natural numbers and is this use necessary in principle?’

Hilbert’s aim was to show that the use of such ideal elements can be shown to be consistent by finitistic means (‘Hilbert’s program’). Hilbert’s program turned out to be impossible in the original form by the seminal results of K. Gödel. However, more recent developments show it can be carried out in a partial form in that one can design formal systems $\mathcal{A}$ which are sufficient to formalize substantial parts of mathematics and yet can be reduced proof-theoretically to primitive recursive arithmetic **PRA**, a formal system usually associated with ‘finitism’. These systems

are based on the so-called binary König’s lemma WKL which – in analytic terms – is just the amount of ineffective set theory needed to prove e.g. the Heine-Borel compactness of the unit interval $[0, 1]$ which fails to hold in computable analysis (see [22] for a treatment of mathematics based on WKL).

Much larger parts of mathematics can be carried out in systems $\mathcal{A}^*$ which are not quite reducible to **PRA** but to first-order Peano arithmetic **PA**. These systems are based on so-called arithmetical comprehension which is just the amount of ineffective set theory needed to prove the sequential compactness of $[0, 1]$ which is ineffective in an even stronger sense than WKL ([22],[6]).

Moreover, one can construct effective transformations of proofs in the systems mentioned into proofs in **PRA** respectively **PA** which preserve certain classes of formulas. Such results suggest to shift emphasis from purely foundational issues to mathematical applications.

*Basic Research in Computer Science, funded by the Danish National Research Foundation.

Already in the 50's G. Kreisel had asked 'What more do we know if we have proved a theorem by restricted means than if we merely know that it is true?'

Kreisel proposed to apply proof theoretic techniques – originally developed for foundational purposes – to concrete proofs in mathematics which mathematicians could not 'unwind' themselves (see e.g. [20]).

Although Kreisel's idea of **unwinding proofs** has been applied e.g. to number theory ([19]), combinatorics ([1]) and algebra ([5]), the area of analysis (and in particular numerical functional analysis) is of particular interest. Here ineffectivity is due not only to the use of non-constructive logical reasoning but at the core of many principles (like compactness arguments) which are used to ensure convergence and which provably rely on the existence of non-computable reals. In mathematical terms this non-computability often is an obstacle to obtain a quantitative stability analysis and rates of convergence.

In recent years the author developed specially designed proof theoretic transformations to unwind proofs in analysis in a systematic way using – among other things – embeddings into systems based on semi-intuitionistic logic and so-called functional interpretations which translate proofs into terms built up out of functionals of finite types ([12],[13]). We call this approach **proof mining** (in analogy to the important area of 'data mining' in computer science). The goal of 'proof mining' is to transform *prima facie* ineffective proofs into new ones from which certain computational information can be read off which was

not visible beforehand. The resulting proof can again be formulated in ordinary mathematical terms without reference to the techniques instrumental in finding it. This new proof, typically, will not and need not be constructive. In fact, only small parts of a given proof usually need to be considered at all. General logical theorems allow one to narrow down those parts which are critical for the computational information in question and provide an extraction algorithm. At the same time these logical theorems single out whole classes of lemmas which simply can be taken as axioms in the process of proof mining.

In applications to concrete proofs, the extraction procedure will not follow step by step the general algorithm provided by these meta-theorems, but will use all kinds of mathematical optimizations possible in the situation at hand. Nevertheless, key steps in the analysis will typically correspond to transformations suggested by the logical method used.

We have carried out some case studies of proof mining which yielded not only new quantitative but even new qualitative results in approximation theory and fixed point theory.

These qualitative results are concerned with the independence of certain quantities such as rates of convergence from various parameters of the problem at hand. For instance in the area of metric fixed point theory, complicated functional theoretic embedding techniques have been used for some 20 years to establish certain (partial) uniformity results (see e.g. [8],[7],[10]) on the asymptotic regularity of nonexpansive mappings (see e.g. [9],[2]).

The logical approach not only avoids these techniques but gives qualitatively stronger forms of uniformity ([14],[15]) and easily extends (see recent joint work with Laurențiu Leuştean [17]) to more general settings (directionally nonexpansive mappings in hyperbolic spaces) for which only rather limited results were known before ([10]).

In approximation theory proof mining resulted in quantitative bounds on strong unicity in Chebycheff approximation ([11]) as well as recently (joint work with Paulo Oliva) in L_1 -approximation. In the latter case, the first explicit and effective (in all parameters) rate of strong unicity for best L_1 -approximations of $f \in C[0, 1]$ by polynomials of degree $\leq n$ was obtained ([16]) improving previously known ineffective results ([3],[18]). Using this result Oliva obtained the first complexity upper bound for the sequence of best L_1 -approximations by polynomials ([21]).

We hope that these applications will convince the reader of the potential relevance of this project of ‘applied foundations’.

References

- [1] Bellin, G., Ramsey interpreted: a parametric version of Ramsey’s theorem. In: Logic and computation (Pittsburgh, PA, 1987), pp. 17-37, Contemp. Math., 106, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1990).
- [2] Borwein, J., Reich, S., Shafrir, I., Krasnoselski-Mann iterations in normed spaces. Canad. Math. Bull. **35**, pp. 21-28 (1992).
- [3] Björnestrål, B.O., Continuity of the metric projection operator I-III. The preprint series of Department of Mathematics. Royal Institute of Technology. Stockholm, TRITA-MAT **17** (1974), **20** (1974), **12** (1975).
- [4] Cheney, E.W., Approximation Theory. AMS Chelsea Publishing, x+259 pp., 1966.
- [5] Delzell, C., Kreisel’s unwinding of Artin’s proof-Part I. In: Odifreddi, P., Kreiseliana, 113-246, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.
- [6] Feferman, S., In the Light of Logic. Oxford University Press, 340 pp. (1998).
- [7] Goebel, K., Kirk, W.A., Iteration processes for nonexpansive mappings. In: Singh, S.P., Thomeier, S., Watson, B., eds., Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis. Contemporary Mathematics **21**, AMS, pp. 115-123 (1983).
- [8] Edelstein, M., O’Brien, R.C., Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations. J. London Math. Soc. **17**, pp. 547-554 (1978).
- [9] Ishikawa, S., Fixed points and iterations of a nonexpansive mapping in a Banach space. Proc. Amer. Math. Soc. **59**, pp. 65-71 (1976).
- [10] Kirk, W.A., Nonexpansive mappings and asymptotic regularity. Nonlinear Anal. **40**, Ser. A: Theory Methods, pp. 323-332 (2001).
- [11] Kohlenbach, U., New effective moduli of uniqueness and uniform a-priori estimates for constants of strong unicity by logical

- analysis of known proofs in best approximation theory. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* **14**, pp. 581–606 (1993).
- [12] Kohlenbach, U., Analysing proofs in analysis. In: W. Hodges, M. Hyland, C. Steinhorn, J. Truss, editors, *Logic: from Foundations to Applications. European Logic Colloquium* (Keele, 1993), pp. 225–260, Oxford University Press (1996).
 - [13] Kohlenbach, U., Arithmetizing proofs in analysis. In: Larrazabal, J.M., Lascar, D., Mints, G. (eds.), *Logic Colloquium '96*, Springer Lecture Notes in Logic **12**, pp. 115–158 (1998)
 - [14] Kohlenbach, U., A quantitative version of a theorem due to Borwein-Reich-Shafrir. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* **22**, pp. 641–656 (2001).
 - [15] Kohlenbach, U., Uniform asymptotic regularity for Mann iterates. Preprint 17pp., submitted (2002).
 - [16] Kohlenbach, U., Oliva, P., Proof mining in L_1 -approximation. Preprint 35pp., to appear in: *Ann. Pure Applied Logic*.
 - [17] Kohlenbach, U., Leuştean, L., Mann iterates of directionally nonexpansive mappings in hyperbolic spaces. Preprint 32 pp. (2002).
 - [18] Kroó, A., On the continuity of best approximations in the space of integrable functions. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **32**, pp. 331–348 (1978).
 - [19] Luckhardt, H., Herbrand-Analysen zweier Beweise des Satzes von Roth: Polynomiale Anzahlschranken. *J. Symbolic Logic* **54**, pp. 234–263 (1989).
 - [20] Luckhardt, H., Bounds extracted by Kreisel from ineffective proofs. In: Odifreddi, P., Kreiseliana, 289–300, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.
 - [21] Oliva, P., On the computational complexity of L_1 -approximation. To appear in: *Math. Logic Quarterly*.
 - [22] Simpson, S.G., *Subsystems of Second Order Arithmetic. Perspectives in Mathematical Logic*. Springer-Verlag. xiv+445 pp. 1999.

Bevisbegrebet under forandring?

Af: Terese M. O. Nielsen, ivhtmon@ifa.au.dk

Matematikken har altid haft en særlig status som det område af menneskelig viden, der er mest stabilt og pålideligt. Et naturligt spørgsmål er derfor, hvad det er, der giver matematikken denne særlige status. Traditionel matematik-filosofi har besvaret dette ved at sige, at det skyldes matematikkens særlige genstandsområde; når matematikkens *objekter* (tal, mængder, funktioner o.s.v.) er evige, uforanderlige og uafhængige af menneskers sprog og kultur, så må matematikkens *sandheder* – som traditionelt anskues som beskrivelser af objekterne – have samme egenskaber. Tilbøjeligheden til at definere matematik ud fra dens særlige objekter skinner også igennem, hvis man slår op under ordet ”matematik” i Salmonsens konversationsleksikon:

Matematik (gr.) Den rene M.'s væsentlige Genstand er Egenskaberne ved Tallene og Formerne i Rummet samt de nøjagtige Relationer imellem dem, hvad Størrelse og Beliggenhed angaar. Den gaar ud fra visse Aksiomer og opfører paa dem en stringent logisk Lærebygning.

Salmonsens Konversationsleksikon, bind XVI, 2. udgave, København 1924.

Af forskellige grunde blev denne karakteristik af matematikken dog uhensigtsmæssig for omkring 100 år siden, hvorfor A. N. Whitehead i *Encyclopædia Britannica*s 13. udgave snarere er tilbøjelig til at karakterisere matematikken ved en særlig *metode* end ved dens særlige *objekter*:

MATHEMATICS (Gr. μαθηματική, sc. τέχνη or ἐπιστήμη; from μάθημα, “learning” or “science”), the general term for the various applications of mathematical thought, the traditional field of which is number and quantity. It has been usual to define mathematics as “the science of discrete and continuous magnitude”.

Herefter følger en kritik af denne karakteristik af matematikken ud fra dens genstandsområde, hvorefter følgende definition gives:

Definition of Mathematics. ... [O]n the assumption that “mathematics” is to denote a science well marked out by its subject matter and its methods from other topics of thought, and that at least it is to include all topics habitually assigned to it, there is ... no option but to employ “mathematics” in the general sense of the “science concerned with the logical deduction of consequences from the general premisses of all reasoning”.

A. N. Whitehead i *Encyclopædia Britannica*, bind 17, 13. udgave, London 1926.

Denne definitionsmetode har dog heller ikke den store tilslutning længere, hvorfor den nyeste version af *Encyclopædia Britannica* snarere fremhæver matematikkens oprindelse, dens *historie*, end dens objekter eller metode, når man søger efter en karakteristik af feltet:

mathematics,

the science of structure, order, and relation that has evolved from elemental practices of counting, measuring, and describing the shapes of objects. It deals with logical reasoning and quantitative calculation, and its development has involved an increasing degree of idealization and abstraction of its subject matter.

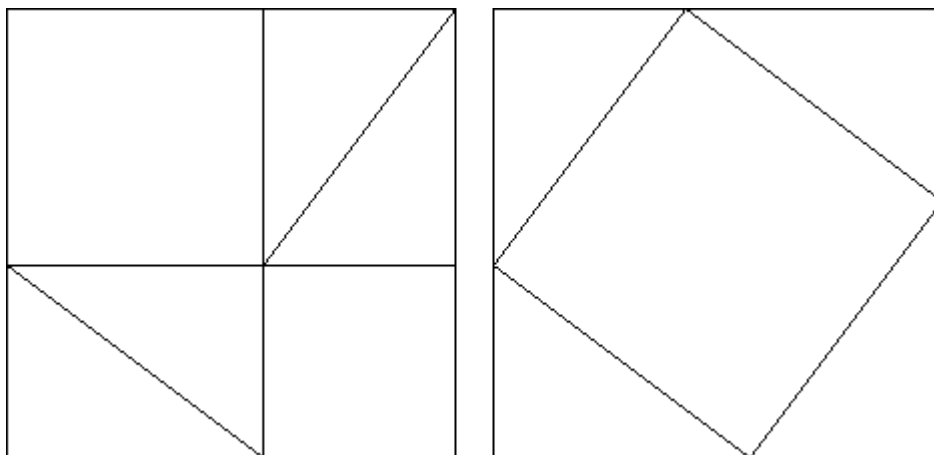
...

All mathematical systems (for example, Euclidean geometry) are combinations of sets of axioms and theorems that can be logically deduced from the axioms.

Encyclopedia Britannica på nettet

<http://www.ec.co.uk:180/>

Men selv om de forskellige opslagsværker således lægger vægten vidt forskelligt, når de skal give en karakteristik af matematik – nemlig ved at fremhæve matematikkens objekter, metode eller historie som det træk, der giver matematikken dens særlige karakter – nævner alle tre dog *beviset*, i form af logisk udledning fra aksiomer, som et særligt karakteristikum. Så ud fra disse tre opslagsværker lader det til, at et acceptabelt svar på spørgsmålet ”Hvad er (god) matematik?” – og dermed spørgsmålene ”Hvilke matematiske aktiviteter bør tildeles penge?” og ”Hvad skal vi undervise matematik-studerende i?” – mindst må indeholde følgende: udledning af sætninger fra aksiomer i overensstemmelse med logiske regler.



Begrebet om beviser som formel udledning har alvorlige problemer. Jeg vil ikke diskutere dem nøjere her, men overlade det til læseren at sammenholde det med nedenstående figur:

Kernen i det aksiomatisk-deduktive bevisbegrebs problemer er ifølge min vurdering, at det ser et bevis som en *sandhedsgaranti*. Formålet med et bevis er, at det skal være hævet over enhver tvivl, at den tilhørende sætning er sand og aldrig vil kunne betvivles. Beviser overfører aksiomers status på sætninger. Dette bevisbegreb været dominerende siden Euklid (eller før) og bliver sågar betragtet som konstituerende for matematik – matematik uden euklidiske beviser er simpelthen ikke matematik, i hvert fald ifølge opslagsværkernes karakteristik af, hvordan termen ”matematik” anvendes. Men det er ikke det eneste mulige bevisbegreb. Når *Scientific American* har kunnet bringe en artikel med overskriften ”The Death of Proof” (Horgan [1993]) skyldes det i høj grad, at begrebet om beviser som sandhedsgarantier har problemer. Men det betyder kun, at bevisbegrebet *som sådan* har problemer, hvis det er den eneste form for bevis, man kan tænke sig.

I løbet af de seneste 10 år er der så småt kommet tegn på, at bevisbegrebet er under forandring. F.eks. fremstiller Jaffe og Quinn i deres ”*Theoretical Mathematics*” [1994] (nogle) beviser som

analoge til *eksperimenter* i fysik, mens Thurston [1993] og Rav [1999] lægger vægt på beviser som *midler til erkendelse* eller som *forklaringer* af den tilhørende sætning. Endelig kan man også nævne de lidt ældre alternative bevisbegreber som f.eks. Brouwers ide om beviser som *konstruktioner* (jf. van Dalen [1998]) eller Lakatos' opfattelse af beviser som *diskussionsoplæg* (jf. Lakatos [1976]).

Eksistensen af alle disse forskellige bevisbegreber rejser en række spørgsmål, både af praktisk, historisk og filosofisk karakter.

De praktiske spørgsmål melder sig, når det skal vurderes, om et givet bevis vitterligt *er* et bevis, og om det er et *godt* bevis. Det har selvfølgelig betydning for optagelse af artikler i tidsskrifter og dermed både for ansættelsessager og bevillings-ansøgninger. Derudover har bevisbegrebet didaktiske konsekvenser, idet det spiller ind på valg af undervisningspensum og –metode.

De historiske spørgsmål drejer sig om at belyse, hvilke bevisbegreber der har været fremherskende i givne perioder og grupper, hvilke faktorer der har kunnet tænkes at påvirke forandringer, og hvordan disse har fundet sted.

De filosofiske spørgsmål drejer sig om bevisbegrebet som sådan. Hvilke bevisbegreber kan man tænke sig, og er de gensidigt udelukkende? Er det muligt at udpege et privilegeret bevisbegreb som det, der er bedst i overensstemmelse med faktisk matematisk praksis? Vil det, at man lægger vægt på beviser som f.eks. erkendemidler betyde, at man må give afkald på *sikkerheden* af matematikkens sætninger, og dermed på matematikkens særlige status?

Det er bemærkelsesværdigt, at mens det sidstnævnte spørgsmål allerede er blevet taget op i matematikerkredse, som diskussionen efterfølgende Horgan [1993] og Jaffe og Quinn [1993] delvist illustrerer, så afventer det stadig behandling blandt matematik-filosoffer – med nogle få sider i Brown [1999] som eneste undtagelse. Dette er en oplagt mangel, som der forhåbentlig bliver rådet bod på snarest.

Litteratur

BROWN, JAMES ROBERT [1999]: *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*. London and New York: Routledge.

VAN DALEN, DIRK [1998]: 'From a Brouwerian Point of View'. *Philosophia Mathematica* (3), **6**, 209-226.

HORGAN, JOHN [1993]: 'The Death of Proof'. *Scientific American*, **269** No. 10 (October), 74-82.

JAFFE, ARTHUR & FRANK QUINN [1993]: "'Theoretical Mathematics': Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics'. *The Bulletin of the American Mathematical Society* 29, 1-13.

LAKATOS, IMRE [1976]: *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

RAV, YEHUDA [1999]: 'Why Do We Prove Theorems?'. *Philosophia Mathematica* **7**, 5-41.

THURSTON, WILLIAM P. [1994]: 'On Proof and Progress in Mathematics'. *The Bulletin of the American Mathematical Society* **30**, 161-177.

Om forfatteren

Terese M. O. Nielsen er Ph. D. studerende i matematikkens filosofi ved Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet og forventes at afslutte sit projekt om *Gödels argumenter for platonisme og vidensbegrebet* omkring årsskiftet.

Konstruktive aspekter af matematikken

*Af: PhD-stipendiat Klaus Frovin Jørgensen, Afdeling for Filosofi og Videnskabsteori
Roskilde Universitet, Email: frovin@ruc.dk*

Mod slutningen af 1880'erne beviste David Hilbert det for tiden vigtigste uløste problem inden for invariantteori. Hilberts resultat er siden blevet kendt under *Hilberts Basis Sætning*: Hvis k er et legeme, så er ethvert ideal i polynomiumsringen $k[X_1, \dots, X_n]$ endeligt frembragt. Problemet havde været åbent i længere tid, men Paul Gordan – den på det tidspunkt førende inden for området – havde løst problemet for et specialtilfælde og havde formodet det korrekt i det generelle. Gordans bevis for specialtilfældet var algebraisk og kompliceret, men konstruktivt. Hilberts bevis for det generelle var kort og elegant, men ikke-konstruktivt og repræsenterede dermed en ny måde at gribe problemerne an inden for området. Det er velkendt, at Gordan var mere end kritisk overfor Hilberts bevis og udtalte, at det var teologi snarere end matematik. Sandt er det også, at Hilbert beviste, at givet et ideal er det *ikke* muligt, at en endelig basis *ikke* eksisterer, men ud fra beviset kunne ikke engang en øvre grænse for antallet af basiselementer angives. Hilbert stillede sig til en vis grad forstående overfor kritikken af det ikke-konstruktive eksistensbevis og arbejdede intenst de næste år med invariantteori, hvorved et mere generelt og abstrakt syn på problemerne kom for dagen. Senere forlod Hilbert invariantteorien til fordel for teorien om algebraiske tallegemer, hvor han også flittigt brugte den moderne matematiks generelle metoder og abstrakte definitioner.

Således var Hilbert allerede i begyndelsen af sin karriere en moderne og progressiv matematiker, som ikke veg tilbage for ikke-konstruktive eksistensbeviser. Gennem ham blev tidligere distinkte discipliner kædet sammen, og moderne matematik er uløseligt forbundet med hans navn. Megen af hans succes var baseret på abstrakte definitioner og ikke-konstruktive metoder.

Så da den nye matematiks metoder blev kritiseret af eksempelvis Gordan og senere af matematikere som L.E.J. Brouwer, E. Borel, H. Weyl, H. Lebesgue, var det ikke andet end naturligt, at det var Hilbert, som tog kritikken alvorligt og forsøgte at give et forsvar for den nye matematik. Dertil udviklede han og hans medarbejdere i Göttingen det bevisteoretiske program. Hilberts tanke med programmet var én gang for alle at fordrive de kritiske røster, der stillede sig tvivlende over for gyldigheden af den abstrakte matematik. Når det var gjort, kunne matematikerne stoppe med at bekymre sig om spørgsmål vedrørende matematikkens grundlag og fortsætte med at udvikle den nye matematik. Det centrale i Hilberts program var at give et finitistisk (dvs. strengt konstruktivt) bevis for, at de abstrakte, ideale elementer i matematikken ikke kan bevise sætninger af denne strenge konstruktivistiske karakter, som ikke i forvejen principielt kan bevises uden brug af ideale elementer. Teknisk set kunne et sådant bevis gives ved at give et finitistisk bevis for konsistensen af matematikken, hvorfor Hilbert koncentrerede sig om dette konsistensbevis.

Det er velkendt, at Hilberts program hverken kunne eller kan gennemføres. Den vigtigste grund hertil er nok Kurt Gödels to ufuldstændighedssætninger fra 1931, som hver især rammer programmet. En af konklusionerne ovenpå Gödels resultat er, at det som Hilbert udpegede som en konstruktiv kerne af matematikken ikke er meget bevendt med hensyn til konsistensbeviset. Et par år senere, i 1933, viste Gödel derimod, at konsistens af Brouwers intuitionistiske aritmetik implicerer konsistens af klassisk aritmetik, og det blev derved klart, at Hilberts forståelse af konstruktivisme var langt mere begrænset end den intuitionistiske: Hilbert kunne som nævnt ikke bevise sådanne konsistensspørgsmål finitistisk. Det følger heraf – hvilket Gödel [2] også senere

påpegede – at der findes flere forskellige lag og forståelser af konstruktivisme. Et mål med denne lille tekst er anskueliggøre og eksemplificere dette problem.

Det paradoksale ved Hilberts bevisteori er, at den netop blev udviklet til at eliminere sådanne spørgsmål vedrørende matematikkens grundlag, men at den i dag kan bruges præcis til at undersøge og påvise kompleksiteten og dybden i en forståelse af, hvilke elementer af matematikken, der er konstruktive.

Intuitionistisk logik er et bud på, hvad man kan forstå ved en konstruktiv logik. Det er centralt for den intuitionistiske filosofi, at sandhed skal være noget, som er tilgængeligt for os som mennesker. Eksempelvis giver det ikke intuitionistisk mening at hævde, at lighed som en total funktion $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \{S, F\}$ er konstruktiv. Lad 0 som et endeligt tal og 0.0000... som et uafsluttet endnu ikke bestemt tal være givet. Da f er konstruktiv, skal den i endelig tid beslutte sig for, om de to tal er lige. Hvis f siger, at de er lige, dvs. $f(0, 0.00...) = S$, så kunne det jo være, at det næste tal i følgen var 1 og omvendt, hvis $f(0, 0.00...) = F$, så kunne det jo være, at resten af følgen rent faktisk var nuller. Således er det svært at acceptere lighed på de reelle tal som konstruktiv. Bemærk, at eksemplet egentlig eksemplificerer det generelle problem/faktum, at en funktion fra et sammenhængende rum til et diskret ikke kan være kontinuert uden at være konstant, og at dette sætter fingeren på et vigtigt element vedrørende konstruktive funktioner: Hvis en funktion er beregnbar, så er den kontinuert.

Begrebet om sandhed redefineres derfor i intuitionismen, således at et matematisk udsagn er sandt, hviss det kan bevises (før eller senere). Dette giver anledning til en ny forståelse af de logiske symboler. Således er sandhedsværdien dvs. forståelsen af $A \rightarrow B$ ikke givet ud fra den klassiske sandhedstabel for $\rightarrow$ samt sandhedsværdierne for A og B . Snarere kan vi hævde $A \rightarrow B$, hvis vi for ethvert bevis af A kan producere et bevis af B . Ligeledes kan vi hævde $A \wedge B$, netop hvis har et bevis af A og et bevis af B . Med denne fortolkning af de logiske symboler kan vi gå den klassiske prædikatslogik igennem og se hvilke aksiomer, vi mener altid at kunne hævde. Eksempelvis er bevisfortolkningen af $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ selvindlysende nemlig: Givet et bevis af A og et bevis af B skal vi kunne producere et bevis af A . Præcis et aksiom falder dog ud: $A \vee \neg A$. Det er ingenlunde klart, at givet et hvilket som helst udsagn, så kan vi bevise eller modbevise det; tag eksempelvis A som ”der findes uendeligt mange tvillingepriamtal”. Men for de andre aksiomer er bevisfortolkningen sund. Således er intuitionistisk logik som klassisk logik blot uden $A \vee \neg A$. Nu er det ikke selvindlysende ud fra ovenstående uformelle overvejelser omkring meningen af de logiske symboler, at matematiske teorier baseret på intuitionistisk logik er konstruktive. Men bevisteoretiske undersøgelser baseret på eksempelvis Kleenes realiserbarheds-fortolkning [5] har i anden halvdel af sidste århundrede vist, at dette er tilfældet for mange af de mere simple teorier baseret på intuitionistisk logik. I hvert fald i den forstand at de besidder eksistensegenskaben (til ethvert bevist eksistensudsagn findes der et objekt i teorien, som vidner udsagnet) og disjunktionsegenskaben (enhver bevist disjunktion kan afgøres).

Men der er flere problemer ved at forstå intuitionistisk logik som en *global* karakterisering af konstruktiv logik. Lad os betegne Zermelo-Fraenkels mængdelære baseret på intuitionistisk logik ved IZF. Det kan vises [1], at IZF har eksistensegenskaben for tal og disjunktionsegenskaben generelt. Ikke desto mindre er IZF næppe en konstruktiv teori, da eksempelvis potensmængdeaksiomet kan benyttes ubegrænset. Dette viser, at blot fordi man benytter intuitionistisk logik, er man ikke garanteret en konstruktiv teori. Så på et overordnet plan er problemet, at intuitionistisk logik lover for meget. På et mere lokalt plan er problemet, at principper som *generelt* er ikke-konstruktive, men som lokalt set kan være fuldt konstruktive, ikke

accepteres af intuitionismen. Et par eksempler vil illustrere dette.

Antag, at $A_0(x)$ er afgørbar for alle x . Givet et sådant A_0 siger Markovs princip, at *hvis* det umuligt kan være tilfældet, at for alle x gælder $A_0(x)$ ikke, *så* eksisterer der et x , sådan at $A_0(x)$; dvs.

$$\neg\neg\exists x A_0(x) \Rightarrow \exists x A_0(x)$$

Princippet er ikke intuitionistisk gyldigt, da det ikke er åbenlyst, hvordan vi fra et bevis af præmissen finder et konkret objekt, som vidner konklusionen. I tilfældet med de naturlige tal er det dog klart: Vi prøver simpelthen tallene af et efter et – præmissen sikrer, at vi før eller siden finder et m sådan at $A(m)$. Men hvis kvantoren ikke løber over $\mathbf{N}$ men over et domæne f.eks. $\mathbf{R}$, hvor ordningen ikke er konstruktiv, så er det ikke åbenlyst, hvordan vi skal tilfredsstille konklusionen givet præmissen. Derfor er det også problematisk at antage Markovs princip som et *globalt* konstruktivt princip. Ikke desto mindre findes der mere lokale sammenhænge, hvor det konstruktivt giver god mening at acceptere Markovs princip, da det i denne konkrete sammenhæng har en konstruktiv fortolkning [3]. Således kan Markovs princip betragtes som fuldt konstruktivt over intuitionistisk aritmetik generaliseret til alle endelige typer. Dette er matematisk en interessant teori, da den sammen med Königs Lemma er kraftig nok til at formalisere vigtige dele af analysen [6], hvorved nye matematiske resultater kan bevises inden for eksempelvis approksimationsteori og fikspunktsteori såsom dem, Ulrich Kohlenbach har opnået og omtalt andetsteds i dette nummer af Matilde.

Ekstensionalitet er et andet element af matematikken, som ikke umiddelbart er konstruktivt. Har vi reelle tal givet som Cauchyfølger af rationelle tal, kan vi ekstensionelt reducere lighed på $\mathbf{R}$ til lighed på $\mathbf{Q}$. Således *defineres* ekstensionel lighed nedefra og op, hvilket kan løftes til reelle funktioner, til operationer på reelle funktioner osv. Dette fortsættes op i højere og højere typer. Igen er det generelt ikke tilfældet, at funktioner og operationer er konstruktive, hvis vi forlanger, at de skal respektere dette definerede begreb om lighed. Ikke desto mindre kan man lokalt set inden for endelig typeteori give en konstruktiv fortolkning af fuld ekstensionalitet op igennem hele hierarkiet. Dette gøres igen ved en version af Kleenes begreb om realiserbarhed.

Omvendt kan man vise, at netop Markovs princip *sammen* med fuld ekstensionalitet ikke kan betragtes som konstruktivt. Dette kan vises ved at sammenkæde forskellige bevisteoretiske metoder, se [4]. Det filosofisk interessante er, at forskellige principper – som generelt set er ikke-konstruktive og ikke-intuitionistiske – lokalt set og hver for sig kan gives konstruktive fortolkninger, men at sammenkædningen af dem er en yderst vanskelig og følsom ting.

Ovenstående skulle gerne have antydnet, at konstruktivisme, og hvad en konstruktiv logik er, endnu ikke er fuldt ud forstået. Der findes, som Gödel påpegede det, mange forskellige lag og udgaver af konstruktivisme, og forholdet mellem dem er ikke åbenlyst.

Litteratur

- [1] Friedman, H. (1973). Some applications of Kleene's method for intuitionistic systems, I *Cambridge Summer School in Mathematical Logic 1971*, pp. 113-170, Springer LNM 337 (1973).
- [2] Gödel, K. (1933). The present situation in the foundations of mathematics, i Gödel, K. (1996) *Collected Works* Vol. III, OUP, New York.
- [3] Gödel, K. (1958). Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica* **12**: 280-287.

- [4] Jørgensen, K.F. (2001). *Finite Type Arithmetic: Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation*, IMFUFA-tekst nr. 401, Roskilde.
- [5] Kleene, S.C. (1945). On the interpretation of intuitionistic number theory, *JSL* **10**: 109-124.
- [6] Simpson, S.G. (1999). *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer, Berlin.

LOGIK SOM ANVENDT MATEMATIK

Af: Mai Gehrke, Department of Mathematical Sciences, New Mexico State University, Las Cruces, NM 88003, USA, Email: mgehrke@nmsu.edu

Logik har eksisteret siden oldtiden og har sine rødder i filosofien. Den har siden den tid gået gennem perioder af skift mellem teoretisk udvikling og anvendelse. Et sådan skift kan ses for eksempel i udviklingen fra sofisternes retorik til det meget mere teoretiske og præcise studium af syllogismer, som så igen udviklede sig til den meget bredere grammatik. De mere teoretiske udviklinger af logikken har stærkt præget matematikken, og er selv stærkt præget af udviklinger indenfor matematikken. Et stort og vigtigt fremskridt for matematikken, som kommer fra grækernes fokus på logik, og som først ses i Euklids geometri, er *den aksiomatiske metode*. Euklids stræben efter få og simple aksiomer for geometrien ledte til erkendelsen af, at parallellpostulatet er nødvendigt for udledelsen af de sætninger, man anså som sande. Dette ledte meget senere til erkendelsen, at andre geometrier - uden parallellpostulatet - er mulige og faktisk nyttige. Den aksiomatiske metode er det, der i dag giver os muligheden for at studere abstrakte strukturer indenfor matematikken.

Det tætte forhold mellem matematikken og logikken har sit højdepunkt i udviklingen af matematisk logik i slutningen af det nittende og begyndelsen af det tyvende århundrede, hvor logikken nærmest blev til en gren af metamatematikken. I udviklingen af matematisk logik var målet næsten udelukkende at udrede matematikkens grundlag. Dette ligger bag udviklingen af mængdelæren. Derimod kan den centrale skelnen mellem syntaktisk logik, som udviklet i bevisteori, og semantisk logik, som udviklet i modelteori, ikke forsvares uden påkaldelse af filosofien. Logikken har nået helt nye højder af raffinement og styrke i sin matematiske form. Sætninger såsom Löwenheim-Skolem-Tarski teoremet, som garanterer eksistensen af modeller af alle uendelige kardinaliteter så snart, der er en uendelig model af aksiomerne i et tælleligt sprog, og kompakthedsteoremet, som garanterer eksistensen af modeller af aksiomatiske systemer under forudsætning af, at hver endelig delmængde af aksiomerne har en model, er utænkelige uden matematiseringen af logikken. Matematiske fuldstændighedsteoremer, såsom Gödels fuldstændighedsteorem for førsteordenslogikken, giver et helt nyt niveau af præcision til den filosofiske dikotomi mellem syntaktik og semantik.

Selvom matematisk logik som en gren af matematikken stadig udvikles, er der også, fra omkring midten af forrige århundrede, en udvidelse i gang af logikken i sin bredere betydning, og vekselvirkningen mellem teoretisk udvikling og anvendelser er således langt fra forbi. Denne udvidelse startede med undersøgelsen af sammenhænge mellem logik og såvel lingvistik som datalogi, og er blevet styrket og stærkt diversificeret i de sidste tre-fire årtier gennem forbindelser med informationsteknologi og kunstig intelligens. Diversifikationen kommer blandt andet fra nødvendigheden af at forstå andre manipulationer af information end deduktion. I kognitive systemer er det nødvendigt at have en mere dynamisk forståelse af information end den statiske deduktive form der findes i matematisk logik. Information kommunikerer og ekstraheres af store mængder af information, og opdateres og udvikler sig gennem "samarbejde" mellem forskellige dele af systemet. Redskaber for at klare alle disse nye problemer er stadig under udvikling og anvender metoder fra logik, kategoriteori, spilteori såvel som ideer fra andre områder såsom biologi og fysik. Også den deduktive del af logikken har måtte diversificeres, da klassisk deduktion er en for snæver ramme for mange anvendelser. Allerede indenfor matematisk logik er der udover den klassiske logik også intuitionistisk logik, som skelner mellem det, der er beviseligt, og det der er sandt. Dette er nu videre udviklet til at omfatte mange andre former for ikke-klassisk

logik såsom de modale logikker inklusiv temporal logik og epistemisk logik, fuzzy logik, lineær logik, og mange andre. Logikken er også blevet styrket af det praktiske aspekt af disse anvendelser. For eksempel er det blevet nødvendigt at udvikle kvantitative mål for beregning og kompleksitet og at optage sandsynlighedsregningens begreber i logikken.

Denne bredere form for logik bliver især udviklet af matematikere, dataloger, filosoffer, og ingeniører, men også af lingvister, økonomer, sociologer, og mange andre. Flere institutter og skoler har dette som deres eksklusive fokus. Den vigtigste er nok Amsterdam Universitets *Institute for Logic, Language, and Computation* (ILLC). I Danmark er der Århus Universitets forskningscenter og PhD skole Basic Research In Computer Science (BRICS), såvel som individuelle forskere rundt omkring i landet.

Jeg arbejder selv indenfor et område af algebra, som er knyttet til denne nye form for logik gennem en gren af matematisk logik, nemlig *algebraisk logik*. Algebraisk logik er studiet af logiske systemer gennem tilknyttede algebraiske systemer. Dette er specielt nyttigt, når der er brug for ikke-klassiske deduktionssystemer. Mange logiske systemer givet i form af aksiomer og deduktionsregler svarer til algebraiske teorier for algebraer med operationer hørende til de logiske konnektiver. Oftest er aksiomerne for konjunktion og disjunktion de samme som aksiomerne for de to binære operationer i et gitter. Derfor svarer disse logikker til algebraiske teorier for gitterordnede algebraer. Der er ofte ekstra operationer, som svarer til ekstra konnektiver såsom negation (unær), modaliteter (unære), og implikation (binær).

Som eksempel kan vi tage klassisk modal logik. Der er konnektiverne konjunktion ($\dot{\cup}$), disjunktion ($\dot{\cup}$), negation ($\neg$), muligvis ($\Diamond$), og nødvendigvis ($\Box$). Konjunktionen, disjunktionen, og negationen opfylder de same aksiomer som i klassisk propositionslogik, og derfor er de tilsvarende algebraer Booleske algebraer med to ekstra operationer ($\Diamond$), og ($\Box$). Nødvendigheds-konnektivet kan også anses som et videnskonnektiv, det vil sige, $\Box x$ betyder, "x vides at være sand" (epistemisk logik). I temporallogikken betyder $\Box x$ "altid x". Det andet konnektiv, $\Diamond$ er logisk ækvivalent med $\neg \Box \neg$, og derfor betyder $\Diamond x$ for eksempel "somme tider x" i temporallogikken. Algebraisk opfylder operationen $\Box$ mindst $\Box (x \dot{\cup} y) = \Box(x) \dot{\cup} \Box(y)$. I epistemisk logik kan den for eksempel også opfylde $\Box(x) = \Box \Box(x)$, dvs. viden om x er logisk ækvivalent med viden om viden om x.

Man kan så studere logikken ved at studere de tilsvarende algebraer. Eksempelvis svarer interpolation i logikken til en stærk version af den algebraiske amalgameringssegenskab. Metalogiske egenskaber såsom fuldstændighed mellem en syntaktisk givet logik og en semantisk givet logik kan også ofte formuleres algebraisk. For modallogikker bruges Kripkes semantik ofte. Der er der en modelstruktur $K = (W, R)$, hvor W er en mængde af såkaldte "mulige verdener", og R er en binær relation på mængden W , som angiver hvilke verdner "er mulige" fra en given verden. Ideen er så at en formel $\Diamond a$ er sand i en verden $w \in W$, hvis der er en verden $u \in W$, hvor a er sand og u er mulig fra w , det vil sige wRu . I algebraiske termer danner man en algebra $K^* = (P(W), \dot{\cup}, \dot{\cup}, \neg, \Diamond)$ defineret på mængden af alle delmængder af W . Konjunktion svarer til fællesmængde, disjunktion svarer til foreningsmængde, negation til komplementærmængde, og $\Diamond(S) = \{w: \text{der er } u \in S \text{ med } wRu\}$. Nu kan man så formulere fuldstændighedssætningen mellem en syntaktisk og en semantisk givet logik algebraisk, som udsagnet at "teorien (det vil sige de ligninger som holder) om de konkrete algebraer K^* , som svarer til den semantisk givne logik, er den samme som teorien, der svarer til den syntaktisk givne logik". Sådanne udsagn er yderst naturlige i algebra og modsvarer ofte teorien om såkaldte kanoniske udvidelser af gitter-ordnede algebraer.

Referencer.

1. Barwise, Jon; Seligman, Jerry: *Information flow. The logic of distributed systems*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 44. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
2. Blackburn, Patrick; de Rijke, Maarten; Venema, Yde *Modal logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xxii+554 pp.
3. Gehrke, Mai; Jonsson, Bjarni: *Canonical extensions of bounded distributive lattices*, under udg. i Math. Scand.
4. Grätzer, George: *General lattice theory*. Second edition. New appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung and R. Wille. *Birkhäuser Verlag, Basel*, 1998.
5. *Research Plan 2001-2004*, Institute for Logic, Language, and Computation, University of Amsterdam, <http://www.ilic.uva.nl/Research/>.

Hvad tænder de på?

Af docent Flemming Topsøe, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, Email: topsoe@math.ku.dk

Matematik er læren om strukturer og sammenhænge, der kan behandles på et abstrakt grundlag og føre til præcise resultater.

Så fik vi det på plads. Endvidere,

Matematik består af tre dele, hvoraf de to første er læren om ræsonneren (matematisk logik) og en genstand herfor (mængdelæren, aksiomatisk naturligvis).

I princippet kan al matematik udspilles inden for det skitserede univers. Det tredje element i matematikken er dog det, der gør det hele værd at beskæftige sig med, nemlig hensigten, vores tanker derom, skønheden ... Så er vi nede på jorden, placeret med de restriktioner det medfører, med vores sociale omgivelser og vore små eller store aspirationer. Det ville jo være rart at kunne sige noget om måneformørkelserne, Nilens oversvømmelser etc. etc. Det er der kommet megen god matematik ud af. Men MATILDE, du har nu ønsket at se mere på det abstrakte, på grundlaget. Det gør vi så.

Eller gør vi? Hvor mange steder fortæller vi de studerende herom? Naturligvis, videregående kurser findes nogle steder, men grundlaget, det, det hele bygger på, bør da være noget alle hører om. Undskyldninger er der nok af: Det er det vigtigste at lære hvordan, især på det kritiske første studieår. De studerende skal bare gøre. Og det er jo svært nok. I grundlaget finder vi dybe sære sager som vi står os ved at hemmeligholde.

Helt forkert! Dels uanstændigt, dels er det mere filosofiske, de dele, der er tæt på grundlaget noget, de studerende tænder på, noget der kan virke som en befriende modvægt mod det svære, kedeligt konkrete. Og de studerende har jo alligevel hørt om Gödel og alt det der. - Og viser en ubarmhjertig ældre studerende de unge Russell's paradoks, er den helt gal. Så enkelt og så klart - noget der viser vores begrænsning: Ja, den naturlige umiddelbare reaktion er, at matematikken er inkonsistent. Det bras! Interessen er der med det samme. Hvordan får vi reddet os ud af suppedasen, så vi dels kan have tillid til matematikken, dels give rammer der tillader os at ræsonnere udover vores naturlige begrænsninger, udover vores bundethed af det endelige?

Med den rigtige baggrund er man parat til at aksiomatisere. ZFC er et godt valg. På forhånd bør man gøre sig klart, hvilke forventninger man har til ZFC. Og i retrospekt bør man vel røbe, hvilke af forventningerne, der kan indfries. Figur 1 opsummerer den holdning jeg søger at videregive til de studerende, gengivet fra mine noter "Introduktion til abstrakt matematik" (noter til kurset Matematik Y, klikbare fra <http://www.math.ku.dk/ma/kurser/maty/noter/nye.html> eller, mere overskueligt, fra <http://www.math.ku.dk/ma/kurser/maty/noter.html>): Dette skema er en af flere mulige opgørelser over forventninger, stillede og bristede. Det er da fascinerende!

Som antydte, har jeg prøvet at føre nogle af ideerne omkring indledende undervisning ud i livet gennem kurset Matematik Y. Hvordan er det så gået? Jo, mange tændte da på det (udover mig selv!), men skal sandheden frem, har der været problemer med at få de mere jordnære ting som kan bruges som ballast senere i studiet til at sive ind. Her tænkes på elementær logik og naiv mængdelære. Det sidste er der store problemer med. Så selv efter min indsats på området bliver senere kurser som f.eks. et kursus i generel topologi nærmest ødelagt af at de studerende fokuserer på det banale mængdeteoretiske og ikke på de egentlige ideer i det pågældende område af matematikken.

Der er altså grund til nærmere at diskutere grundlagets plads i undervisningen, men selvom jeg har ganske faste meninger om disse sager, tror jeg, at du, MATILDE, står dig ved at vi slutter her og blot kort konstaterer: Ja, grundlaget skal vises frem tidligt til de studerende, ja, det ER noget de tænder på, men ak, tilegnelsen af de mere redskabsbetonede færdigheder følger ikke automatisk med.

(Figur 1 næste side)

Figur 1.

KRAV	Kan opfyldes (er opfyldt)
Konsistens	Nej – kan vi ikke vide, trossag
Righoldighed	Ja – al kendt matematik kan udledes, i princippet
Kun ”naturlige aksiomer”	Ja – synes jeg, men døm selv!
Fuld frihed	Ja – når bare vi passer lidt på
Lettelse	Nej – ”daglig” matematik er uberørt af mængdelæren
Smuk	Ja – synes jeg, døm selv!
Fuldstændighed	Nej – en umulighed!
Giver fuld sikkerhed	Ja – med mindre hele grundlaget braser

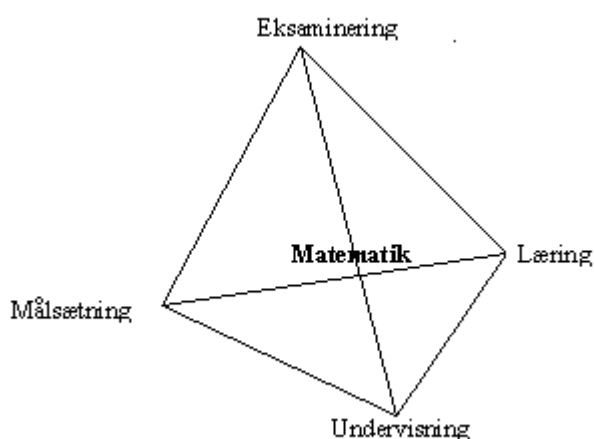


Matematikens grundlag

Ph.d.-stipendiat can.mag. Søren Antonius

Dansk Institut for Gymnasiepædagogik, Syddansk Universitet

Overskriften på denne artikel om matematik refererer ikke til fagets videnskabsteoretiske og filosofiske fundering, men derimod til undervisningsfagets grundlæggende systemiske placering sådan som jeg ser den. I mit Ph.D.-projekt om modellering og eksamen har jeg udviklet en model for objekter og relationer i feltet, som jeg kalder *det didaktiske tetraeder*. Med få ændringer kan denne model bruges til at perspektivere hele det gymnasiale matematikfag (og formentlig mange andre fag).



Modellen er bygget op omkring en kerne i form undervisningsfaget matematik. Men denne kerne har ikke nogen selvstændig eksistens; den eksisterer kun i kraft af at nogen gør noget – handler om, med og i matematik – og det er her tetraederet kommer ind i billedet.

Tetraederets hjørner skal illustrere fire centrale perspektiver på matematik, som efter min opfattelse altid er i spil når der er tale om undervisningsfaget: Målsætning, Undervisning, Læring og Eksaminering. Jeg hævder ikke at disse

fire perspektiver er de eneste relevante, blot at de er centrale og at de altid er på spil i forhold til matematikfaget, som det har eksisteret i nyere tid.

De fire perspektiver på faget bæres af feltets primære aktører: Undervisningsministeriet, matematiklærerne, eleverne og eksamenssystemet (i form af opgavekommission, eksaminatorer og censorer). Undervisningsministeriet fastlægger målsætningen, lærerne varetager undervisningen, eleverne lærer, og opgavekommission/eksaminatorer/censorer har ansvaret for eksamen.

Pædagogik reflekterer et mellemværende er DPU's motto, og jeg forsøger altså med modellen at reflektere et *værende mellem* Undervisningsministeriet, lærerne, eleverne og eksamenssystemet.

Begreberne målsætning, undervisning, læring og eksaminering rummer alle en proces/objekt-dualitet. Grammatisk set er alle begreber substantiverede verber, og dermed rummer de et verbum (processen) og et substantiv (objektet). Målsætning kan forstås som det 'at sætte mål' eller 'sætning af mål', og som sådan er der tale om den proces, som omfatter læseplansgruppens overvejelser, diskussioner og intentioner forud for det der senere hen bliver til fagbilaget i en bekendtgørelse, hvorved der er skabt et objekt: de skriftlige og officielle mål. Undervisning kan

forstås som den proces læreren går igennem når han/hun forbereder sig, udformer mål i det små, og forestiller sig hvordan et fremtidigt forløb kan afvikles, og det kan forstås i den normale betydning som det undervisningsprodukt eller -objekt, der kommer ud af disse overvejelser. Begrebet læring kan tilsvarende dels betyde 'at lære', dvs. den indre, psykiske læreproces, der foregår i eleven, dels den læring, viden eller kvalifikationer, der er resultatet af denne proces. Og eksaminering kan dels betyde opgavekommissionens, eksaminators eller censors overvejelser forud for og forberedelse til en bestemt eksamen, dels de konkrete eksamensspørgsmål- og opgaver, der kommer ud af forberedelserne. I alle tilfælde udgør processerne nogle indre psykiske eller subjektive forhold, som ikke er direkte empirisk tilgængeligt, mens objekterne alle er resultaterne af de indre processer, og kan som sådan gøres til genstand for objektiv beskuen.

Objektfortolkningerne af de fire perspektiver bestemmer i en vis forstand fire versioner af faget. Faget eksisterer (i ontologisk forstand) som målsætninger i en bekendtgørelse, som det der faktisk bliver undervist i, som den læring eleverne opnår, eller som eksamensspørgsmål og –opgaver. Man kunne bruge betegnelserne *the matter meant*, *the matter taught*, *the matter learned* og *the matter assessed* (med skyldig reference til Heinrich Bauersfeld, som introducerede de tre første begreber i en lidt anden sammenhæng). Ideelt set er disse fire versioner af faget identiske, men det er efterhånden en trivialitet at påpege at sådan forholder det sig ikke i praksis. Undervisningen er lærerens fortolkning af målsætningerne og dermed relativ til den enkelte lærer. Læring er ligeledes personlig og som sådan subjektiv, og det er en kendt sag at elever lærer noget forskelligt ud fra den samme undervisning (om end bestræbelserne går ud på at gøre læringen fælles og intersubjektiv).

De forskellige 'matters' holder i en vis forstand sammen på tetraederet. De etablerer binære relationer mellem aktørerne. Nogle af de mest markante relationer er følgende: Målsætningen influerer formentlig og forhåbentligt på undervisningen, ligesom undervisningen på længere sigt virker tilbage på formuleringen af mål for undervisningen. Undervisningen har afgørende betydning for elevernes læring, samtidig med at elevernes læring gennem bl.a. formativ evaluering virker tilbage på lærerens tilrettelæggelse af undervisning. Og både målsætningen, undervisningen og elevernes læring har indflydelse på eksamen, men ikke på en entydig måde – i praksis er eksamen et blandet spejlbillede af en fortolkning af mål og centrale bestemmelser, en forventning til hvad der er blevet undervist i, og en forventning til hvad eleverne har lært (hvilket ikke nødvendigvis er identisk med forventningerne til hvad der er blevet undervist i). Omvendt udøver eksamen en betydelig konstitutiv effekt 'nedad' i systemet som *the tail that wags the dog*, sådan at målene kan tænkes at være udformet og udvalgt sådan at de passer til en bestemt eksamensform, ligesom det er almindeligt kendt at undervisningen og elevernes læring i høj grad indretter sig på eksamen.

Dermed er det didaktiske tetraeder et dynamisk system. Det er bevægeligt og kan forandre sig gennem iagttagelse og selviagttagelse. På baggrund af indtryk fra og erfaringer med undervisningen, elevernes læring og eksamen kan Undervisningsministeriet ændre i målsætninger, hvilket vil få visse konsekvenser for de øvrige aktører og relationerne mellem dem. Uafhængigt heraf kan læreren ændre på undervisningen (fx bruge andre undervisnings- og arbejdsformer, bruge IT, udelade visse faglige aspekter og inddrage nye mv.). Eleverne kan søge indflydelse på indhold og form, og de kan vælge at bruge mere eller mindre tid på faget. Og man kan ændre eksamen eller måden eksamen gennemføres på. Dvs. modellen synliggør en række håndtag, som aktørerne hver især kan dreje på og dermed bringe systemet i mere eller mindre 'harmonisk' balance. Man kan også sige, at systemet er under stadig rekonstruktion i kraft af den kommunikation der foregår internt i systemet, og denne rekonstruktion bevarer systemet samtidig med at den forandrer det.

Systemet er også polycentrisk og hyperkompleks^[1]. Dermed mener jeg at der ikke findes et arkimedisk punkt, hvorfra alt andet kan bevæges, men at der i det mindste er fire centre, som alle er selvbærende. Alle aktører handler ud fra egne 'dagsordener', men må samtidig respekterer de

andres. Undervisningsministeriet kan ikke bare bestemme hvad som helst, men må sikre sig at lærerne i vid udstrækning er med på ideen. Lærerne kan ikke bare undervise som de vil, men må tage hensyn til elevernes ønsker og behov. Eleverne kan ikke bare vælge frit på alle hylder, men må respektere de overordnede mål og fagets natur. Og eksamenssystemet kan ikke fastlægge opgaver og spørgsmål uden skyldig hensyntagen til bekendtgørelsen, til den faktiske undervisning og hvad eleverne faktisk har lært.

Man kan opfatte det samlede system som uddifferentieret i fire subsystemer, som kommuniker med hver deres kode. Undervisningsministeriets kode er: Hvad er godt for samfundet? Lærernes kode er: Hvad er godt for faget? Elevernes kode er: Hvad er godt eller meningsfuldt for mig? Og eksamenssystemets kode er: Hvad kan og skal vi måle? Disse forskellige koder kan forklare hvorfor aktørerne ikke altid er enige om hvordan faget skal fortolkes.

Selv om der således er tale om fire aktørroller med forskellige koder er der ikke tale om en kategorial bestemmelse af aktørerne. Den samme person kan sagtens optræde flere steder i tetraederet, men optræder så de forskellige steder i forskellige roller. Fx vil en lærer normalt også optræde som eksaminator og censor, han/hun kan også optræde som aktør i en læseplansgruppe med henblik på 'sætning af mål', og læreren har hvert fald en baggrund og erfaring som elev. Dermed udstiller modellen et problem, når vi som lærere eller forskere forsøger at undersøge feltet eller dele af feltet, nemlig det dilemma at vi på den ene side gerne vil bringe os på afstand af feltet for at kunne objektivere feltet samtidig med at vi selv er en del af feltet. Det kan udtrykkes med et Luhmann-inspireret citat af Jens Rasmussen: *Hvorledes er det muligt at iagttage og beskrive en verden og på samme tid også beskrive de måder, iagttagerens bevidsthed spiller ind på det, der iagttages?*^[2] Eller som Niels Bohr udtrykte det: - *every relevant piece of theoretical knowledge, being part of some idea or model of the real world, will in some way or another have to take into account that the person having the knowledge is part of the system represented by the knowledge. All knowledge presupposes a subject, an object and relations between them (which are established by means of the subject's activity). Therefore, all knowledge has an incoherent structure with metaphorical and strictly operative connections.*^[3] Det er et dilemma som ikke kan opløses, men må medtænkes i ethvert forsøg på at opnå erkendelse.

^[1] Jf. Qvortrup, Lars (2000): *Det hyperkomplekse samfund*, Gyldendal

^[2] Rasmussen, Jens (1999): Læring og læringsteorier, s. 19, I: KVAN 54, *Temannummer: Læring og undervisning*

^[3] Citeret efter Melling-Olsen, Stig (1989): Lærerens opfatninger av elevers kunnskabsinteresser, I: *Gymnasiets matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav*, Statens Humanistiske Forskningsråd

Interview med Ib Madsen

Århus, den 5.12.2001

Martin Raussen: MR

Ib Madsen: IM

Familie og Skole

MR: Ib, du har arbejdet professionelt med matematik i ca. 40 år. Kan du fortælle om hvor interessen stammer fra, hvad det var, der tændte den for første gang?

IM: Den stammer fra min mor, og den går tilbage til mine teenageår. Fra jeg var 12-14 år gammel har jeg altid ønsket at blive professionel matematiker. Jeg er ud af en ganske almindelig middelklasse baggrund. Min far var ingeniør med et lille firma og et undervisningsjob på DTU, hvor han gik under navnet Beton-Madsen. Hans speciale var jernbeton, så øgenavnet kan have noget at gøre med det. Min mor var hjemmegående, som det var skik og brug på den tid. Hun havde en glødende interesse for matematik og den overførte hun til mig. Tidligt gav hun mig bøger som E.T. Bells' 'Men of mathematics'.

MR: Kan du fortælle om din skolegang? Har den haft indflydelse på din interesse for faget?

IM: Jeg var stærkt ordblind og havde meget svært ved at lære at læse og stave. Det tog man ikke så meget hensyn til dengang i 50'erne. Jeg blev mere eller mindre karakteriseret som dum og ubegavet i underskolen. Det lykkedes mig med nød og næppe at komme i mellemskolen, hvor det heller ikke gik for godt. Det så sort ud med at komme i gymnasiet, Holte gymnasium. Men det gik, og det kan jeg takke Bent Christiansen for, den senere leder af lærerhøjskolen. I fjerde mellem (niende klassetrin) kunne dygtige elever få lov til at få Latin, men det ville skolen ikke tillade, at jeg fik. I stedet for fik jeg ekstratimer i matematik med Bent Christiansen som lærer. Han opdagede mit talent for matematik. Det kendte jeg selvfølgelig godt selv. Men min regnelærer havde ikke opdaget det, hvor mærkeligt det end lyder. Og så er skolesystemet jo sådan, at hvis man rubriceres som virkelig god til et fag så smitter det af på de andre fag. Lærerne taler jo sammen på lærerværelset. Det endte med, at jeg fik lov til at komme i gymnasiet. Der fik jeg Jonas Lichtenberg som matematiklærer. Han var virkelig en fantastisk lærer, og det blev hurtigt klart, at jeg havde exceptionelle evner for matematik og de andre naturvidenskabelige fag. I løbet af ganske kort tid gik jeg fra at være en af de dårligste elever til at være en af de allerbedste. Det var en meget mærkelig oplevelse.

Københavns Universitet

I 1960 startede jeg på Københavns Universitet.

MR: Med matematik og fysik, eller hvordan var det dengang?

IM: Nej, der var lige blevet oprettet en ren matematiklinie, jeg tror, det skyldtes en stor mangel på matematiklærere i gymnasiet; den gik jeg på. Vi var et 'kæmpe hold' på ca. 120 studenter tilsammen i matematik og fysik, ikke meget efter nutidens standard, men dengang var det uhørt stort. Der var stor politisk opbakning til naturvidenskab i 1960.

MR: Og de unge sporede sig ind af sig selv?

IM: Ja, unge mennesker er lydhøre når et område har stor politisk bevågenhed. Det hører også med i billedet, at SU-ordningen lige var blevet indført. Man kunne leve af sin SU. En hel del af mine studiekammerater kom fra miljøer, som ikke tidligere havde haft tradition for at tage en højere uddannelse. Mange havde allerede haft arbejde, men nu kunne de studere på grund af den gode SU-ordning. Dertil kom, at der var et tilbud om at få betalt sit 2.dels studium med fuld løn, hvis man efter 1.del gik ud i gymnasiet nogle år, jeg husker ikke hvor mange år. Alt sammen på grund af den katastrofale mangel på gymnasielærere.

MR: Er der bestemte politikere der især fremmede denne kraftige udvikling?

IM: Bundgaard fortalte mig senere, at Viggo Kampmann var drivkraften bag at få den højere uddannelse op i omdrejninger, og at K. P. Andersen senere fulgte den linie op. Det var mænd man kunne snakke med, som han udtrykte det. Pengene sad løst, og der var ingen berøringsangst politikere og universitetsfolk imellem. Den danske efterkrigsbefolkning skulle oplæres.

MR: Hvem var dine første lærere?

IM: Hans Tornehave, Jørgens far, og Werner Fenchel delte Mat.1, som var det store 1.års kursus i matematik. Tornehave havde analysedelen og Fenchel den lineære algebra. Vores undervisning var lidt kaotisk det første år, ja faktisk hele vejen gennem 1.del. Den nye studieordning blev indført det år. Lærerne skrev noter, samtidig med at de underviste os. Fenchel var altid lidt bagefter med sit noteskriveri, men han skrev fantastiske noter. Tornehave brugte en forfærdelig bog af Apostol. Vi havde også et antikveret kursus i numeriske metoder, Mat.4, på første år. På andet år havde vi Mat.2 – integrationsteori (Børge Jessen) og algebra (Thøger Bang), og Mat.5. som var om sandsynlighedsteori og statistik (Hans Brøns). Endelig på 3.år havde vi Mat.3 og Mat.6. Det var geometri (Fenchel) og operatoralgebra (Kehlet). Det var en meget simpel struktur, helt anderledes end i dag. Vi holdt til i auditorium U i kælderens på Bohr instituttet. Ikke ret gode fysiske rammer. I 1963 flyttede vi til H.C. Ørsted instituttet til den matematikbygning som også rummer matematisk institut i dag.

MR: Hvordan var overlevelseshraten dengang? Hvor mange af de studerende, der startede i 1960, var der tilbage i 1963?

IM: På den rene matematiklinje startede vi med et hold på omkring 30. Vi var tre, der gik til eksamen i 1963 og den ene dumpede, så vi var to der fulgte studieordningen. Det var Jørgen Vesterstrøm og mig selv. Det var nok ikke gået i dag. 2. dels studiet var så vidt jeg husker normeret til halvandet år. Jeg havde en af de unge, Hans Richel, som specialevejleder, og han lærte mig de første spæde skridt i algebraisk topologi.

Aarhus Universitet

MR: Hvorfor skiftede du til Aarhus Universitet?

IM: Det skyldes sikkert Svend Bundgaard. Men som jeg husker det, holdt Leif Kristensen et kollokvieforedrag i København engang i foråret 1965. I forbindelse med det blev jeg inviteret til Århus for at studere hos ham i et års tid.

En Københavner forlader jo nødtigt sin hjemby for at flytte til provinsen, men miljøet i Århus var fantastisk i 60'erne. Der var liv og glade dage og ikke mindst en arbejdsmoral, som jeg ikke havde stiftet bekendtskab med tidligere. Der var en stor gruppe studenter i topologi omkring Leif. Vi holdt foredrag for hinanden og gennemgik de vigtigste nye matematiske afhandlinger: Adams' afhandling om Hopfinvariant én problemet, Thoms udregning af kobordismeringen, Milnors afhandling om de mange forskellige differentiable strukturer på den 7-dimensionale kugleflade, Borels og Serres afhandlinger om udregning af kohomologi ved brug af spektralfølger osv. I sommermånederne havde vi et fælles seminar med Per Holm og en række yngre norske matematikere fra Oslo. Tågekammeret, som svarer til Parentesen i København, holdt fantastiske fester. Alle lærere med Bundgaard i spidsen kom til alle fester. Der var dans til den lyse morgen. Det ene år, som jeg og min daværende hustru Benedicte skulle tilbringe i Århus, blev til tre år. Derefter vendte vi ikke tilbage til hovedstaden, men tog til Chicago.

MR: Hvordan var det matematiske miljø i Århus?

IM: Det var meget mere internationalt end jeg havde været vant til fra København. Tvunget af omstændighederne, med mangel på danske forskere til at befolke det nye institut i Århus, havde Bundgaard inviteret en række udenlandske matematikere på længerevarende ophold i Århus. Samtalesproget var engelsk. I 1967-68 f. eks. var der en større udenlandsk gruppe: Kadison, Effros og Glimm i operatoralgebra, og Curtis, Liulevicius og Stein i topologi tilbragte hele året i Århus. Desuden var der mange på kortere besøg. Der var 'nybyggerstemning'.

MR: Hvem forskede du sammen med på den tid?

IM: Først og fremmest med Leif Kristensen. Han lærte mig, hvad matematisk forskning er for noget. Jeg skrev en række afhandlinger sammen med ham, nogle af dem også i samarbejde med Anders Kock. Problemerne kom fra Leif. Det drejede sig om sekundære og højere ordens kohomologioperationer. Leif havde en ny måde at lave operationer på. Vi kaldte det O's historie. Vi indførte og studerede det, der senere kom til at hedde Moravas K-teori, men vi opdagede ikke den algebraiske sammenhæng, som dette har med automorfier af divisionsalgebrer. Det er Moravas fortjeneste. Jeg skrev også en afhandling med norske Nils Baas om kohomologi af Morava K-teori, som er blevet populær de seneste år. Jeg havde glemt alt om den afhandling, og blev meget overrasket over at høre den citeret for nylig i foredrag og i nyere afhandlinger.

MR: Og du har sandsynligvis også undervist i Århus på den tid?

IM: Ja, det må jeg vel have gjort. Men jeg kan ikke huske, hvad jeg underviste i. Jeg holdt i hvert fald ikke 1.dels forelæsninger. Jeg havde et kandidatstipendium, men Bundgaard havde den indstilling, at unge mennesker skulle have fred til at lære sig hvad forskning er. Så vi blev behandlet godt, for nu at sige det mildt.

Chicago

MR: Og så kom du til Chicago med et dansk stipendium?

IM: Som jeg nævnte før, så var Liulevicius i Århus i 67-68, og han skaffede mig til Chicago som PhD-studerende, uden at jeg overhovedet havde gjort noget selv. Men Bundgaard havde sikkert en hånd med i spillet. Han syntes, at vi unge skulle ud og se verden. Vi blev nærmest tvunget af sted. Han var bare 25 år forud for sin tid med hensyn til internationalisering. Jeg havde et seniorstipendium fra Danmark, betalte ikke tuition og fik endda et mindre scholarship ved Chicago. Så vi var rige sammenlignet med amerikanske studenter. Jeg havde familien med til Chicago. Min hustru og vores ældste søn, som hedder Bo; han arbejder nu i IT-branchen i København.

Vi ankom til Chicago en forfærdelig varm dag i August 1968. Det var samtidig med demokraternes stormfulde partikonvent, som var en heftig affære. Byen lignede en krigszone. Politiet førte sig frem med en brutalitet, som jeg ikke kendte fra Danmark. Det var vanskeligt at se forskel på billederne i aviserne, om de kom fra Prag eller fra Chicago. Det var krigen i Vietnam, der blev demonstreret imod. USA var i færd med at blive revet midt over.

MR: Hvordan faldt du til i Chicago?

IM: Det tog et lille års tid, før jeg for alvor følte mig hjemme. I starten arbejdede jeg videre med den matematik, jeg havde med i bagagen fra Århus, men efterhånden begyndte jeg at komme ind i de problemstillinger som var 'hotte' i slutningen af 60erne. Man skal have en vis matematisk succes for at føle sig rigtig hjemme på et institut som Department of Mathematics i Chicago. Original forskning er det, der tæller; ikke meget andet. For mig var Chicago det rette sted. Ikke helt så konkurrencepræget som f.eks. Princeton, men stadig et sted hvor hele den nye matematik bliver præsenteret i foredrag af besøgende gæster. Jeg lærte en masse matematikere at kende, alle mine samtidige, og det har jeg levet højt på lige siden.

MR: Kan du fortælle lidt om de personer der har haft indflydelse på dig i Chicago?

IM: Det er først og fremmest Peter May og Mel Rothenberg. Af Peter lærte jeg teorien for uendelige løkkerum (topologiens form for abelske grupper). Mel lærte mig geometrisk topologi, teorien for mangfoldigheder. Min egen forskning i Chicago forbandt disse to områder, og lige siden har dette grænseområde mellem algebraisk og geometrisk topologi været min vigtigste inspirationskilde. Både Peter og Mel og deres familier hører til mine rigtig gode venner.

Den topologiske kobordisering

MR: Hvad drejede din thesis sig om?

IM: I hver dimension af formen $4k+2$ findes der en særlig interessant topologisk mangfoldighed,

som sædvanligvis kaldes Kervairemangfoldigheden. Den har sammenhæng med sfærer med eksotiske differentiable strukturer, som var blevet undersøgt af Kervaire og Milnor nogle få år før. Det var et 'hot' problem at forstå disse mangfoldigheder. Om de kan have en glat struktur, om de er rand af en topologisk mangfoldighed af dimension $4k+3$ osv. Teorien for topologiske mangfoldigheder blev udviklet i slutningen af 60'erne af en lang række personer, men især af Kirby og Siebenmann, Sullivan og Wall. Det var fuldførelsen af det, Novikov havde startet med beviset for Pontrjaginklassers topologiske invarians. Hvorom alting er, så lykkedes det mig at forbinde dette geometriske problem med den nye teori for uendelige løkkerum. Jeg beviste f.eks. at Kervairemangfoldighederne er rande præcis hvis dimensionen er en toerpotens minus to. Det vakte opsigt og var min billet ind i det gode matematiske selskab. Senere udarbejdede jeg i samarbejde med Brumfiel og Milgram fra Stanford kobordismeklassifikationen af alle topologiske mangfoldigheder. Det blev til en lang række afhandlinger og en bog i Annals Studies serien.

MR: Kan du huske, hvordan du fandt din opdagelse om Kervairemangfoldighederne?

IM: Hvordan man får en ide er altid svært at sige. Det hænger sammen med lang tids koncentration. Men jeg kan ganske tydeligt huske hvornår. Jeg kørte Munkholm til lufthavnen i Chicago engang i løbet af 1969; jeg mener, at han skulle hjem til en begravelse i Danmark. På vej hjem fra lufthavnen stod det hele pludseligt klart for mig; i en brøkdel af et sekund. Jeg havde fundet det afgørende 'shortcut'. Det var ellers den almindelige opfattelse, at man blev nødt til at løse det såkaldte Arf-invariant problem først. Det handler om, hvorvidt Kervairemangfoldighederne i de kritiske dimensioner (toerpotens minus to) er glatte med trivielt tangentbündt. Dette problem er stadig ikke løst.

MR: I fik jeres andet barn i Chicago?

IM: Ja, min yngste søn Thor er født i Chicago i 1970. Han blev dermed amerikansk statsborger, og han er i dag både amerikansk og dansk statsborger. Han har senere haft enormt megen glæde af sit dobbelte statsborgerskab, som har gjort, at han frit har kunnet rejse ud og ind i USA. 'Welcome home, sir', siger de amerikansk toldbetjente til ham. Han er musiker og bor i New York.

MR: Men I besluttede jer for at vende hjem til Danmark.

IM: Ja. Jeg fik min PhD i Chicago i 1970, og derefter var jeg ansat som Research Instructor i et år. Min ældste skulle starte i skole i 71. University of Chicago ligger omgivet af slum på tre sider og søen på den fjerde side. Der var en masse kriminalitet og bandeuvæsen. Skolebørn gik med knive osv. Vanvittige berigelsesmord. Og så var der Vietnam-krigen. Jeg havde tilbud om faste stillinger både på University of Chicago og i Stanford. Men vi besluttede os til at vende tilbage til Århus til et job som lektor.

MR: Har du senere fortrudt den beslutning?

IM: Nej, næh, det har jeg ikke, men med den udvikling som det danske universitets system har været igennem, så havde beslutningen været meget sværere i dag. I 1971, stadig i slipstrømmen fra Sputnik, så det ud som om der ville være plads til et første rangs matematisk institut eller endda et par stykker i Danmark. Unge dygtige mennesker havde politisk bevågenhed. Nu er jeg ikke så sikker længere. Næsten alle unge, der tilbragte længere tid i udlandet på den tid kom tilbage til danske universitetsjob. Det bliver med sikkerhed ikke tilfældet med nutidens videnskabelige talenter. Men først og fremmest har jeg ikke fortrudt på grund af mine nærmeste kolleger i topologigruppen i Århus. Ingen kunne ønske sig en bedre baggrundsgruppe end Bökstedt, Dupont, du Plessis og Tornehave. I lange tider havde jeg også Bob Oliver i Århus; nu er han i Paris. Ham lærte jeg i øvrigt at kende, da han var undergraduate i Chicago. Og nu har vi heldigvis fået Jørgen Ellegaard Andersen. Ja, og så mødte jeg jo min nuværende hustru Ulla i Århus.

MR: Nu begyndte du vel så også at undervise en hel del?

IM: Ja efter tre år i udlandet var det egentlig dejligt at komme til at undervise for alvor. Det var først og fremmest 2. dels kurser jeg underviste. Jeg har gemt alle mine forelæsnings noter over årene. Det var kurser af en langt større sværhedsgrad end dem vi giver nu til dags.

Rumformsproblemer

MR: Hvad skete der på forskningsfronten i denne tid?

IM: I de første 4-5 år, efter jeg var kommet tilbage, fortsatte samarbejdet med Brumfiel og Milgram om kobordisme og surgeryklassifikation af topologiske mangfoldigheder. Jeg tilbragte hver sommer i Stanford i de år. Men så trængte jeg til noget nyt. Jeg mødte Terry Wall i Chicago engang i midten af 70'erne. Han holdt foredrag om det topologiske sfæriske rumformsproblem og præsenterede løsninger i nogle tilfælde, som han havde udarbejdet sammen med Charles Thomas. Problemet handler om, hvilke fundamentalgrupper, som kan optræde for mangfoldigheder, hvis universelle overlejringsrum er en sfære. Det begyndte jeg at tænke over og kom med nogle nye ideer og metoder, som blev til et par afhandlinger med Thomas og Wall. Løsningen er, at en gruppe er fundamentalgruppe for en topologisk sfærisk rumform af dimension større end 4, hvis og kun hvis den har egenskaben at enhver undergruppe af orden $2p$ eller p^2 er cyklisk. Man kender også alle sådanne grupper (2×2 -matricer over $\mathbb{Z}/p$ med determinant en, hvor p er et vilkårligt primtal, er et eksempel). Hvis man spørger om metriske rumformer så er der langt færre grupper som optræder; nemlig kun grupper, hvor enhver undergruppe af orden pq (p og q primtal) er cyklisk.

Derefter begyndte jeg at undersøge i hvilke dimensioner disse rumformer kan optræde. Det er langt vanskeligere. Spørgsmålet ender med at afhænge af talteoretiske betingelser, hvor man ikke kan give 'globale svar'. Milgram arbejdede med det samme problem. Men denne gang konkurrerede han i stedet for at samarbejde, og vi fandt hver sin metode. I den periode, som varede næsten 10 år, lærte jeg mig klasselegemsteori (studiet af legemsudvidelser af de rationale tal med abelsk fundamentalgruppe). Det er hård kost. Jeg lærte meget af tre fremragende semesterkurser, som Jørgen Tornehave holdt, samtidig med at jeg satte mig ind i teorien for kvadratiske former over grupperinge. Jeg har senere haft megen glæde af al den algebra som jeg lærte i den forbindelse. Det blev til en lang række afhandlinger om disse problemstillinger.

I dimension 3 er det forventet at enhver rumform er metrisk. Det er en del af Thurstons alt omfavnende formodning om at alle 3-mangfoldigheder er 'geometriske'. Tobias Colding arbejder på at vise dette for sfæriske rumformer.

De Rham's problem

MR: Hvad arbejdede du så med herefter?

IM: I begyndelsen af 80'erne var jeg igen i Chicago i en måned eller to, og så begyndte jeg at beskæftige mig med et spørgsmål, som var blevet rejst af de Rham mange år før. Problemet er, om to repræsentationer af en endelig gruppe, som er topologisk ækvivalente, faktisk er lineært ækvivalente. Shaneson og Cappell havde netop givet et modeksempel for gruppen $\mathbb{Z}/8$. Jeg begyndte at arbejde sammen med Mel Rothenberg på de Rham's formodning for grupper af ulige orden. Det førte os langt omkring i teorien for klassifikation af mangfoldigheder med en gruppevirkning. Vi endte med at løse problemet: de Rham havde ret for repræsentationer af grupper af ulige orden. Uafhængigt af os viste Hsiang og Pardon samme resultat, men med ganske andre metoder. Der var derfor ingen mening i at skrive et fælles arbejde, men vi publicerede efter aftale et announcement i samme nummer af Bull. AMS. Det var en fin måde at få 'credit' for begge hold af forfattere. Det var Hsiangs forslag. Senere har en række forskellige forfattere arbejdet videre på at udregne repræsentationer modulo topologisk ækvivalens. De mest omfattende resultater skyldes Ian Hambleton og Erik K. Pedersen, men desværre sker her det samme som for det sfæriske rumformsproblem: Resultaterne har ingen global form, de afhænger af talteoretiske spørgsmål, som man siden Kummer har vidst, man ikke kunne løse 'globalt'.

Novikov-formodning og Topologisk Cyklisk Homologi

MR: Så har du været et år i Princeton.

IM: Ja. Ulla og jeg tilbragte året 1986/87 på Institute of Advanced Study. Ian Hambleton var der

også, og vi fuldførte nogle arbejder om klassifikation af kvadratiske former over grupperinge. Det var i det år, jeg begyndte mit samarbejde med Hsiang om den såkaldte Novikov-formodning (dens K-teoretiske form). Det er faktisk Hsiang som har formuleret Novikov-formodningen generelt, selv om den nu også kaldes Baum-Connes formodningen. Hsiang havde, sammen med Farrell, selv løst en række specialtilfælde med geometriske metoder. Men det samarbejde, som vi startede i Princeton, var af mere algebraisk topologisk eller homotopiteoretisk karakter, uden geometriske forudsætninger. Vi løste langt fra problemet i 86/87. Da jeg kom hjem fra Princeton fortsatte arbejdet, og nu med Marcel Bökstedt som yderligere samarbejdspartner. Hsiang ringede tit til mig, det må have kostet ustyrlige summer i telefon.

Det endte med definitionen af Topologisk Cyklisk Homologi og en afbildning fra K-teori ind i denne, det såkaldte cyklotomiske spor. Dette løste Novikov-formodningen i sin K-teoretiske form i en meget stor generalitet. Lad mig tilføje at topologisk cyklisk homologi er en generalisation af Connes' og Feigin-Tsygans cykliske homologi, og at vi brugte Waldhausens K-teori af rum og ikke Quillens lineære K-teori. Det blev til en meget lang afhandling sammen med Bökstedt og Hsiang, publiceret i *Inventiones* i begyndelsen af 90'erne. Den blev startskuddet til en ret heftig aktivitet omkring den nye konstruktion (Top.cyk.hom.), som en lang række matematikere har ydet bidrag til.

MR: Hvordan oplever du dine opdagelser, giver de en glædesrus hver gang?

IM: Den første gang i Chicago, der var det udpræget blot glæde. Altså helt utvetydigt. Da jeg fandt ud af de Rhams problem, det husker jeg også fuldstændigt tydeligt. Jeg ved lige hvor jeg sad hjemme i min lejlighed. Der havde jeg indrettet et lille bitte kontor. Også med rumformsproblemet og med Novikov-formodningen. Ja, selvfølgelig er man ekstremt glad. Men i de senere år sniger der sig også noget andet ind. Det er at man siger 'nå ja, sådan er det', og det er selvfølgelig glædeligt. Men så ved man, at der skal ekstremt meget energi til at skrive alt ned. Man har jo kun de store linier i hovedet.

Algebraisk K-teori

MR: Og så gik du for alvor i gang med algebraisk K-teori.

IM: Ja. Helt tilbage fra midten af 70'erne havde jeg været fascineret af det der sædvanligvis kaldes Lichtenbaum-Quillen formodningen. Den er i realiteten en udregning af algebraisk K-teori af tallegemer. Formodningen fortæller, at K-teori af sådanne giver grupper, som vi via Bott-periodicitet kender usædvanligt godt. Jeg troede ikke på formodningen, og satsede på et modeksempel. Marcel og jeg gik i gang med at udregne K-teori af de p-adiske hele tal ved hjælp af det cyklotomiske spor. (De p-adiske heltal danner faktisk en meget simplere ring end de hele tal, fordi der kun er ét primideal.) Det var sandt at sige en tour de force, men efter flere års arbejde lykkedes det os at fuldføre udregningerne. Og Lichtenbaum-Quillen formodningen viste sig at være rigtig i dette tilfælde. Til min store overraskelse.

MR: Og siden inddrog du Lars Hesselholt.

IM: Ja, Lars var den første student under vores nye PhD ordning i Århus (4+4 ordningen). Jeg havde lært af min meget nære ven Wu-Chung Hsiang, at den bedste måde at have forskningsstudenter på, er at involvere dem i sine egne forskningsinteresser. Og det gjorde jeg for første gang med Lars. Det viste sig at være en kæmpesucces. Lars er et fantastisk matematisk talent, og vi har skrevet en lang række afhandlinger sammen. Lars forbandt top. cyk. homologi med Grothediecks krystallinske homologi (eller hvad der er det samme, med de Rham-Witt komplekset) når den undersøgte ring er et perfekt legeme. Siden hen fandt vi en generalisation, som gælder for p-lokale ringe. Det lykkedes os at vise Lichtenbaum-Quillen formodningen ved at bruge denne sammenhæng for alle lokale tallegemer. Resultatet udkommer snart i *Annals of Math.* i en 100 sider lang afhandling. Nu fører Lars disse sager videre i en talteoretisk og algebraisk-geometisk retning.

Modulirum af Riemannflader

MR: Så nu må du være i gang med noget nyt. . .

IM: Ja, det er rigtigt. Hovedårsagen til mit engagement i Algebraisk K-teori er den tætte sammenhæng med grupper af diffeomorfier for højtdimensionale mangfoldigheder. Nu beskæftiger jeg mig med diffeomorfgruppen af flader eller, hvad der er en anden side af samme sag, med modulirummet af Riemannflader. Man kan næsten sige at det er en dansk specialitet. Jakob Nielsen og Werner Fenchel har ydet store bidrag til dette område. Det begyndte i Oberwolfach for en 5-6 år siden. Ulrike Tillmann havde netop vist at det stabile modulirum (genus = uendelig) efter man anvender Quillens pluskonstruktion, som er et lån fra Algebraisk K-teori, bliver et uendeligt løkkerum. Det var nyt og meget overraskende, af grunde som jeg ikke skal komme ind på. Det skærpede øjeblikkeligt min interesse. Modulirummet af Riemann flader er et 'hot' område for tiden, bl.a. på grund af dets brug i teoretisk fysik. Jeg fik ret hurtigt nogle ideer om dets struktur og tog til Oberwolfach året efter for at tale med Bökigheimer, som er ekspert i Riemannflader. Vi aftalte at gå over i biblioteksbygningen og på vej derover mødte vi Ulrike. Bökigheimer bad hende komme med. Jeg fortalte om mine ideer, og Ulrike blev grebet af det jeg fortalte. Det endte med at hun og jeg begyndte at arbejde sammen, altså ved lidt af et tilfælde. Det blev til et fælles arbejde, som udkom sidste år. Dette arbejde viser, at den homologiske struktur er langt rigere end hidtil antaget, og det gav anledning til et par modstridende formodninger om den samlede struktur af det pågældende modulirum.

I sommeren 2000 besøgte Ulla og jeg Bott i hans sommerhus på øen Martha's Vineyard. (Det var der, Kennedy's ældste søn forulykkede kort tid efter). Raoul Bott er en fantastisk person, en uhyre venlig og charmerende mand, som er meget glad for kvindeligt selskab. Det var sikkert nok så meget Ulla, han havde lyst til at se, som mig. Jeg fortalte ham om algebraisk K-teori og det cyklotomiske spor og mine resultater med Lars og nævnte sikkert også mit arbejde med Ulrike.

MR: Han må være omkring 75 år nu?

IM: Han er faktisk 78-79 så vidt jeg husker. Når man taler med ældre matematikere kan det ikke nytte noget at mose på med alle de her tekniske detaljer. For det første kan de ikke forstå det, og for det andet gider de ikke at forstå det. Begge dele ganske rimeligt. Så vi diskuterede ideer snarere end detaljer. Efter nogle dejlige dage i hans sommerhus fløj Ulla og jeg videre til Boulder, Colorado, til Peter Mays 60 års fødselsdagskonference. For Bott om nogen skal matematik være smukt, og jeg tror jeg var påvirket af ham og af de samtaler vi havde haft. Under den lange kedelige flyvetur satte jeg mig til at lave nogle ret uskyldige udregninger. Pludselig gik det op for mig at den ene af de to konkurrerende formodninger om modulirummet måtte være den rigtige - den var den smukkeste og den stemte med den smule, der var kendt på daværende tidspunkt om modulirummet. Senere fik jeg den 'oversat' til en formodning i et helt andet felt, nemlig til et spørgsmål i singularitetsteori.

Sidste år til en conference på Isle of Skye fandt jeg sammen med Michael Weiss. Han havde nogle nye ideer og vi besluttede os til at slå pjalterne sammen for at forsøge at få formodningen løst. Og det er faktisk lykkedes for os nu. Så nu kender man den samlede homologiske struktur af det stabile modulirum af Riemannflader. Specielt løser det den såkaldte Mumfordformodning, som er blevet angrebet også fra algebraisk-geometriske synsvinkler. Men homotopiteori viste sig altså at være den mest effektive synsvinkel. Det er det mest overraskende resultat og det bedste matematik, jeg har lavet i min matematiske karriere. Forhåbentlig åbner dette resultat op for en ny udvikling, men det ved man aldrig på forhånd.

MR: Det var en lang historie, som i sidste ende består af succeser. Er der noget der nager dig, noget som du har arbejdet med og som alligevel ikke blev til det du gerne ville. . . ?

IM: Måske det meget lange tidsrum jeg brugte på det sfæriske rumformsproblem: problemet med at få rumformen til at eksistere i den 'rigtige' dimension. Det var næppe sliddet værd, fordi der ikke er nogen egentlig løsning, men blot en reduktion til talteoretiske problemstillinger, som ikke har en uniform løsning. På den anden side lærte jeg al den algebra, som hører til klasselegemer.

Det er sådan en smuk teori, udarbejdet i første del af det forrige århundrede, og det har givet mig et psykologisk rygstød at kende teorien og at have brugt den til at løse et geometrisk problem. Klasselegemsteori er grundlag for så meget moderne matematik.

Mennesker og rejser

MR: Du har haft med mange mennesker at gøre i din forskningskarriere. Er der nogle du særligt vil fremhæve, nogle du måske beundrer særligt meget eller specielt har taget ved lære af. . .

IM: Jeg har lært utroligt meget af mine kolleger i topologigruppen i Århus, og jeg har lært næsten alt resten af mine mange medforfattere. Og så har jeg som alle andre matematikere lært af mine studenter. Marcel Bökstedt og Lars Hesselholt ikke mindst. Hvis jeg blot skulle vælge en på den internationale scene, så måtte det blive Jack Milnor.

MR: Du har rejst meget i din karriere.

IM: Ja, jeg er vel i gennemsnit væk ca. 2 måneder om året. Jeg er mest i USA. I de senere år har jeg tilbragt sommermånederne i Stanford. Nu arbejder jeg sammen med den 'næste' generation topologer i Stanford, Gunnar Carlsson og Ralph Cohen. Jeg kommer også meget på MIT for at besøge Lars og så min allerbedste ven, Mike Hopkins, som også tit besøger Ulla og mig i Århus.

Forskningspsykologi

MR: Hvordan har du det inderst inde når du forsker?

IM: Der er nogle matematikere der har et legende forhold til matematik - det har jeg i hvert fald lade mig fortælle. Det er meget, meget langt fra min egen oplevelse. Jeg er et nervøst gemyt og jeg har et mere traumatisk forhold til matematik. Det minder mere om den måde mange forfattere og andre kunstnere beskriver deres forhold til kunst. Det er en psykisk nødvendighed for mig at tænke over matematiske problemer. En uges ferie er alt hvad jeg kan tage. Så bliver jeg urolig. Den eneste kur for mig er så at begynde at tænke systematisk over et matematisk problem igen. Det er lidt som den måde Gunnar Carlsson lidt humoristisk beskriver en typisk matematiker: En person som kan tælle de dage hvor han/hun er rigtig glad på en hånd. Nå, det er måske lidt for meget nordisk tungsind. Jeg er faktisk en glad og udadvendt person. Jeg er, som Raoul Bott, glad for kvindeligt selskab og for fest og ballade.

MR: Men der er mange dage hvor du ikke er glad?

IM: Det må jeg nok indrømme, selvom det er blevet noget bedre med årene. Men det gælder selvfølgelig for alle matematikere uanset hvor højt på strå de er, og uanset hvor intelligente de er: Der er mange dage, måneder, hvor intet vil lykkes. Det er i sådanne perioder at det er sundt for sjælen at have et job hvor man også underviser.

Undervisningsmetoder

MR: Nu vil jeg gerne spørge lidt om din undervisning. Har du din egen måde at få de unge til at høre efter?

IM: Jeg er ikke noget naturtalent til at undervise (dvs. holde forelæsninger). Så jeg forbereder mig minutiøst til hver time. Både til sædvanlige forelæsninger og til foredrag. Jeg opdagede noget ved et tilfælde sidste år hvor jeg underviste det første store geometrikursus vi giver i Århus, Geometri 1. Ved første forelæsning havde jeg skrevet nogle stikord ned om hvad jeg skulle fortælle dem som en indledning til kursusforløbet. De kendte selvfølgelig lidt til Euklidisk geometri fra skolen. Jeg begyndte at fortælle om Euklid og specielt om parallelaksiomet og om diskussionen af en mulige ikke-euklidisk geometri, som fandt sin foreløbige afslutning for 150 år siden. Det hele skulle bare have varet ca. $\frac{1}{2}$ time. Men efterhånden som jeg fik mig talt varm, begyndte jeg at fortælle om geometri for alvor. Hvordan man måler krumning ved skibsmasters variation som skibene sejler hen over fladen, om vinkelsum i en trekant, og så om denne fantastiske sætning af Gauss, som har haft en dominerende rolle i naturvidenskab lige siden sin opdagelse: Krumning er en indre egenskab ved en flade. Man kan finde ud af, om en flade krummer, udelukkende ved at måle

vinkler og længder i fladen. Det er en fuldstændig revolutionerende indsigt og utroligt overraskende. Teorema Egregium. På linie med Pythagoras og sammenhængen mellem integration og differentiation. Newton og Leibniz. Der blev så stille i lokalet (med 90 deltagere) at man kunne have hørt en knappenål falde til jorden. Jeg forsøger at gøre det til en vane at fortælle de gode historier. Om Galois, om Abel, og hvorfor han har givet navn til et så simpelt fænomen som abelske grupper. Om Riemann og hans løsning af det filosofiske problem om hvad 'rum' er for noget; hans løsning er det vi kalder en Riemannsk mangfoldighed nu til dags. Om Kummer, Bernoullital og Fermats sidste sætning. Hvor kommer ordet ideal fra osv. Der er nok at tage fat på. Det er den kanoniserede historie jeg prøver at fortælle, ikke den faktiske historie, som jeg sjældent kender.

MR: Kan du lide at undervise?

IM: Jeg er glad for den del af mit job også. Det tager selvfølgelig nogen tid, og jeg arbejder frygteligt mange timer hver dag. Jeg er her på instituttet fra kl. 8 til kl. 18 hver dag; tidligere endda til kl. 19. Men det kan jeg fysisk ikke holde til mere. Det er hvad det kræver, når man skal finde nogle nye ideer. Man skal arbejde hårdt. Jeg ved ikke hvorfor ens hjerne er indrettet sådan, at man absolut skal ud i tovene for at finde på noget nyt. Men det skal man åbenbart.

MR: Du har haft mange PhD-studerende.

IM: Ja, efter danske forhold er det vel rigtigt. Og det har jeg været mægtig glad for. Det er fantastisk at se unge mennesker udvikle sig, og som jeg sagde før, så lærer jeg en masse af dem. Både konkret matematisk men også af deres entusiasme. Vores største problem i dagens danske universitetsverden er, at der er for få forskningsstudenter.

MR: Er der en vigende interesse for naturvidenskabelige fag? Har vi for få studerende i matematik?

IM: Procentvis af en ungdomsårgang har vi ca. samme antal studenter i naturvidenskab som vi altid har haft. Men det er ikke nok. Vi har for få. Og vi får heller ikke mere de to bedste fra hver gymnasieklasse, som vi i stor udstrækning havde det i 60'erne. Det er det samme over hele den vestlige verden. Men matematik er et specielt fag. Vi får stadigvæk utroligt gode studenter på de danske universiteter; studenter som brænder for faget. Det er rigtigt at de studenter vi modtager kan lidt mindre fra gymnasiet end de kunne for 40 år siden, men det er blot et omstillingsproblem. De enkelte kurser skal indrettes derefter. Det er ikke noget at klage sig over.

Og faktisk er matematikstudiet alt i alt vist blevet sværere nu end da jeg startede. De studerende har flere undervisningstimer end tidligere - op til 25 skematimer på de første år - og det synes jeg er lige i overkanten, for nu at sige det mildt. Der er ikke levnet megen tid til at tænke eller til at være ung med alt hvad det nu indebærer. Datalogi har i mange år været meget populært, og det har kunne mærkes i matematik. Det er til en vis grad de samme studenter vi konkurrerer om i datalogi og matematik. Men tingene forandrer sig, og vi vil igen blive et populært fag.

MR: Et andet spørgsmål: Når undervisningen begynder, så får man de studerende til at modtage og i bedste tilfælde til at bearbejde det modtagne. På et eller andet tidspunkt skal det jo gerne blive selvstændige folk, som begynder at gå i gang med egne formodninger, egne ideer osv. Er vi gode nok til at sætte dem i gang?

IM: Matematik er et vanskeligt fag og der er meget at lære før man selv kan udfolde sin kreativitet. Det kan være en vanskelig overgang at gå fra den megen undervisning på første del af studiet til den mere selvstændige 2.del eller endnu mere udpræget på PhD-studiet. Det obligatoriske bachelorprojekt kan hjælpe. Og specialet hjælper på det problem. Jeg er ikke tilhænger af såkaldt projektorienteret undervisning på de første år, som det har været praktiseret i Roskilde eller Aalborg. Eller snarere, jeg er ikke tilhænger af, at vi indfører det i Århus. Vi skal ikke alle sammen være ens. Konkurrence og forskelligheder skal vi være glade for. Værne om.

MR: Kan du uddybe det med forskelligheder?

IM: I Danmark skal alt helst være ens og middeelvej er et plusord i dagens debat. Men jeg synes ikke at alle universiteter i landet nødvendigvis skal have præcist samme forhold. Det ville tjene

både uddannelse og forskning, hvis universiteterne havde lidt forskellige opgaver, som man kender det fra andre lande, USA for eksempel. Det er ikke sikkert at den bedste organisation er at alle universiteter skal tage sig af både masseuddannelse og forskeruddannelse i fuldstændig samme indbyrdes forhold. Lad mig give et eksempel: Jeg er meget stolt over at have været med til at indføre 4+4 ordningen for PhD-uddannelserne i Århus. Jeg husker den ophidsede debat der var i den anledning, specielt med vores kolleger i København. ('FUP eller FAKTA' debatten). Men hvad skulle der dog være i vejen for at have forskellige ordninger? Og det blev det da heldigvis også til.

Internationalt arbejde - ledelsesarbejde

MR: Du har brugt en del tid på internationalt arbejde. Vil du fortælle lidt om det?

IM: Jeg har som mange andre brugt en hel del tid på bedømmelsesarbejde. Både som medlem af diverse bedømmelseskomiteer og ved at skrive breve til amerikanske chairmen og deans om ansættelse og forfremmelser. Og så har jeg naturligvis også jævnligt fungeret som referee. Men langt det mest omfattende arbejde er den 12 års periode hvor jeg var redaktør på Acta Mathematica. Det er et stort arbejde og et arbejde hvor man ikke ligefrem scorer venner. På Acta kan man antage ca. 15% af de arbejder, som bliver sendt til tidsskriftet. De 85% som får et 'desværre' tilbage bliver ikke glade og nogle gange alvorligt sure. Men alt i alt fik jeg nu en positiv oplevelse ud af det. På grund af mine mange rejser til USA havde jeg mistet kontakten til skandinavisk matematik. Det var rart at lære Hörmander og Carleson og alle de andre skandinaviske matematikere at kende igennem arbejdet på Acta, og jeg kunne godt lide at komme på Mittag-Leffler instituttet i Stockholm, hvor alle redaktionsmøder foregår. Det er et meget smukt hus.

Jeg var formand for 'Topology Panel' som udvalgte talere til ICM 2002. Det har alt sammen taget tid, men det er et nødvendigt arbejde. De har også været flinke i Århus til at give mig lidt undervisningsmæssig kompensation i de perioder, hvor jeg havde særligt meget af den slags arbejde.

MR: Hvad kan du fortælle om ledelsesarbejde på Aarhus Universitet og på det nationale plan?

IM: På Aarhus Universitet har jeg været med til en del ledelsesarbejde. Jeg var medlem af fakultetsrådet i mange år, jeg har været leder af afdelingen for 'teoretisk' matematik, har bestyret diverse rammebevillinger, og jeg har i ca. tyve år været formand for vores forskningsudvalg, som står for forslag til stillingsopslag, bedømmelsesudvalg osv. Men det jeg er mest stolt over er, at jeg var med til at indføre 4+4 ordningen. Den har været en rigtig succes. I øjeblikket er jeg medlem af fakultetets centrale forskningsudvalg. På det nationale plan har jeg ikke gjort ret meget. Jeg er godt nok formand for nationalkomiteen for matematik, vores kontakt til IMU, men det er ikke ret meget arbejde. Gert Kjærgaard er sekretær, og det er et større arbejde. Der er vist ingen der rigtig ønsker at nationalkomiteen skal spille en mere fremtrædende rolle i Danmark end den gør nu, og det er ok. Og så har jeg i to omgange været aktiv i ansøgninger til Grundforskningsfonden.

Grundforskningsfonden

MR: Hvordan oplevede du ansøgningsrunderne til Grundforskningsfonden?

IM: Det er den største fiasko jeg har været indblandet i, en meget tidsrøvende fiasko og ikke mindst en meget ubehagelig oplevelse. Jeg synes ikke at dansk matematik er blevet behandlet helt efter fortjeneste af Grundforskningsfonden. Ved en international bedømmelse tror jeg, at dansk matematik ville klare sig rigtig flot i sammenligning med andre danske fagområder. Men vi har kun en ubetydelig del af danske fondsmidler.

Det tager enormt lang tid at skrive en ansøgning til Grundforskningsfonden. Jeg tror at jeg brugte en måned begge gange. Første gang foretrak man datalogi, selvom de i forvejen var godt aflagt med fondsmidler. I anden omgang, for godt fem år siden, begyndte det hele med et møde på hotel Legoland, som Johan P. Hansen havde indkaldt. Der var repræsentanter fra alle danske matematiske institutter. Jeg talte varmt for at vi burde forsøge at få et større dansk center for

matematik. Det fik en noget blandet modtagelse, og det var i hvert fald klart, at DTU nødtigt ville være med. Ideen var at centeret skulle starte i Århus og efter fem år flytte til København. Ole Barndorff skulle være leder i den første periode.

MR: Men det blev ikke til noget.

IM: Nej, hele initiativet brød sammen i skænderier og mistro. E-mails begyndte at flyde rundt, og før man får set sig om, har folk sagt for meget til at initiativet kunne reddes. Så det endte med to konkurrerende skitseansøgninger. En fra København og en fra Århus. Grundforskningsfonden ville ikke bestemme sig for hvilket forslag de ville fremme. Derfor blev begge initiativer bedt om at udarbejde et detaljeret forslag. Dermed blev dansk matematik delt i to næsten lige store lejre. To nært beslægtede områder som topologi og operatoralgebra havnede i hver sin lejr. Men det værste var, at det ligesom lå i luften, at enhver matematiker i kongeriget skulle vælge, ja sværge troskabsed til det ene eller det andet initiativ.

De internationale bedømmere må have undret sig såre. De skulle vælge mellem de to ansøgninger. Nogle få som f.eks. Borel nægtede at være med til det. Andre gjorde det, men sikkert med noget ubehag. Da bedømmelserne kom i hus mente Øst at centeret ville gå til dem, men grundforskningsfonden valgte Vest. Måske fordi de i realiteten allerede havde bestemt sig for Ole Barndorff som leder. Jeg ved det ikke. Og så brød uvejret løs endnu engang, bl.a. med meget ubehagelige beskyldninger mod Barndorff. Men MaPhySto blev dannet med ham som leder, og jeg trak mig ud af det hele, da geometri/topologi ikke indgik i MaPhySto.

MR: Mener du at centeret har været en succes?

IM: Teoretisk matematik i Århus, Odense og København har haft en vis glæde af det m.h.t. stillinger. Jeg ved ikke hvor godt det har virket i anvendt matematik. Men 25 mil. kr. er mange penge. Jeg tror at penge i den størrelsesorden kunne have ydet mere gavn, hvis de var blevet givet direkte til de eksisterende institutter. Jeg er ingen stor fan af centre i det hele taget.

Det matematiske miljø i Danmark

MR: Der er stadigvæk ikke meget samkvem mellem København og provinsen.

IM: Nej, det har du ret i. Jeg håber at hele centersagen vil føre til at vi som kollektiv indser, at det ville gavne os alle sammen at holde mere sammen - ligesom det synes at være tilfældet i f.eks. dansk fysik.

MR: Hvem kunne tage initiativer i den retning? Dansk Matematisk Forening?

IM: Ja, måske. I har lavet et godt blad. Min norske kollega Nils Baas blev meget imponeret, da jeg viste ham det i forbindelse med en boganmeldelse vi skrev sammen for et par numre siden. De årlige møder var også en rigtig god ide, men det er svært at holde det initiativ kørende igennem mange år. Det, der vel først og fremmest trænger til, er at vi er sammen i festlig lag en gang imellem, eller endnu bedre at vi har et fagligt samarbejde. Jeg håber at næste generation kan gøre det meget bedre end min egen har formået.

Udviklingstendenser

MR: Nu vil jeg gerne spørge dig lidt om de tendenser du ser i faget matematik i det hele taget, både den interne udvikling, forbindelser til andre fag, og hvad vi kan gøre for at præsentere faget til dem der ikke er direkte involveret. . .

IM: Det var en ordentlig mundfuld, men jeg skal prøve at svare så godt jeg kan. Generelt kan man vist sige, at matematik er inde i en 'integrationsperiode', hvor man skal være bredt orienteret for at kunne yde forskning som opfattes som interessant på verdensplan. Inden for mit eget område har der været et nybrud i forholdet mellem teoretisk højenergifysik på den ene side og geometri/topologi på den anden side. Kvantiseringsideer spiller en stadig større rolle i forskellige matematiske discipliner. Jeg ved ikke om der kommer god fysik ud af det, men den nye relation mellem fysik og matematik har i hvert fald været godt for matematik. Det amerikanske NSF, som svarer til vores eget SNF, er i færd med at opgradere matematik. Væsentlig større midler stilles til

rådighed for matematik - al slags matematik - end tidligere. Matematisk uddannelse var et betydeligt tema i den sidste amerikanske præsidentvalgkamp, og der er politisk opbakning til at forbedre matematikuddannelserne fra skolestart til PhD-studiet i f. eks. Kalifornien. Flere af mine amerikanske kolleger har deltaget i arbejdet på at skrive et nyt 'framework' for matematikuddannelserne i Kalifornien.

Universitetsmatematikeres 'formidling' af forskning sker først og fremmest i uddannelsen af vores studenter, men der kan naturligvis også skabes 'reklame' for faget igennem populærvidenskabelige publikationer. Det sidste har jeg dog aldrig deltaget i. En ordentlig presstjeneste på universiteterne ville også hjælpe.

MR: Hvordan ser du på rekruttering til matematik i fremtiden?

IM: Den slags ting går op og ned. Det afhænger af den generelle politiske debat i samfundet, og her kunne danske politikere godt gøre mere. Jeg kan ikke lade være med at minde, om hvad den store amerikanske fysiker Richard Feynman engang sagde i et halvpolitisk forum: 'Uddannelse skaber ulighed'. Og rigtigt er det, at videnskab er elitær, omend ikke i den forstand, at det spiller nogen rolle hvilken socialgruppe man er født ind i. Men det elitære passer jo ikke så godt med dansk politisk selvforståelse.

Matematik er mærkeligt nok ikke populært blandt den kvindelige ungdom. Der har vi en potentiel rekrutteringsreserve. Der er mange flere kvindelige topmatematikere i Sydeuropa og i USA end i Danmark. Det er noget af en international 'trend' at få flere kvinder til faget. Vi halter bagefter i Danmark på det område. Og de få kvindelige forskningsmatematikere vi har bliver politisk misbrugt på det skammeligste. Der drives politisk rovdrift på dem. For eksempel er matematiks to repræsentanter i SNF Bodil Branner og Eva Vedel. De er begge gode forskere som skulle være rollemodeller for kvindelige studenter og uddanne så mange kvindelige PhDere som de overhovedet kunne overkomme i stedet for at sidde i SNF, hvor frihedsgraderne alligevel er begrænsede. Spild af deres arbejdskraft. Den politiske rovdrift på kvinder i videnskab er uanstændig.

Økonomi og styring

MR: Hvordan synes du dansk matematik er stillet økonomisk?

IM: Ikke efter fortjeneste, når man ser på dens internationale placering. Vi er efter min bedste mening blevet forfordelt af såvel Grundforskningsfonden som af SNF. Det er mere generelt teoretiske fags vanskeligheder under den herskende samfundsideoologi. De naturvidenskabelige fakulteter er i økonomiske vanskeligheder. Men som jeg ser det er det egentlig nok så meget på grund af dårlig styring af universiteterne end fordi der er egentlig pengemangel. Med dårlig styring mener jeg både den interne styring og den eksterne politiske styring.

MR: Vil du uddybe det?

IM: Der er for mange særbevillinger, centre og lignende. Naturvidenskabeligt Fakultet i Århus har et årligt budget på ca. 600 mil. kr. Man skulle synes, det var nok, i forhold til det antal studenter vi uddanner og den forskning vi bedriver. Men problemet er, at en meget stor del af pengene kommer som særbevillinger. De mange centre, vi har i Århus, løber kun i kort tid. De mange penge, der er bundet op i dem, kan i vid udstrækning kun anvendes kortsigtet. En af grundene til den dårlige økonomi for vores fakultet er utvivlsomt at de 20% overhead, som følger med bevillingerne, ikke dækker de reelle omkostninger. Hvis politikerne kunne bekvemme sig til at give en større del af pengene som basisbevillinger, så ville meget se bedre ud. Det ville skabe den nødvendige fleksibilitet til at foretage langsigtede investeringer. Men det kræver en ordentlig intern styring, og det tror politikerne ikke på, at vi har. Langt hen ad vejen er jeg enig i at vores interne styring har været for dårlig i de forløbne 30 år.

MR: Hvem er skyld i den dårlige styring efter din mening?

IM: Vi er alle skyldige. Årsagerne kan man søge tilbage i 68 og den efterfølgende periode med umulige styrelseslove. Man kan altid skyde skylden på andre, men vi har på universiteterne heller

ikke sørget for at vælge de bedste iblandt os til ledere. Det gælder på alle niveauer i universitetssystemet. I 70erne var den store del af de universitetsansatte for unge til at påtage sig det ansvar og til at forstå hvad det betød. Vi var for politisk letantændelige - mig selv indbegrebet. Det er måske en del af forklaringen på den triste tilstand, vi er havnet i, hvor det politiske system har mistet tiltroen til os.

Nu må vi se hvad der kommer ud af de nye forslag til ledelse, som forskningsministeriet og universiteterne arbejder med netop nu. Jeg er tilhænger af at rektorer og dekaner ansættes efter eksterne opslag, og jeg har heller ikke noget imod at der kommer en bestyrelse på universiteterne, en slags 'board of trustees'. Om et sådant system vil virke afhænger af hvilke personer der kommer ind i bestyrelsen, ikke af juridiske spidsfindigheder om hvordan magtforholdene ser ud på papiret.

Matematik på pension?

MR: Hvad skal der til for at få 'pukkelproblemet' løst, med de mange forskere, som snart skal på pension?

IM: Først og fremmest skal vi uddanne nogle flere PhD-studerende. Og tiden er knap. Om 10 år er halvdelen af den eksisterende VIP stab i Århus blevet pensioneret, og det er vist nogenlunde det samme i København, både på KU og på DTU. Samtidig er den internationale konkurrence om gode medarbejdere skærpet, således at en del af vores bedste unge vil blive tilbudt permanent ansættelse i udlandet. Mange vil tage imod tilbudet. Situationen er meget alvorlig.

MR: Det eneste positive er, at det bliver meget nemmere at få stillinger på universitetet igen. . .

IM: Det er der ingen tvivl om. Hvis man tænker på fagets velbefindende i international sammenhæng, så er det flot nu. Det kan vi bl.a. takke Bundgaards organisatoriske talent for. Sputnik og en fremsigtet politik i 60erne og i begyndelsen af 70erne har også sin del af æren for dansk matematiks fornemme internationale position i dag. Der skal noget af et mirakel til for at holde den placering i fremtiden. Gymnasieskolen er i en tilsvarende situation, som det er dokumenteret i de to Kamelrapporter.

MR: Nu kommer ulven faktisk. . .

IM: Ja!

Private interesser

MR: Vil du til sidst fortælle mig om hvad du interesserer dig for, når du ikke beskæftiger dig med matematik? Jeg ved at du er musikinteresseret...

IM: Jo, der var engang jeg kunne spille lidt jazz på klaver. Men der skal man jo også øve sig. Når min søn Thor er i Danmark, så tager han Ulla og mig til noget musik i Danmark. Og når vi er i New York for at besøge ham, så tager han os ud til musiksteder i New York. Min ældste søn Bo er også musikinteresseret. De giver os gode plader til jul og fødselsdage, de former vores musiksmag og holder os til det nye, der foregår i musikken. Jeg sætter stor pris på det, men der bliver jeg virkelig ført ved hånden.

Desværre får vi ikke set vores børn, svigerdøtre og børnebørn så meget som vi ville og skulle, da de jo bor i København og New York – ikke ligefremt i nærheden!

MR: Var der andre ting du vil fortælle? Der er ganske vist ikke ret mange timer tilbage til fritid, kan jeg regne ud. . .

IM: Du har ret i, at der ikke er ret mange timer tilbage. Hvad jeg ellers beskæftiger mig med? Tja.... Nej, det er en hemmelighed.

