mat

MATILDE

NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING
NR 55 FEBRUAR 2020

Et vigtigt år for kvinder i matematik

Steen Thorbjørnsen
steenth@math.au.dk
DMF Formand
Institut for Matematiske Fag Århus Universitet

Året 2019 har i flere henseender været skelsættende for kvinders roller og muligheder i dansk og international matematik.

Først og fremmest er det naturligt at fremhæve, at årets Abelpris for første gang i prisens 16-årige historie gik til en kvinde: Karen Uhlenbeck. Jeg havde selv fornøjelsen af at repræsentere DMF ved prisuddelingen i Oslo i maj, og her var der, ikke mindst fra mediernes side, stor fokus på Uhlenbecks historie som succesfuld kvinde i en akademisk mandeverden og hendes mangeårige store engagement for at forbedre forholdene for kvindelige matematikere og matematikstuderende. Blandt andet stiftede Uhlenbeck således i 1993 sammen med Chuu-Lian Terng programmet "Women and Mathematics" ved Institute for Advanced Studies på Princeton universitetet i USA. Hos nogle af de lokale arrangører i Oslo, som jeg havde lejlighed til at tale med, fornemmede jeg ligefrem en bekymring for, at der blev sat for stor fokus på Uhlenbecks køn, i forhold til den fremragende matematik som hun alt andet lige fik prisen for. Man ville således nødig efterlade et indtryk af, at Uhlenbeck fik prisen (blandt andet) fordi hun er kvinde og ikke af rent videnskabelige grunde, som det givetvis var tilfældet. Dette er en generel problemstilling i forbindelse med tiltag, der kan facilitere kvinders karrieremuligheder: At undgå at det kommer til at hedde sig, at kvinder i ligestillingens navn bliver ansat eller forfremmet, fordi de er kvinder og i mindre grad på grundlag af deres faglige kvaliteter.

Med Uhlenbecks Abelpris har Abelprisen bragt sig op på siden af Fields-medaljen hvad angår antallet af kvindelige modtagere. Eneste kvindelige modtager af Fields Medaljen er således (indtil videre) Maryam Mirzakhani, der modtog medaljen i 2014. Og netop Mirzakhanis imponerende karriere var udgangspunktet for den næste skelsættende begivenhed i 2019, nemlig indførelsen af en årlig international fejring af kvinder i matematik på hendes fødselsdag d. 12. maj. Ideen til denne fejring blev undfanget af Womens Committee of the Iranian Mathematical Society, og ideen blev sidenhen fulgt op og støttet af en lang række matematikorganisationer verden over. Således også af DMF der inviterede samtlige kvindelige matematikere på danske universiteter til middag d. 9. maj på restaurant La Rocca i København. Ved middagen deltog 14 kvindelige matematikere fra hele landet, og jeg har ladet mig fortælle, at aftenen forløb i en god og positiv stemning, og at der var opbakning til at etablere en årligt tilbagevendende tradition i dansk matematik.

Den sidste store begivenhed i 2019, jeg vil fremhæve, er i skrivende stund blevet offentliggjort for få dage siden: Nathalie Wahl fra Københavns Universitet har som den første kvindelige matematiker stået i spidsen for en succesfuld ansøgning til Danmarks Grundforskningsfond. Wahl og hendes kolleger har således modtaget en bevilling på 60.2 mio. kroner til forskning indenfor emner på grænsefladen mellem geometri og topologi. Et stort tillykke herfra!

Ovenstående begivenheder illustrerer, at der er sket store fremskridt for kvinders muligheder indenfor matematik siden Karen Uhlenbeck og lige-

Matilde – Nyhedsbrev for Dansk Matematisk Forening - medlem af European Mathematical Society
Nummer 55– februar 2020. Redaktion: Dorte Olesen, DTU, Poul Hjorth, DTU (ansvh.)
Adresse: MATILDE, Institut for Matematik,DTU, Bygning 303-B, 2800 Kgs. Lyngby
e-post: matilde@mathematics.dk, URL: www.matilde.mathematics.dk
Grafisk: Solidaritet, ISSN: 1399-5901, Matilde udkommer 2 gange om året.
Forsidefoto: Fra mødet "Women in Topology" på Københavns Universitet 2019, arrangeret af Professor Nathalie Wahl. Fra venstre: Safia Chettih, Luciana Bonatto, Marcy Roberston, Nathalie Wahl, Abigail Linton, Sophie Raynor. Foto: Lauren Bandklayder

sindedes studietid. Der er imidlertid stadig lang vej på de danske universiteter, såvel indenfor matematik som indenfor mange andre naturvidenskabelige og tekniske fag, hvis politikeres og rektorers hensigter om en mere ligelig kønsbalance skal indfries. I løbet af det seneste år har jeg selv deltaget i en række konferencer, workshops og paneldiskussioner, som alle kredsede omkring denne problemstilling: Hvordan kan vi opnå en mere ligelig kønsbalance på universiteterne og indenfor matematik i særdeleshed. Disse og mange andre tilsvarende arrangementer verden over vidner om stor bevågenhed omkring denne problemstilling ikke mindst fra politisk hold. Det er også min opfattelse, at der blandt de ansatte på universiteterne er udbredt enighed om, at en forbedret kønsbalance på institutterne helt pragmatisk vil gavne både 1 arbejdsmiljø, dynamik og "produktivitet". Der er dog næppe udstrakt enighed om, hvor stort problemet er, og hvor langt man skal gå for at løse det. I løbet af foråret vakte det stor mediebevågenhed, at man på et teknisk universitet i Holland havde besluttet at opslå videnskabelige stillinger, som kun kunne søges af kvinder. Den ide blev straks skudt ned af danske politikere og universitetsfolk. I den modsatte ende af spektret udtalte daværende præsident for et af verdens førende universiteter, Harvard, så sent som i 2005, at en primær grund til de relativt få kvinder i den videnskabelige verden er kvinders manglende vilje til at ofre de 80 timer om ugen, som det kræver, hvis man vil skabe sig en akademisk karriere. Præsidenten mente desuden at vide, at kvinder fra naturens side er mindre disponeret for logisk og matematisk tænkning end hans eget køn. Jeg vil overlade det til læserne selv at forholde sig til disse synspunkter, ligesom jeg ikke kender præsidentens motiver for dem. Jeg føler mig dog overbevist om, at det næppe er befordrende for yngre kvinders motivation til at påbegynde en akademisk karriere, at de forlods bliver stillet en 80-timers arbejdsuge i udsigt. Det samme gælder formentlig yngre mænd på tærsklen til en akademisk karriere, men for mange kvinder udgør det biologiske urs præindstillede alarm for familiestiftelse givetvis en skærpende omstændighed. Og så fremstår de trygge, sikre og vellønnede forhold, man som yngre talentfuld kvinde (eller mand) kan blive tilbudt i erhvervslivet, sikkert yderligere attraktivt. I erhvervslivet vil disse nyuddannede kvinder givetvis også gøre stor gavn, ikke mindst fra et samfundsøkonomisk synspunkt, men tendensen er et problem for universiteternes erklærede mål om at forbedre kønsbalancen. Hvis man vil kunne ansætte flere kvinder på universiteterne, kræver det blandt andet et bredere kvindeligt rekrutteringsgrundlag, som naturligvis forudsætter, at flere kvinder får mod på at kaste sig ud i Ph.D-studier og post-doc forløb. Universiteterne bør derfor overveje at sætte ind med tiltag, der kan medvirke til at gøre det mere attraktivt for unge kvinder at påbegynde en akademisk karriere, også hvis de sideløbende ønsker at stifte familie. Det blev ved flere af de før omtalte arrangementer fremført, at de mere eller mindre påkrævede udlandsophold i starten af en akademisk karriere bliver betragtet som en stor barriere af mange kvinder, og udlandsopholdene er blot et eksempel på konkrete områder, hvor universiteterne (og forskningsråd m.m.) formentlig kunne medvirke til at afhjælpe bekymringerne med mindre rigide krav og muligheder for økonomisk støtte.

Debatten om, hvordan man får flere kvinder ansat på universiteterne, har stået på i mange år, hvilket vidner om, at problemstillingen er meget vanskelig at løse, bl.a. fordi den er udfordret af mange års (ubevidst) indgroet kultur i forskningsmiljøerne og i samfundet som helhed. Jeg skal således også vare mig for at komme med forkromede løsningsforslag i disse spalter, men blot konstatere at DMF velvilligt vil forsøge at bidrage positivt til det lange og seje træk, som det givetvis vil kræve at opnå en mere ligelig kønsbalance på landets matematik institutter. Vi arbejder således så småt på at invitere Karen Uhlenbeck til at holde et foredrag i foreningen i 2020, og meget gerne i maj så det kan ses i sammenhæng med næste års fejring af Maryam Mirzakhanis alt for korte men yderst imponerende liv.

Indhold:

Formandens Klumme 2

Årsmødet 2018 på Århus Universitet 4

Årsmødet 2018 på Århus Universitet 4

Årsmødet 2019 6

GT2018 8

I want to be a mathematician
Interview med fire matematikere 10

Dorte Olsen
Mindeord om Richard V. Kadison 25

Spillet, der blev den helt store dille 30

Christian Berg:
Riemanns Zeta funktion 31

Årsmødet 2018 på Århus Universitet - Tema: Matematisk Biologi

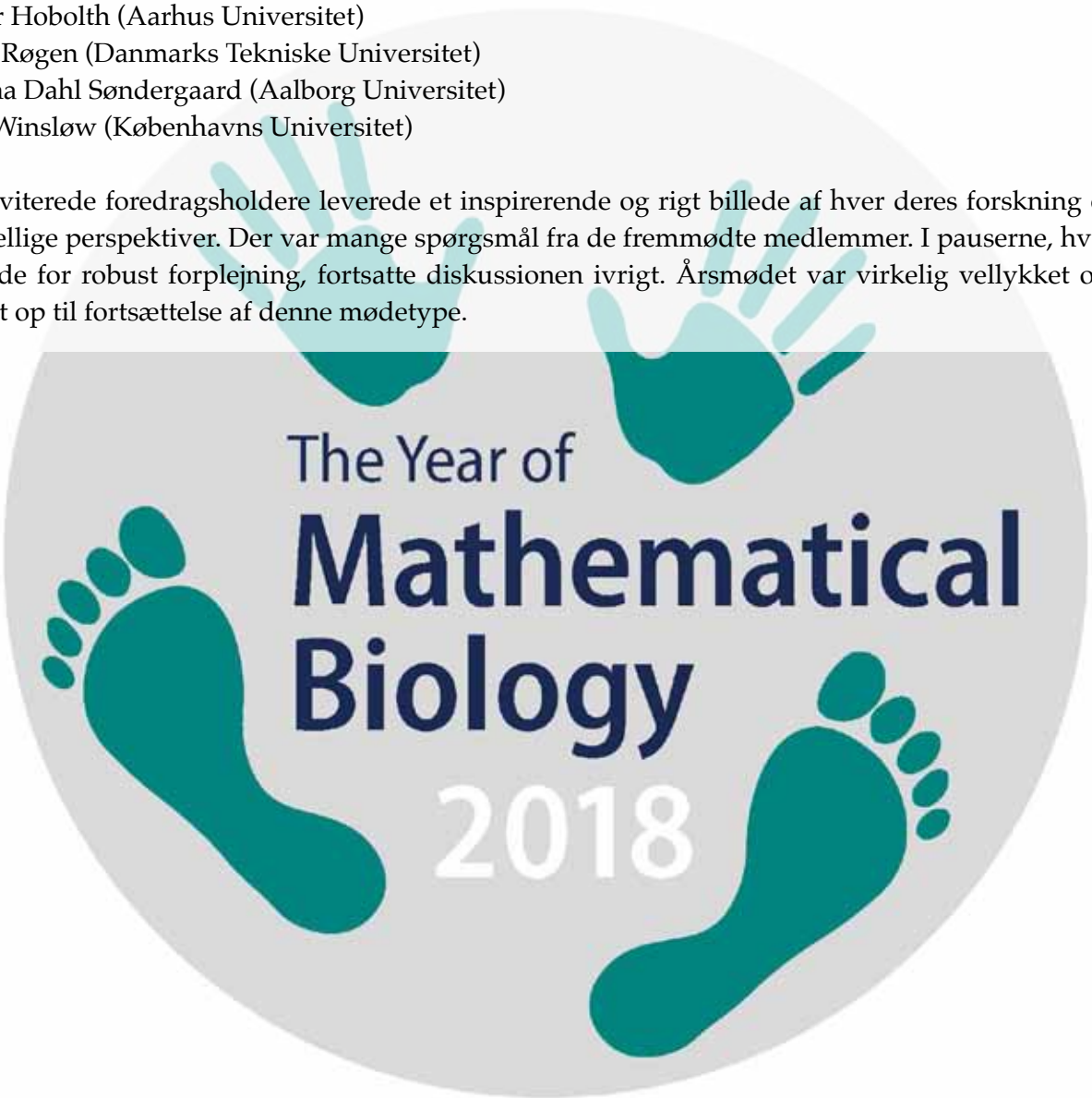
Note: Denne beretning kommer en del forsinket ud i Matilde, idet Matildes udsendte medarbejder umiddelbart efter sin hjemkomst fra årsmødet var ude for en ret voldsom ulykke der i nogen tid satte en stopper for hans skriverier.

Årsmødet i den meget varme og tørre sommer 2018 blev afholdt den 25. og 26. juni i Auditorium F på Aarhus Universitet, Institut for Matematiske Fag. Dansk Matematisk Forening ville med årsmødet dels genstarte traditionen med at invitere samtlige medlemmer af foreningen til et møde, dels indføre tematiske møder. Og da 2018 af den europæiske matematikerforening EMS var erklæret "Year of Mathematical Biology" var det oplagt at vælge biologisk matematik / matematisk biologi som tema. Danmark er godt fremme internationalt i dette forskningsfelt, der har kontaktflader både til naturvidenskaber og til matematik.

De inviterede foredragsholdere var:

Michael Reed (Hovedtaler, Duke University, USA)
Morten Andersen (Roskilde Universitet)
Bodil Bruun (Fagkonsulent for STX)
Elisenda Feliu (Københavns Universitet)
Asger Hobolth (Aarhus Universitet)
Peter Røgen (Danmarks Tekniske Universitet)
Bettina Dahl Søndergaard (Aalborg Universitet)
Carl Winsløw (Københavns Universitet)

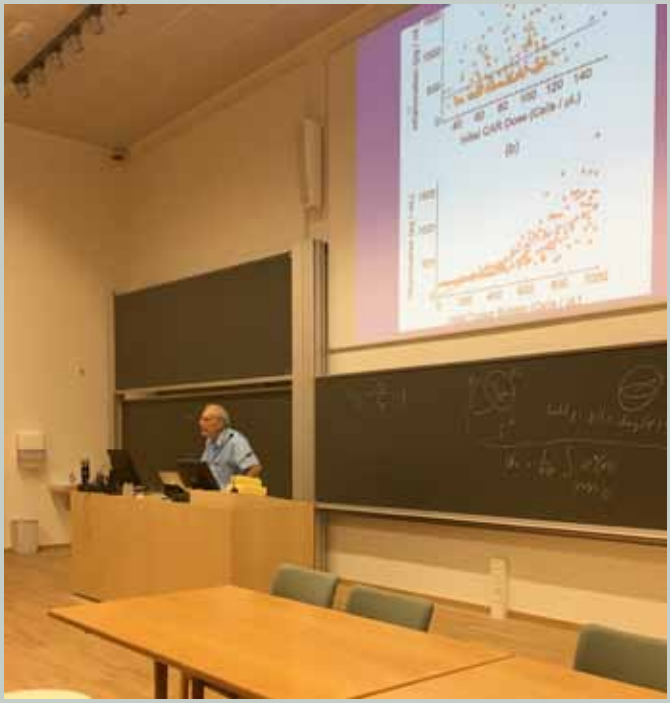
De inviterede foredragsholdere leverede et inspirerende og rigt billede af hver deres forskning og dens forskellige perspektiver. Der var mange spørgsmål fra de fremmødte medlemmer. I pauserne, hvor DMF sørgede for robust forplejning, fortsatte diskussionen ivrigt. Årsmødet var virkelig vellykket og lagde stærkt op til fortsættelse af denne mødetype.



DMF's formand, Steen Thorbjørnsen Indleder

Elisenda Feliu

Peter Røgen



Michael Reed

Fra pauserne: I forgrunden Christian Henriksen (DTU), medlem af DMFs bestyrelse.

DMF's årsmøde i 2019 blev afholdt i fællesskab med Dansk Selskab for Teoretisk Statistik og Dansk Selskab for Biostatistik under det overordnede tema: DATA SCIENCE

Nærmere information om arrangementet:

Scientific Committee:
Kim Emil Andersen (Vestas)
Mikkel Meyer Andersen (AAU)
Corine Baayen (Lundbeck)
Asger Hobolt (AU)
Jonas Peters (KU)

Local Organizers:
Bjarne Kjær Ersbøll (DTU)
Christian Henriksen (DTU)

Speakers:
Arnoldo Frigessi (Oslo) - keynote
Lars Arvastson (Lundbeck)
Niels Væver Hartvig (Novo Nordisk)
Søren Hauberg (DTU)
Jens Ledet Jensen (AU)
Line Kuehnel (KU)
Troels Marstrand (Wind Power LAB)
Helle Rootzen (DTU)

Venue: Glassalen DTU

Program (order of speakers is tentative)

Tuesday November 19

14:30-14:35	Welcome
14:35-15:35	Arnoldi Frigessi - TBA
15:35-15:45	Coffee break
15:45-16:30	Niels Væver Hartvig - TBA
16:30-17:00	Coffee break
17:00-17:45	Troels Marstrand - TBA
17:45-18:30	Line Kuehnel - TBA
19:45-	Dinner in Lyngby

Wednesday November 20

09:00-09:45	Lars Arvastson - TBA
09:45-10:15	Jens Ledet Jensen - TBA
10:15-10:45	Coffee break
10:45-11:30	Søren Hauberg - TBA
11:30-12:15	Helle Rootzen - TBA
12:15-	Closing remarks and sandwiches to-go

Fælles årsmøde mellem DMF og to statistiske foreninger den 18.-19.11.2019 på DTU.

I år prøvede Dansk Matematisk Forening (DMF) et nyt koncept for sit årsmøde – nemlig at holde det sammen med Dansk Selskab for Teoretisk Statistik (DSTS) og Dansk Selskab for Bio Statistik (DSBS).

Hovedtemaet var "Artificial Intelligence (AI) and Data Science with particular eye on how these topics interplay with mathematics and statistics" og ialt omfattede årsmødet 8 foredrag på engelsk.

Mødet fandt sted på DTU i Lyngby, i den såkaldte Glassal i hovedbygningen, som dannede en smuk ramme om det velbesøgte arrangement.

Foredragsholdere den 18. november om eftermiddagen var professor Arnold Frigessi fra Institutt for Biostatistik ved Universitetet i Oslo, Principal Data Scientist Niels Væver Hartvig fra Novo Nordisk, Chief Data Scientist Troels Marstrand fra WindPowerLAB og Københavns Universitet og Industriel Postdoc Line Kühnel, Københavns Universitet og Lundbeck.

Den 19. november om formiddagen var det så Lars Arvastson fra Lundbeck, professor Jens Ledet Jensen fra Aarhus Universitet, Lektor Søren Hauberg, DTU Compute og Professor Helle Rootzen fra DTU Compute.

Blandt de mange deltagere lagde man især mærke til en gruppe yngre statistikere, som også holdt en frokost før mødets start den 18. november – netop for yngre statistikere. Middagen fredag aften blev holdt på en indisk restaurant på Lyngby Hovedgade, hvor snakken gik livligt omkring de mange borde.

Lokale organisatorer var professor Bjarne Ersbøll og lektor Christian Henriksen fra DTU Compute.

Fra årsmødet på DTU. Fra venstre: Jessica Carter (SDU), Steen Thorbjørnsen (AU), Lars Døvling (AaU), Christian Henriksen (DTU).

GT2018 – en markering af næsten

Gennem næsten 30 år har grafteoretikere både fra matematik-siden og datalogi-siden arbejdet sammen på tværs af Danmark, med grupper i Aalborg, Odense, København og Lyngby.

Dette har med ujævne mellemrum manifesteret sig i nogle GT-konferencer, som hovedregel organiseret fra Odense og afholdt på Fyn.

Den seneste og muligvis sidste af disse konferencer blev afholdt den 29. august – 1. september 2018 på Hotel Sinatur Storebælt i Nyborg, og ved denne lejlighed markerede kollegaer også – ganske kort-at dansk grafteoris nestor Carsten Thomassen kort forinden var fyldt 70 år.

I mødet deltog 43 matematikere fra 11 lande (Danmark, Sverige, England, Holland, Tyskland, Frankrig, Tjekkiet, Ungarn, Japan, Sydafrika og New Zealand).

Mødet var samtidig en fejring af, at det gennem de allerseneste år er lykkedes at løse flere meget gamle åbne problemer i grafteori, herunder Wegner's formodning fra 1979 om en øvre grænse på 7 for det kromatiske tal for kvadratet af en kubisk plan graf, som blev besvaret positivt af Carsten Thomassen i 2018, ligesom Carsten løste Erdös og Hajnals formodning fra 1966 om at enhver graf med overtælleligt kromatisk tal har en subgraf med uendelig

30 års samarbejde i Grafteori på tværs af Danmark

Michael Stiebitz (Tyskland) og Lars Døvling Andersen. Stiebitz får på billedet overrakt "konference-klokken" af Lars. Stiebitz er den udefra kommende deltager som har deltaget i alle møder Klokken har været benyttet på de nordiske kombinatorik møder, og ved det 12. møde NORCOM2016 i Levi i Finland blev den overrakt til Lars Døvling Andersen af Patric Östergård som anerkendelse for at Lars har deltaget i alle NORCOM møder.

kant-konnektivitet.

Også flere andre danske eller dansk-baserede grafteoretikere har løst spændende problemer i de senere år, således har Jørgen Bang-Jensen sammen med Stéphane Bessy and Stéphan Thomasse løst en af Thomassens egne formodninger sammen med Bermond om digrafer, og Carsten Thomassens student Martin Merker har (uden hjælp fra sin vejleder) løst den såkaldte Barat-Thomassen formodning. I det hele taget er der i den internationale kreds omkring det danske grafteori samarbejde AlgoDisc fundet mange spændende resultater, som også blev belyst på GT2018.

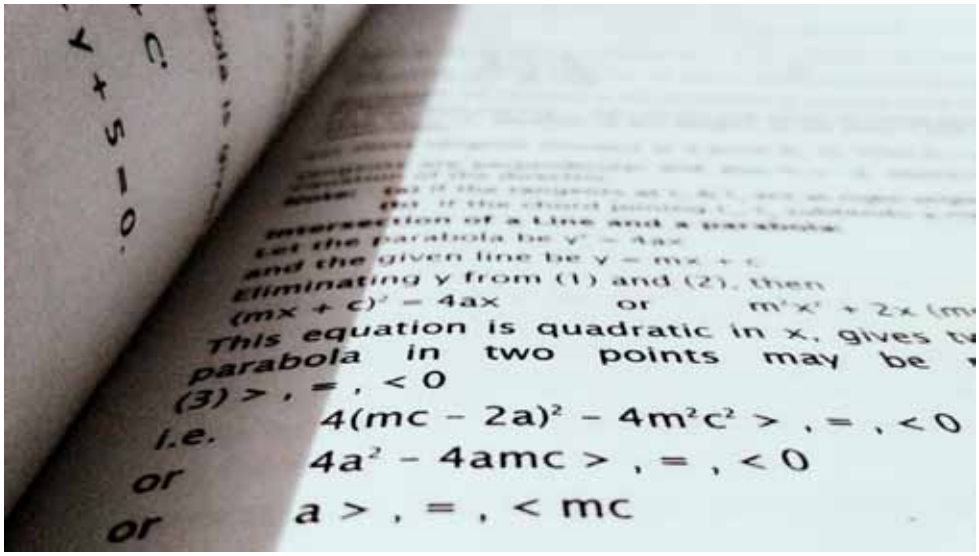
Carsten Thomassen i samtale med Jaroslav Nesetril (Tjekkiet)

I want to be a mathematician

Interview med fire matematikere:

Tobias Holck Colding (TC; MIT) – Elisenda Feliu (EF), Søren Galatius (SG) og Ib Madsen (IM; alle KU)

Interviewer: Martin Raussen (MR; AAU)



I want to be a mathematician *er titlen på den sidste film i serien: 10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger. Seriens film og øvrige materialer er frit tilgængelige fra websitet, som findes ved blot at google serien. Her ligger film med Susanne Ditlevsen, Steen Markvorsen, Lisbeth Fajstrup, Olav Geil, Peter Landrock, Henrik Kragh Sørensen, Jørgen Bang-Jensen, Jan Philip Solovej og Søren Eilers. Projektets målsætning er at stimulere dygtige gymnasieelever til at studere matematikholdige fag, og derfor har det været naturligt at afslutte serien med at sætte spot på det at være matematiker. Og at låne titlen fra Paul Halmos "Automathography".*

Den afsluttende film er baseret på samtaler som Martin Raussen har ført med Tobias Holck Colding, Elisenda Feliu, Søren Galatius og Ib Madsen. Denne artikel er en redigeret version af den samlede udskrift af disse samtaler. Udskrift og redigering er foretaget af Bjørn Grøn og Martin Raussen. Den endelige film vil kun rumme uddrag af samtalerne.

Hvor kommer interessen for matematik fra?

MR *Kan I huske, hvordan jeres interesse for matematik begyndte? Og siden hvordan det var at gå fra gymnasiet til universitetet*

EF Jeg har altid godt kunnet lide matematik, det var et fag jeg nød rigtig meget i skolen – men også de naturvidenskabelige fag, fysik, kemi og biologi. Det var lidt svært for mig at finde ud af, hvad jeg gerne ville læse på universitetet. Selv om jeg godt kunne lide matematik, var jeg også lidt bange for, at det matematiske studium var et kedeligt sted Men så mødte jeg en, der læste filosofi, og som gav udtryk for det vigtige i, at mennesket lærer at tænke. Jeg kunne se, at han var interesseret i at vide ting, bare for videns skyld. Og så tænkte jeg selv: Ok, jeg kan lide matematik, og jeg vil gerne vide mere – det var the tipping point i mit valg af matematik.

For mig var det virkelig, virkelig rart at starte på at læse matematik. Pludselig var jeg sammen med mange mennesker ligesom mig selv. Alle kunne lide matematik, vi kunne snakke om opgaverne. Det var også lidt hårdt, men samtidig var det en befrielse, pludselig var det ok at sige, at man elsker det vi gør nu. Det kunne man ikke i gymnasiet i Barcelona. Her var man cool, hvis man sagde, at man hader matematik. Det var altså rigtig, rigtig fint at starte på studiet.

IM Min interesse for matematik går langt tilbage. Allerede da jeg var i 12-14-årsalderen var jeg fuldstændig opsat på at blive professionel matematiker. Det havde til dels at gøre med, at min mor var meget, meget glad for matematik. Hun var hjemmegående husmor, som man jo var dengang, men havde hun levet i dag, ville hun garanteret have fået en naturvidenskabelig uddannelse. Hun gav mig for det første interessen for matematik, men hun gav mig også bøger – bøger, hvor man kunne løse opgaver, men også bøger som E.T. Bells *Men of Mathematics* (*Matematikkens mænd*). Og det fascinerede mig meget. Så jeg har altid været klar over, at jeg gerne ville være en professionel matematiker.

Men et af mine problemer var og er, at jeg er stærkt ordblind. Og i 1950'erne, i min skolegang, var det ikke noget der var anerkendt, så i den forstand var matematik også et (fri-)sted, hvor det ikke betød så meget, om man var ordblind eller ej. Så min skolegang var sådan, at jeg kun lige akkurat slap ind i det, der hed mellemskolen, og som var en overbygning på underskolen. Og det var også kun lige akkurat, jeg kom i gymnasiet fra mellemskolen. Da jeg så kom i gymnasiet, viste det sig meget hurtigt at jeg havde evner for matematik. Og så gik jeg fra at være regnet som en af de dårligste i mine hidtidige klasser til at være en af de bedste. Det var en noget mærkværdig oplevelse, må jeg sige. Og gymnasiet var virkeligt det sted, hvor jeg blomstrede op i intellektuel forstand. Så kommer man på universitetet, i København, og opdager, at ens medstuderende, de har jo også næsten alle været blandt de allerbedste i deres klasse, måske den allerbedste. Og man opdager også, at de måske er hurtigere, bedre til at løse opgaver, end man selv er. Den overgang var lidt af et chok. Og så den måde undervisningen foregår på: Der er forelæsninger i store grupper – men trods alt også nogle øvelser i mindre grupper, hvor man også får et socialt samvær. Men det er ikke let, overgangen fra gymnasiet til universitetet er ikke nogen let sag. Sådan er det I hvert fald for mange.

SG Jeg har også så langt tilbage, som jeg kan huske, været interesseret i matematik, og også i naturvidenskab. At det så lige bliver matematik, er nok lidt mere tilfældigt: Jeg har også interesseret mig for fysik og alt det går også tilbage til grundskolen.

Overgangen til universitetet var både positiv og et mindre chok. Som Ib siger, opdagelsen af, at man ikke længere altid var den bedste. Men samtidig var der også oplevelsen af, at matematikken blev mere interessant, det føltes som en helt ny verden, der åbnede sig. Set i bakspejlet vidste jeg egentlig slet ikke rigtig noget om, hvad et universitetsstudium indebærer og hvad matematikundervisningen faktisk går ud på. Jeg vil også sige, at det var en opblomstring rent fagligt at opdage, hvor stort et landskab, der åbnede sig dér.

TC Jeg var altid glad for matematik, faktisk fra børnehaven. Der var da også andre ting jeg var interesseret i, men matematik var der altid, så det var helt naturligt for mig at vælge det studium.

I ethvert studium og i al undervisning er der selvfølgelig nogle rammer, noget man skal. Men jeg har altid sat mig mine egne mål, I hvert fald i matematik. Også i gymnasiet og i de mindre klasser. Hvis man sætter sig sine egne mål, så bliver overgangen måske mindre i hvert nyt trin. Man justerer selvfølgelig målene undervejs, men hvis man bliver ved med at sætte sig sine egne mål, så kan man måske opnå, at overgangen ikke virker så stor.

At læse matematik

MR *Begyndelsen på et matematisk studium er ret standardiseret, faktisk over hele verden, men på et eller andet tidspunkt begynder man jo at specialisere sig, og man udvikler sin egen matematiske smag. Kan I fortælle om, hvordan det foregik hos jer?*

IM Jeg begyndte på matematik i København samme år den nye studieordning af 1960 blev indført. Helt nye kurser og nyt undervisningsmateriale. Forelæsningerne og øvelserne var til tider noget kaotiske som det vel ofte er tilfældet med en ny struktur. 1. del af studiet varede tre år og bestod af i alt seks kurser. Lidt specielt i forhold til de fleste steder i udlandet, havde vi et kursus i Lebesque integration på andetår og et kursus i operator algebra på tredje år. Men det hang nok sammen med, at matematisk analyse var det dominerende forskningsfelt i København. Dumpe procenten var enorm.

På 2. del specialiserede jeg mig i algebraisk topologi, et hot emne i international matematik men nyt i Danmark. Efter kandidateksamen tog jeg til Aarhus for at studere topologi hos Leif Kristensen. Han havde selv studeret topologi hos MacLane på University of Chicago, og var Danmarks eneste specialist inden for algebraisk topologi. En københavner forlader jo kun nødigt sin hjemby, og det var kun meningen, at jeg skulle tilbringe et år i Aarhus, men det gode sociale samvær i Aarhus, og det meget levende videnskabelige miljø gjorde, at det blev til 40 år vekslende med flere lange ophold i USA.

SG Det er rigtigt, som Martin siger, at der i dag er standardkurser i starten, som alle skal tage, fx lineær algebra. Men som det foregår nu i København - og de fleste andre steder, mener jeg - så er der nogen valgfrihed i forskellige fagprojekter. Og i Bachelorprojektet begynder man at vælge efter, hvad man har fundet interessant, og hvilke personer, man ønsker at arbejde med. Vil man fortsætte studiet af matematik, skal man skrive et speciale som en del af en kandidatgrad, og evt. starte på en ph.d.-uddannelse; og i den del af studiet specialiserer man sig virkelig.

EF Ja, det indledende matematikstudium er meget ens over hele verden. Jeg studerede jo i Barcelona, og de første år oplevede jeg matematik som todelt: Der var analyse, sandsynlighed og statistik, hvor man skulle have en ide, nu gør jeg dét, men hvorfor? Det ved man bare, at det skal man. Så var der andre fag som algebra og geometri, hvor det handler mere om struktur, om at opdage hvorledes objekter

har fælles strukturer. I de verdener kan man bevise noget om alle de enkelte objekters egenskaber, ved at vise det for en hel klasse af objekter på en gang. Det faldt i min smag. For mig personligt var det virkeligt sjovt at læse geometri og topologi. Lige fra starten brugte jeg ti gange mere tid på algebra og geometri, end på analyse. Analyse var bare noget der skulle bestås. Geometri og algebra var helt klart mine valg.

TC Da jeg startede på matematisk institut i København, var det helt store emne *operatoralgebra / C*-algebra*; det var derfor naturligt at begynde med det. Jeg kom til USA tidligt, inden jeg havde taget en afsluttende eksamen i Danmark, og tanken var egentlig at jeg skulle fortsætte med dette emne. Men på University of Philadelphia, hvor jeg kom til, var geometri et dominerende fag: Over halvdelen af professorerne var i geometri, det var et meget aktivt område. Derfor blev det naturligt for mig at skifte til det. Som udgangspunkt kunne jeg faktisk godt lide det hele, så derfor var springet fra noget jeg rigtig godt kunne lide - operatoralgebra – til geometri som var meget mere repræsenteret på mange universiteter i USA, naturligt for mig. Det virkede som om der var mere fremtid i det. Og det fik også en blivende interesse for mig.

Vejen til at blive forsker i matematik

MR *Søren, jeg vil godt følge op på det du sagde om at specialisere sig. Du har jo været i forskeruddannelse hos Ib, en form for mesterlære. Kan du fortælle om, hvordan det hele begyndte, hvordan bar I jer ad, og hvad har det ført med sig for jer begge to?*

SG Mit første møde med topologi var ikke med Ib. Jeg tog et første kursus hos Leif Kristensen, som Ib fortalte om. Mit andet kursus i topologi på højt niveau var med Ib, og det var så mit første møde med ham. Det var på mit 4. studieår, og det var i den periode, man skulle søge om et ph.d. Ib siger ganske vist, det var ham der valgte mig, og det har han sikkert ret i. Under alle omstændigheder skrev jeg i løbet af det 4. år i samarbejde med Ib en ansøgning til ph.d.-skolen. I den periode diskuterede vi mulige projekter. Det førte alt sammen til, at jeg blev optaget. Jeg begyndte i 2000 med Ib som vejleder, i et 4 årigt projekt, og jeg tog så min ph.d. i 2004.

MR *Og dette samarbejde har været det rygstød, som har ført dig videre i din karriere?*

SG Ja, helt sikkert. Efter at have fået min ph.d. søgte jeg en postdoc, der er en midlertidig stilling. Jeg søgte nogle stillinger i USA, fik to tilbud, og valgte det ene som var på Stanford, en stilling på 3 år. I starten arbejdede jeg videre med det, som havde været emnet for mit ph.d.-projekt, og som stadig fylder en stor del af mine arbejdsområder. Det normale er at man får sin postdoc et sted, og derefter skal man videre til et andet sted. Men de endte så med at beholde mig.

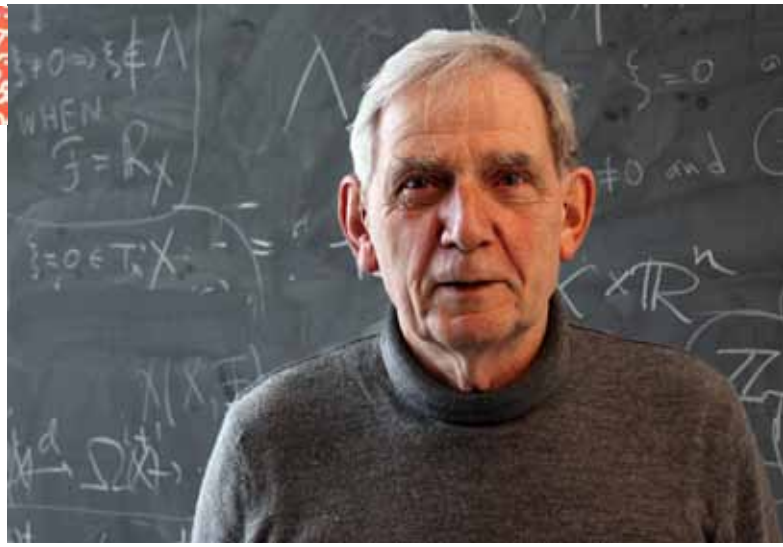
MR *Vil du tilføje noget om vejlederrollen, Ib?*

IM Det foregår normalt sådan som Søren fortalte, at man følger nogle kurser, man har hørt nogle af lærerne holde forelæsninger, og så går man hen og spørger en lærer: Vil du være min vejleder? Og her er det altså rigtig vigtigt, hvilken vejleder, man vælger. Det er det af flere grunde. Hvad er vejlederens rolle? For det første at finde et projekt, som studenten har en chance for at udføre. Men det projekt skal også være af en sådan natur, at det internationale matematikersamfund vil være interesseret i løsningen af de problemer, der bliver stillet. For det er den ph.d.-afhandling, den thesis, der afslutter ph.d. studiet, som skal gøre det muligt at få en forskerstilling, en postdoc på et andet universitet, fx på et universitet i USA, som Søren beskrev. Og hvordan vælger et amerikansk universitet de studenter, som de vil ansætte som postdoc? Det gør de i stor udstrækning på grundlag af det anbefalingsbrev, som vejlederen skriver. Derfor er det vigtigt, at den vejleder, man har, er godt placeret i det internationale forskningssamfund. Så lad mig gentage – det er vigtigt hvilken vejleder, man vælger.

***MR** Hvordan kom I andre i gang med forskerkarrieren?*

TC Da jeg studerede var der en russisk matematiker – han lever stadig – som var meget oppe i tiden, og jeg læste mange af hans arbejder. Det var ikke meget relateret til hvad de andre, hvad professorerne lavede i Philadelphia. På den måde var der en naturlig overgang for mig til at finde mine egne spørgsmål, som jeg interesserede mig for; fordi jeg beskæftigede mig med noget lidt andet end de andre gjorde. På en vis måde var jeg altså min egen vejleder.

EF Da jeg afsluttede bacheloruddannelsen, der i Barcelona var normeret til 4 år, syntes jeg ikke jeg var færdig med universitetslivet. Så jeg blev ph.d.-studerende, til dels for at kunne blive på universitetet. Jeg gik i gang med noget abstrakt matematik inden for geometri, og jeg skulle læse en masse bøger og artikler. Iblandt det var der jo noget man kunne se, der ikke var løst, og så kunne man selv prøve at gøre det. Senere faldt motivationen lidt – en matematik for min egen skyld, noget der er sjovt for mig – jeg manglede at lave noget, der var mere brugbart, her og nu og ikke om måske 30 år. Så skiftede jeg til anvendt matematik, matematik anvendt i biologi, og det er det jeg gør nu.



Ib Madsen

Jeg tog en kandidatuddannelse i bioinformatik for at se, om der er noget her, jeg kan lave, hvor min viden kan bruges. Jeg blev 4 år i Barcelona i den fase, indtil jeg fik et forskerstipendium, så jeg kunne rejse i 6 måneder. Så googlede jeg rundt: Hvor er der folk, der arbejder med sjove og interessante måder at bruge matematik på i biologi? Og der fandt jeg én i Århus, som jeg kontaktede, og han svarede: Bare kom! Jeg besøgte ham, det var spændende, og så endte det med at jeg blev i Danmark. Det var altså lidt tilfældigt at jeg ender her.

IM Det normale forløb nu til dags er som det er beskrevet, at man har ca. 6 år, 2x3 år, før man får en fast stilling. I hvert fald hvis det er universiteter og matematiske institutter, der forsøger at være i fronten af forskningen, så foregår det sådan. Det er jo en ret lang uddannelse: Det varer 8 år før man har sin ph.d. og så yderligere 6 år før man får en fast stilling. Det er lidt risikabelt og det er ikke altid så behageligt for familien eller for den enkelte person.

Det var lidt anderledes før. Da jeg var færdig

med at studere og fik min kandidateksamen fra Københavns universitet i 1965, var der ikke noget, der hed en forskeruddannelse, ikke noget ph.d.-system. Dengang var den eneste mulighed at få en ph.d.-grad at tage til udlandet. Det var naturligt med de kontakter, der var mellem danske matematikere og udenlandske, at det foregik i USA. Jeg kom i 1968 til Chicago. Nu var jeg på det tidspunkt lidt ældre end de fleste amerikanske studenter, så jeg fik en ph.d. efter to år – i 1970, fra University of Chicago. Jeg blev så ansat i 1 år som forsknings-postdoc, som de kaldte det. Da det år var gået, besluttede jeg mig til at tage tilbage til Danmark, da min ældste søn skulle begynde i skole. Jeg kom til Århus og var der i ca. 40 år, men jeg var i lange perioder tilbage i USA.

At undervise i matematik – og at formidle hvad matematik er

MR *Når man er ansat på et universitet, så er man både ansat som forsker og som underviser. Hvordan prøver I at gøre undervisningen som sådan interessant, både for jer selv, men også for jeres studerende?*

TC Jeg synes, der er mange også elementære ting, der kan være en fornøjelse at undervise i. Selvfølgelig er det sjovt at prøve at forklare andre noget. Men ud over det kan man se på ting, man kender vældig vældig godt med nye øjne og det kan blive rigtig sjovt og tilfredsstillende. Med meget elementære ting som Calculus, kan det måske være svært. Men det behøver ikke være så kompliceret, før der er noget interessant i det. Og jo mere man ved, jo flere paralleller kan man trække til mere avancerede og mere komplicerede forhold – som man måske kun ser som specialtilfælde i undervisningen. Det kan være vældig interessant, at prøve at forklare det på en enkelt måde til de studerende. Den slags paralleller synes de studerende faktisk er interessant – naturligvis især de gode studerende! Og man kan jo sagtens forklare rigtig meget på en forståelig måde, uden at gå ind på det tekniske.

SG Ja, i mange tilfælde, så synes jeg faktisk materialet selv er meget interessant, og i enhver undervisning så drejer det sig vel om at kommunikere, hvorfor dette materiale er interessant. Det er især nemt, hvis det drejer sig om noget, som er meget tæt på ens eget felt. Men der er jo en god grund til, at vi underviser i et givet emne, og i mange tilfælde

skal man bare kommunikere, hvorfor det er vigtigt, at de lærer netop dette.

EF Jeg er helt enig i det Tobias siger. Men jeg vil godt tilføje noget om dette at undervise på store hold. Jeg underviser mest i matematik for biologer. Det er kæmpestore kurser, omkring 200 studerende, og det er ikke alle der er glade for matematik. Indholdet i kurset betyder mest, men der er så meget pædagogik, man skal tage i betragtning i sin planlægning i tilrettelæggelsen af en forelæsning, der varer 2 timer: De her 10 minutter, hvor jeg skal forklare det, hvordan skal jeg gøre det, hvordan skal det bygge op til det næste... der er rigtig meget. De skal jo lære noget, man skal hele tiden motivere, det man gør; motivere de studerende og forklare, hvorfor de skal lære det her, hvorfor de skal lære matematik, når de gerne vil være biologer. Så det er virkelig et stort arbejde. Kurset er i udvikling hele tiden, så hvert år skal der ændres noget. Jeg kan meget godt lide at undervise 1. års studerende – men det er anstrengende, man bliver træt, Det kræver meget psykisk energi at undervise sådanne kurser. Man får også selv kurser i, hvordan man skal undervise – jeg har lige selv taget et sådant kursus. Det pædagogiske kan betyde virkelig meget!

Undervisning på mindre kurser er generelt nemmere, for her opdager man lettere, hvad der går galt og hvad der går godt. Og man kan ændre forløbene løbende. Den slags undervisning er meget mere afslappende, synes jeg. Og meget interessant.

IM Ja, det kan godt være svært, hvis det er meget store hold. På de indledende kurser er det som omtalt flere hundrede mennesker, vi underviser på én gang! Man kan anvende forskellige teknikker. Der er nogle der bruger et system, hvor man stiller et spørgsmål, hvor der er et vist antal svarmuligheder, og så kan man svare med farvede kort, på en computer eller et andet system. På den måde kan man få et umiddelbart indtryk af, hvor mange der har forstået, hvad det egentlig er, man snakker om. Og at aktivere studenterne. Men det er selvsagt vanskeligt at aktivere så mange mennesker på én gang.

En af måderne, jeg selv ofte anvender, er at trække udviklingslinjerne op: Hvad kom forud for det, man nu prøver at lære studenterne? At trække det historiske perspektiv op.

MR Ja, det er jo rigtigt, at matematik har en lang og rig historie. Men når man tænker på, at Euklids lærebøger, der blev skrevet for 2300 år siden, har været i brug i alt fald indtil for 100 år siden, er det vel i grunden ikke så mærkeligt, at mange tror, at alt, hvad der er interessant inden for matematik, det har været undersøgt, det har man fundet ud af. Kan matematik gøres interessant og endda aktuelt ud fra et historisk perspektiv?

IM Det er heller ikke så let. Men jeg kan måske svare ved at give et eksempel på, hvordan jeg brugte det i forelæsninger. For næsten præcis 200 år siden fik den berømte matematiker, CF Gauss en opgave fra kongen af Hannover – et fyrstedømme lige syd for den daværende danske grænse, syd for Holsten. Det har en udstrækning ca. fra Göttingen, hvor Gauss levede, og helt til Holland. Gauss fik den opgave at lave en geodætisk opmåling af fyrstedømmet. Det kræver for det første rigtig mange målinger, men det kræver også rigtig mange udregninger, og man havde jo ikke maskiner dengang Det var altså udregninger, der foregik i hånden. Det tog Gauss ca. 10 år. Midt i den periode, omkring 1825, udgav han en af sine mest berømte afhandlinger. Den handlede om flader – tænk på en fodbold eller en badering.

Vi har alle sammen en fornemmelse af, at disse flader, de krummer. En håndbold, der er mindre end en fodbold, den krummer mere end en fodbold. Det har alle mennesker en forståelse af. Men Gauss formulerede krumning som matematisk koncept, han fik defineret hvad krumning er i matematisk forstand. Og så viste sig dette højst mærkværdige fænomen, at man kan afgøre om flade krummer *ved at måle vinkelsummen i små trekanter*. Gauss siger: Vi har et punkt på denne flade, og vi vil gerne se, hvordan krummer fladen i en omegn af punktet. Lav nogle små trekanter på fladen omkring punktet. Mål vinkelsummen i de trekanter. Vi ved alle sammen fra Euklid, at hvis det er en flad trekant, så er vinkelsummen 180 grader, eller som vi foretrækker i matematik – vinkelsummen er lig med (*pi*), halvdelen af omkredsen af en cirkel med radius 1. Tag nu vinkelsummen i den lille trekant vi har målt på, træk vinkelsummen i en flad trekant, dvs. fra, og divider med arealet. Lad nu trekanten blive mindre og mindre, så får vi en grænseværdi, og det tal er præcis krumningen i det punkt, vi er interesseret i. Og det er jo en fantastisk

Elisenda Feliu

opdagelse, fordi når vi tænker på ting, der krummer, så ser vi det udefra, fra det omgivende rum. Med andre ord, en intelligent lille myre, der piler rundt på fladen, og som kan måle vinkler, kan finde ud af, uden at se fladen udefra, at den krummer og hvor meget!. Det er en af de allervigtigste opdagelser i matematik overhovedet.

Og det har at gøre med topologi, som jeg skal forklare nu. Gauss havde en fantastisk forskningsstudent, Bernhard Riemann. Gauss havde selv kun undersøgt flader – det var det, der hørte til landmålingen. Men Riemann generaliserer dette til højere dimensioner. Han definerer hvad mange-dimensionelle flader er – vi kalder det for mangfoldigheder, ofte Riemannske mangfoldigheder. Og de har også en krumning, som består af mange tal – vi kalder det for en krumningstensor. Ud af den krumningstensor kan vi trække en ny række af tal, som vi kalder karakteristiske klasser. Og karakteristiske klasser, det er faktisk noget, som Søren og jeg har undersøgt i mange forskellige situationer. Her ser vi altså en 200-årig udvikling fra Gauss' oprindelige afhandling til det, vi faktisk beskæftiger os med.

MR *Og så er der oven i købet tråde til fysik, til Einsteins relativitetsteori!*

IM Ja, det er jo det højst mærkværdige, at "naturens love er skrevet i matematik". Det er på ingen måde indlysende, at det skulle være sådan. Det er rigtigt – de Riemannske mangfoldigheder var grund-

laget for Einsteins relativitetsteori. Og her kan vi da også endelig nævne den anvendelse af matematik, at man bruger relativitetsteorien i GPS-systemet. Man kan således godt sige, at det startede med en anvendelse, et geometrisk problem, nemlig at lave en opmåling af et landskab, og det ender 200 år efter med et GPS-system, som også har med opmåling at gøre.

MR *Matematikken udvikler altså hele tiden hele tiden nye områder? Kan I andre supplere med andre eksempler?*

SG Jeg kan nok ikke sige noget, der er rimeligt forståeligt for en gymnasieelev, om det jeg sidder og tænker over lige nu. Men lad mig sige lidt om det jeg vil kalde mit gennembrud: Det havde med *grafer* at gøre, altså emner inden for *grafteori*, der er et område, der har udviklet sig meget de seneste 50 år. En graf består af endeligt mange punkter, forbundet med endeligt mange linjer, og de adskiller sig ved kombinatorikken i, hvilke linjer der starter og slutter i hvilke punkter. Man kan betragte sådanne grafer som et rum – mit fag er topologi, det generelt drejer sig om studiet af rum – og man kan altså betragte en graf som et rum. Men man kan også betragte grafer som punkter i et meget abstrakt rum. Og mit, synes jeg selv, bedste resultat indtil videre handler om egenskaber ved modulirummet af grafer. Det var noget, jeg fandt ud af i løbet af mit første år efter min ph.d.

IM Og jeg har undersøgt systemet af, eller rummet af alle mulige flader, fx alle mulige todimensionelle flader. Det hedder modulirummet, eller Riemanns modulirum. Det har jeg undersøgt, på samme måde som Søren har undersøgt det i 1 dimension lavere, nemlig for grafer. Og der er faktisk forbindelser mellem de to områder.

TC Der er jo mange af de "nye" områder, der på en eller anden måde har eksisteret længe, og som måske havde en meget lille udvikling tidligere, men som i den nyere tid har været i en rivende udvikling. Det kan også være et relativt nyt fænomen, fx inden for sociologi, som ikke umiddelbart er i matematikken, men hvor der ofte er noget matematik, som allerede eksisterer, som viser sig at være relateret til det.

EF Jeg synes også det skal nævnes, at der de sidste 50 år er der sket rigtig meget i forbindelse med computerne. Vi anvender dem til både numeriske og symbolske udregninger. Det er et stort felt. Computerne har ændret meget. I løbet af de sidste 20 år er der sket rigtig meget inden for biologi, og der har man haft brug for at udvikle både nye teknik-

ker med anvendelse af computere, og faktisk også ny matematik med nye teoremer osv. til at svare på disse spørgsmål.

At forske i matematik

MR *Denne lille diskussion og jeres fortællinger om udvikling af ny matematik fører naturligt over i det næste jeg vil tale med jer om, nemlig matematisk forskning, og om selve forskningsprocessen. Hvordan kommer man i gang med et matematisk projekt, hvordan vælger man, hvad man vil beskæftige sig med? Og er der så en bestemt vej, man følger, og som i sidste ende fører til resultater? Hvordan foregår det egentlig?*

EF Jeg synes det var lidt hårdt i starten. Man var vant til at der var en lærebog, man skulle lære nogle emner, og det gik meget godt. Men så pludselig skal man selv finde ud af nogle emner, nogle åbne spørgsmål, hvordan jeg løser dem? Jeg gik lidt blank i starten, jeg vidste ikke rigtig, hvad jeg skulle gøre, med tiden kom det jo, men det tog nogle år at komme i gang, at finde ud af, hvordan man gør det. Nu synes jeg det er meget spændende, men det var hårdt i starten.

Ja, hvordan foregår det? Det er ofte sådan at man tænker videre over et spørgsmål som man allerede har besvaret. Det fører til nye spørgsmål, som åbner en vej frem. Andre gange vil man gerne forstå noget, hvor der ikke er et let svar på hvilken vej man skal følge. Det er en situation jeg ofte er i, i den anvendte matematik – jeg tester rigtig mange ting, og prøver så at bruge intuition eller "gætter på" hvordan strukturen er, hvorfor tingene opfører sig som de gør. Når man så har et gæt skal man bevise det. Det er ikke nok at sige, jeg har set på det, jeg tror på at det er det her der gælder. Og her sker det ofte, at i arbejdet med at bevise det, går man i stå og tænker: Måske er min antagelse forkert, og man begynder måske at lede efter et modeksempel. Det kan man måske heller ikke finde, men i det arbejde får man måske nye ideer til at bevise formodningen. Det kører ofte frem og tilbage mellem forsøg på at finde et bevis og forsøg på et finde et modeksempel. Det kan ofte tage lang tid. Og måske bliver jeg træt af det og lægger projektet væk. Og 4 måneder senere, så tager jeg det op igen og starter forfra – og nogle gange lykkes det

ikke. Men de fleste gange, hvis man insisterer og er stædig nok, så finder man en løsning. Og så bliver man meget glad!

TC Eller også finder man undervejs nogle andre interessante ting! Det er vel ideen med grundforskning, man kommer med et eller andet spørgsmål, men man ender nogle gange med at få et interessant svar på noget helt andet. Simpelthen fordi man i arbejdet med det oprindelige spørgsmål har fået meget mere forståelse for sagen. Eller man har et eller andet, man gerne vil have styr på, men man ved ikke, hvad det rigtige spørgsmål er.

Man har jo en række projekter, med ting man gerne vil vise, nogle har man i lang tid arbejdet på at finde beviser for, andre tror man faktisk, man kan se hvordan man skruer et bevis sammen, men hvor der kan være alle mulige tekniske problemer med at få det gjort klar. Og så bruger man faktisk også en del af sin tid på at finde ud af, hvad man vil lave, hvis man vil lave noget helt andet, end det man beskæftiger sig med for øjeblikket. Man kan jo ikke skifte til et helt andet område i matematik fra et øjeblik til det næste. Man er nødt til at arbejde på så at sige et "halvt skifte", mens man er i gang med et bestemt område og i virkeligheden har meget arbejde endnu i dette område. Så jeg vil beskrive arbejdslivet som matematisk forsker som tredelt: - man arbejder med nogle projekter, som man har haft fat i før, og hvor det endnu ikke er lykkedes at finde beviserne; - man arbejder med nogle gode ideer, man har i nogle projekter, men som ikke er blevet færdige endnu, fordi der er et eller andet teknisk, der skal klares; - og så bruger man tid på at finde ud af, hvad man vil lave, hvis man vil lave noget helt andet.

EF Ja, man har alle de projekter, der kan ligge i årevis, hvor man ikke når at gøre dem færdig, også fordi man skifter mellem projekter hele tiden. Jeg ønsker virkelig, jeg havde mere tid til at kigge på nye ting – det er noget, jeg ofte mangler. Man skal jo også undervise, og det fylder rigtig meget. Og man skal skrive ansøgninger om penge, om fondsmidler, det fylder også en del. Og selvfølgelig skal man også deltage i instituttets liv. Ofte er der ikke så meget tid til forskning, som man kunne ønske.

IM Det er i hvert fald hårdt arbejde! Jeg husker, da en af mine andre forskningsstudenter, Lars Hes-

Søren Galatius

selholdt, 10 år ældre end Søren, kom ind til mig, efter at have fået sit ph.d.-stipendium, og spurgte mig: Hvordan gør man? Jeg svarede dengang: Du tager et stykke papir, og så sætter du dig til at tænke! Problemet er jo, at det er vældig svært at forklare, hvordan forskning foregår. Når man starter på sit ph.d.-studium, så er det vejlederen, der definerer et projekt for én. Og så hjælper man selvfølgelig også til. Man finder noget af den litteratur, der skal til, for at få læst sig ind på og rundt omkring det projekt, man har, og så hjælper man typisk ved at man snakker med sin forskningsstudent en time eller to om ugen. Og her er det vigtigt, at man også støtter sin student psykisk, fordi det er så hårdt, der kan gå måneder, nogle gange hele år, før man for alvor får lavet fremskridt i det problem, det drejer sig om. Der er mange, der tror, at forskning det er sådan en slags leg – men det er det ikke! Det er hårdt arbejde, det kan være hårdt psykisk – og det er også hårdt for omgivelserne, fx for ens børn eller ægtefælle. Jeg ved ikke rigtig, hvordan man skal forklare processen – processen at tænke er jo noget underlig noget! Det, der karakteriserer forskning frem for almindelig tænkning, det er, at man skal koncentrere sig om det samme i et meget, meget langt tidsrum, uden at man er sikker på, at der vil gå et lys op for én. Det gør det psykisk hårdt!

MR *Louis Nirenberg, amerikansk specialist i partielle differentialligninger og en af modtagerne af Abelprisen,*

sagde det på den måde, at god forskning kræver rigtig meget "Sitzfleisch"!

IM Ja, jeg kan godt blive lidt irriteret over at nogle professionelle forskere i den offentlige debat prætenderer, at det hele er en leg. Det er det ikke!

MR *Men en gang imellem har man så en oplevelse af succes!*

IM Det er selvfølgelig det, der driver værket! I sidste ende er vi ikke specielt drevet af interesse i samfundsforhold, eller i at gøre det gode for menneskeheden osv. Det er noget andet. Og selv om det kun sker ganske sjældent, så er det en kæmpe glæde at finde ud af noget, som ingen anden har fundet ud af tidligere. Det er det, der driver værket!

Der er nogle matematiske problemstillinger, som er stillet af andre og ofte meget berømte matematikere, lang tid før ens tid. Og de er ikke blevet løst af dem, men de har peget på det problem. Og det er en særlig glæde og særlig interessant, hvis man arbejder med et af de problemer, der normalt tager frygtelig lang tid at løse – og man så finder en løsning. Det giver selvfølgelig også prestige. Og nu til dags, hvor der er penge i al ting, så får man også ekstra honorar og præmier osv. Men glæden ved at løse et af de der mere klassiske problemer er selvfølgelig virkeligt stor.

SG Du spurgte også om forskningsprocessen, og her vil jeg indskyde noget jeg selv i alt fald ikke vidste, før jeg begyndte at forske selv: Nærmest halvdelen af processen er at finde de rigtige spørgsmål! Når først man har fundet et spørgsmål, hvor man er sikker på, at det er et godt spørgsmål, så er man allerede kommet langt! Forskning er nemlig ikke, at man har et spørgsmål, som man går ud og prøver at besvare. Man skal først selv finde ud af, hvad spørgsmålet egentligt går ud på. Og man kommer til at ændre spørgsmålet nogle gange undervejs – det kan vise sig, når man arbejder med stoffet, at det ikke var det helt rigtige spørgsmål, man først stillede. Nu har jeg selv prøvet at have ph.d. studerende, og der mærker man virkeligt, at en stor del af processen er at finde det rigtige spørgsmål.

MR Hvilken rolle spiller æstetik,"the beauty of mathematics"?

SG I matematik har vi ikke eksperimenter, som i naturvidenskabelige fag, hvor kriteriet groft sagt er, at man skal kunne forudsige virkeligheden. Vi har andre kriterier: Hvordan afgør vi om noget er interessant, om noget er sandt, om noget er bedre end andet? Og her synes jeg at æstetik er det rette

ord. Man opbygger en fornemmelse for, at *det her* er mere fundamentalt end noget andet, og så følger man, eller vælger man det, der er mere fundamentalt. Det kan man godt kalde æstetik.

Samarbejde med andre forskere – og med andre fag

MR *Nogle forskere arbejder mest alene, og for andre er det at arbejde sammen ganske afgørende for at det fungerer – hvordan ser det ud i jeres tilfælde?*

IM Jeg kan bedst lide at have en medforfatter, det letter det psykiske pres, og man har så også én umiddelbart at tale med. Jeg har vel skrevet omkring 100 afhandlinger, og langt de fleste er med en eller flere medforfattere. I gamle dage foregik samarbejdet jo mest per brev. Det var faktisk udmærket - man modtog et brev, så tænkte man over det, og skrev så tilbage. Det betød, at sådan cirka hver fjortende dag eller en gang hver 3. uge, var der forbindelse – en helt anden kadence end nu. Og det kunne godt være en fordel, at det var så langsomt. Nu foregår det jo på en helt anden måde, nu skriver vi bare e-mails osv. Dengang, i 60'erne og 70'erne var der heller ikke så mange penge og ikke så mange konferencer, og flyrejser var dyre. Nu til dags er der jo et uhyre antal konferencer, hvor man mødes og diskuterer med sine kolleger og hører om det nyeste.

SG Jeg anvender ofte videokonferencer parallelt med skriveprocessen. Hvis jeg er i gang med at skrive på en artikel, og vi er inde i processen, så har vi typisk en ugentlig konference på Skype, for at tale om "hvor sidder vi fast nu", hvor langt er vi i projektet. Derudover er der jo e-mail, hvor man stiller hurtige spørgsmål til sin partner, eller potentielle samarbejdspartnere. Hvis det er tidligt i fasen, så er det ikke sikkert, det bliver til et projekt. Men så stiller man et spørgsmål til én, man tror har et svar på det, man søger – eller omvendt: man får sådanne spørgsmål.

TC Jeg har skrevet adskillige artikler alene, men de fleste har jeg skrevet i samarbejde med andre. Jeg synes, der er mange fordele ved at samarbejde med andre. Der er selvfølgelig også et socialt aspekt: Det er sjovt at dele, hvis man har lavet noget, man synes er rigtig godt. Og det er også rart nok at dele, når

man synes, det går i stå: Det kan være nemmere at komme videre, måske også til noget andet, når det virkelig ikke vil lykkes. Og det kan være nemmere i et samarbejde. Når man arbejder sammen med andre, så kommer der forskellige input på et problem. Jeg synes i hvert fald, det er langt sjovere at samarbejde med andre.

EF Jeg arbejder også sammen med andre. Nogle gange er der tale om forskellige ekspertiser: Vi arbejder på forskellige dele af en artikel, vi snakker sammen, men vi laver vores individuelle arbejder og bidrager med forskellige aspekter. Andre gange er det virkelig to mennesker eller tre mennesker der sidder sammen og bygger matematikken sammen. Det er virkelig sjovt – der er en, der siger, hvad nu hvis vi tager det sådan, en anden følger op - ja, så kan vi jo gøre det, og så tager vi bagefter ... Man er virkelig helt høj, når det kører! Der er to eller tre hjerner, der arbejder sammen. Det kan jeg meget godt lide. Og resultatet bliver som regel meget bedre!

MR *Du arbejder jo primært med anvendelsesprægede spørgsmål inden for faget biologi, Elisenda. Kan du beskrive lidt nøjere, hvordan samarbejdet med biologer foregår?*

EF Jeg arbejder med matematiske modeller, der optræder i molekylær biologi. Jeg arbejder derfor med at finde matematiske teknikker, der kan bruges til at undersøge de modeller, man opstiller. Så jeg har nogle samarbejdspartnere, som kommer med en bestemt model, og siger: Vi vil gerne forstå, hvad den her model egentlig siger. Og så går jeg i gang med at lave nogle test ...

MR *De "leverer" altså modellerne til dig?*

EF Ja, de leverer modellerne, det bestemmer jeg ikke. Så kommer jeg med nogle svar, og der sker det så ofte, at de siger, de vil have en lidt mere udbygget, kompliceret model undersøgt. Vi mødes i forløbet ind imellem og snakker om modelleringen og prøver at forstå, hvad modellen siger. De kommer med nogle hypoteser, noget de kan tænke giver mening biologisk set. De har altid en meget god intuition, og så går jeg i gang med at se, om det er rigtigt eller ej. Nogle gange er det rigtigt - jeg ser på det konkret, men hvis jeg bare kigger på ligningerne, så kan jeg ikke bruge en intuition. Men fordi de ved, at ligningerne repræsenterer den og den model for et biologisk system, så giver intuitionen et begrundet gæt, der er rigtigt, og som kan give et meget overraskende resultat. Men andre gange, så tager de fejl, og jeg må sige; Nej det er ikke rigtigt, hvad I tror der sker, sådan kan det ikke forklares. Det giver mig rigtig meget at snakke om modellerne med dem. Nogle gange går jeg måske selv videre, jeg kigger nærmere på deres model og giver dem nogle ideer til at svare på de spørgsmål, de har. Måske kan jeg endda vise et teorem, der siger: Hver gang vi har en model, der opfylder det og det, så vil det have denne konsekvens. Næste gang man har en situation, hvor man ville have lavet en bestemt undersøgelse, så behøver man det ikke, for mit teorem siger, at dette gælder for alle disse situationer.

Tobias Holck Colding

MR *Skal du også vide meget om biologiske spørgsmål? Deltager du fx i konferencer sammen med biologerne?*

EF Ja, det gør jeg. Der er forskellige konferencer, fx om systembiologi, der handler både om biologi og modeller. Her er deltagerne en blanding af matematikere, fysikere, dataloger, biologer – det er virkelig meget multidisciplinære områder. Og jeg har da lært noget biologi, men jeg har ikke arbejdet i et laboratorium fx. Der er altid noget, jeg føler jeg mangler for at kunne forstå visse data fra eksperimenter – hvordan laver de det? Når man i dag går ind

i et laboratorium, er der jo kun maskiner, der blander og ryster det, der undersøges, så det er lidt svært at forstå, hvad der foregår. Man skal kende lidt biologi for at kunne indgå i et samarbejde mellem matematik og biologi, for ellers ville man se på spørgsmål, der ikke har nogen betydning for biologerne eller for nogen som helst.

Anvendt matematik – og ren

MR *Både du og Tobias arbejder steder, hvor der er stort fokus på anvendelsen af matematik. Vi har klassisk inden for matematik ofte foretaget en opdeling i såkaldt ren matematik, der først og fremmest er drevet af nysgerrighed, og anvendt matematik. Og de to parter har ikke altid set lige velvilligt på hinanden. Er det ene bedre end det andet? Eller det et dumt spørgsmål?*

TC Jeg har tilbragt min forskerkarriere på nogle af de institutioner der er mest engageret i anvendt matematik. Jeg var oprindelig på New York University, på Courant instituttet, som har halvt anvendt og halvt ren matematik, og på MIT er det en tredjedel, der arbejder med anvendt matematik. Jeg tror ikke man kan sige, at der er noget, der er bedre end andet. Det er klart at der er forskning, der er bedre end andet, men det krydser jo på tværs af ren og anvendt. Der er forskellige forventninger til, hvad det vil sige at være god i ren og i anvendt matematik. Det er noget, der kan skabe mange konflikter på et institut.

Det kan være farligt at ansætte folk, der faktisk ikke har nogen matematisk baggrund, som anvendt matematiker. Farligt forstået på den måde, at så mister man en ekspertise i matematik, hvis man ansætter nogen, der i virkeligheden ikke har nogen tung matematisk baggrund. På et matematisk institut burde den matematiske baggrund trods alt veje tungest. Men det har ikke noget at gøre med, om man er anvendt eller ikke anvendt.

EF Traditionelt er anvendte matematikere nok blevet betragtet som ikke helt så gode matematikere. Men jeg tror, det ændrer sig i disse år. Udover det findes der flere og flere dygtige matematikere i forskellige discipliner, der er uddannet som rene matematikere – topologi og algebra og geometri – og som finder ansættelse i nye anvendelsesorienterede områder.

TC På Courant-instituttet var der en del folk, hvor det var svært at sige, om de var det ene eller det andet. Der var en stærk forbindelse, det var der en lang tradition for. Der var flere førende forskere, fx Peter Lax, som er en virkelig højt respekteret matematiker, som i virkeligheden både var anvendt og ren matematiker. Han fik Abelprisen i 2005. Jeg ved godt man siger, at folk ser lidt ned på matematikere i anvendt matematik, men det mener jeg aldrig var tilfældet dér. Der var og er forskellige ideer til, hvad det vil sige at være matematiker – og her var der nogle fremtrædende matematikere, som var i begge områder . Det var ikke kun Peter Lax – Kurt Friedrichs og Courant selv, Fritz John, Louis Nirenberg til en vis grad, Jürgen Moser og mange andre.

EF Kontakten er vigtig: Hvis man sætter anvendte matematikere og rene matematikere sammen, så kan der rejses virkelig interessante spørgsmål, virkelig dybtgående. Jeg tror at mange, der opfatter sig som rene matematikere, ville nyde nogle af de spørgsmål der arbejdes med i anvendt matematik.

Men der er forskel på måden, man arbejder inden for anvendt og inden for ren matematik. I ren matematik er man stærk i et område, man bygger op, og hvor man prøver at udvikle teorier. I anvendt matematik er der et spørgsmål, som man skal løse. Man kan ikke ændre spørgsmålet. Her er man nødt til at kigge på andres teorier, du ikke kendte i forvejen. Var jeg et andet sted, ville jeg måske have gået uden om, syntes de var kedelige, men nu er jeg nødt til det. I anvendt matematik arbejder du ofte med flere forskellige discipliner samtidig og vælger ikke altid kun det, du er mest interesseret i.

MR Når I møder andre fag, både fag i nabolaget som biologi, og fag der er længere væk som økonomi, jura og social sciences, gør I jer så også tanker om, hvordan faget matematik adskiller sig fra andre fag.

EF Når du går gennem studiet af matematik, så ændres måden du tænker på, og det er ikke kun, når du arbejder – det er i hele dit liv. Man anskuer ting på en lidt anden måde, man tænker mere logisk. At være matematiker er for mig ikke det, man læser eller det, man gør, det er en måde at være på. Jeg ved ikke, om det er sådan med andre fag, men jeg tror det er nemmere at skifte mellem andre fag, fra fx fysik til biologi eller kemi, end at skulle skifte til matematik – man tænker på en helt anden måde her.

TC Matematik er jo et fag, hvor man virkelig fordyber sig, hvor man ikke er tilfreds med et halvt svar, hvor man ikke er tilfreds med et 'rimeligt'

argument. En af attraktionerne ved matematik er, at man kan nå frem til at *vide*, om det er rigtig eller forkert – med sikkerhed. Nogle af de nævnte fag er da tættere på end andre. Jura er nok længere væk.

Men der er mange eksempler på at matematisk tankegang optræder i vidt forskellige områder, i statistical physics, i social sciences, i alle mulige områder på tværs af fag, som alle faktisk har en underliggende matematisk struktur eller en underliggende matematisk essens. Og inden for ingeniørfagene sker der alt muligt nyt, fluid-dynamics spiller en kæmperolle inden for alle ingeniørfagene på MIT, og det er et område, som er meget lidt forstået matematisk, og som selvfølgelig har brug for matematik.

Et universelt fag

MR Matematik er et meget universelt fag, hvis bare vi ser på vores egne liv: Jeg personlig er opvokset og uddannet i Tyskland og har arbejdet i Danmark i 35 år. Elisenda er fra Catalonien og har foretaget det samme spring. Tobias tog fra Københavns Universitet til USA og har opholdt sig der i mange år, men kommer tilbage til Danmark næsten hver sommer i nogle måneder. Ib tog efter sin kandidatgrad fra Københavns sin phd på University of Chicago og har sidenhen tit tilbragt lange perioder der og på Stanford University. Og Søren har arbejdet på Stanford i 14 år inden han vendte tilbage til Danmark.

Livet som matematiker kan nogle gange være hårdt, men det er jo også forbundet med goder: Matematikere rejser en del, de tager til konferencer, de besøger fagkolleger fra deres netværk og de får besøg fra kolleger på samme måde. Matematik er et meget internationalt fag, og dertil hører også, at man kan og skal bevæge sig.

EF Ja, jeg kom til Danmark på et stipendium på 6 måneder, det har betydet rigtig meget, jeg endte med at blive her. Jeg har fået en datter her, fået min karriere her, så hele mit liv har ændret sig. Og generelt får man rigtig meget ud af at rejse ud og møde de andre, der arbejder med lignende problemstillinger. På instituttet er der faktisk ret få, man kan snakke med om de emner, man arbejder med. Der er så mange forskellige discipliner inden for matematikken, så det er egentlig et tilfælde, at vi er to, der arbejder med beslægtede emner. Hvis man gerne vil lære nye ting, lære samarbejde med andre, lære andre at kende, så skal man rejse, besøge de andre, nogle dage eller uger. Eller deltage i konferencer. Eller bruge Skype – det er blevet standard, at vi bruger Skype.

TC Man opbygger også netværk. I begyndelsen af forskerkarrieren er man måske mere afhængig af det, men man gør det hele livet. Man gør det også for at formidle sin egen forskning til andre. Hvis man har fat i et eller andet, så har man jo kontakt med dem, og det kan være man bare skyper dem, eller ringer til dem. Eller man tager direkte på besøg hos dem, som Elisenda og Martin gjorde det. Det er et plus ved vores arbejde, at vi kan rejse og fx bo 6 måneder et andet sted i verden. Man arbejder selvfølgelig, men der er også mere i det.

SG Det er en meget international verden vi bevæger os i. Men det er også samtidig en meget lille verden, med ret få forskere i hele verden, der beskæftiger sig med samme felt som du gør. Og det gør det nødvendigt, at det er et internationalt fag. Mine samarbejdspartnere er især i USA og i England. Jeg ser dem til videokonferencer, til almindelige konferencer, eller vi besøger hinanden.

IM Matematik er et vidunderligt internationalt fag. Og vi behøver jo ikke slæbe rundt på apparatur, en blyant eller en computer er rigeligt. Det er en stor fordel.

Er matematik stadigvæk ét fag?

MR *I dag er matematik blevet et fag med, man kan næsten sige, ufatteligt mange specialiseringer. Og mange vil slet ikke have hørt om en hel del af disse. Algebraisk topologi er ikke noget enhver ved, hvad handler om, og jeg kan i flæng nævne områder som – sædvanlige og partielle differentialligninger, harmonisk analyse, algebraisk og aritmetisk geometri, kategoriteori, sandsynlighedsteori, statistik, stokastiske processer, you name it. Er der så stadig tale om ét fag? Og hvordan ytrer det sig, når det faktisk er sådan, at ingen enkeltperson kan overskue det hele?*

TC Der er nogle fælles træk – den logiske tankegang, at man har noget, man har bevist, som man ved er rigtig (og ved hvad der er forkert). Det er også sådan, at i næsten alle områder er der noget af den samme matematik, der indgår, måske på et relativt lavt niveau, men det er ikke fuldstændig forskelligt.

EF Den strukturerede måde at tænke på, den findes i alle matematiske discipliner.

IM Hvert fjerde år afholdes der internationale matematikkongresser, den sidste i 2018 i Rio i Brasilien. Disse kongresser er struktureret sådan, at de er opdelt i 20-25 forskellige sektioner med hver sine discipliner – fx dem du nævner. Der er ingen, tror jeg roligt man kan sige nu til dags, der kan overskue dette felt, og som har bare en rimelig fornemmelse af de samlede 25 forskellige sektorer. Algebraisk topologi er bare én af de 25 sektioner – så det er vidtforgrenet. Jeg tror man kan sige, at Hilbert var den sidste matematiker, der havde et rimeligt overblik over den samlede matematiske udvikling. Men det er jo også over 100 år siden.

Nu nævnte du selv nogle forskellige områder af matematikken. Hvad er det for områder, der ligger tæt ved algebraisk topologi? Det er *kategoriteori*, det er dele af *talteori*, det er *algebraisk geometri* og *aritmetisk geometri*, det er teorien for *differentialligninger* og *differentialgeometri*. Så det er 4-5 af de sektioner, jeg omtalte, at de internationale kongresser er opdelt i, hvor der er overlap og tæt kontakt. Kongresserne er godt nok opdelt, men det er jo *matematik*-kongresser, der blot er opdelt i 25 hoved-sektioner af faget. Vi har alle sammen et hovedområde, og så ved vi en del om de områder, som ligger tæt ved.

SG Jo længere tid jeg har været i matematik, jo flere grene har jeg selvfølgelig fået indblik i. Jeg har haft mere tid til det, min egen forskning er ligeledes bredt lidt ud. Man kan godt sige, at det startede ret snævert, med en fordybelse nede i nogle små felter. Men de områder, du nævner rummer mange eksempler på forskning, der sammenkæder forskellige grene af matematik ...

MR *Og nogle gange sker der en slags "krydsbefrugtning" mellem ret så forskellige områder...*

SG Det er i en vis forstand nogle af de virkeligt interessante nyudviklinger, hvor man opdager en sammenhæng mellem områder og synspunkter, man først har tænkt på som forskellige. Og så viser det sig, der er en dybere sammenhæng mellem de to.

MR *Selv om man arbejder i forskellige områder, så er der vel et vist metode-fællesskab, at man angriber problemer på en måde, der minder om hinanden...*

IM Ja, jeg kan give et eksempel – i forlængelse af det jeg nævnte tidligere om krumningsbegrebet. Vi har en flade, hvor der er lagt et krumningsmål på, så vi i alle punkter har et sådant. Lægger vi så alle disse tal sammen - dvs. integrerer vi krumningsfunktionen hen over fladen – så får man et meget mærkeligt resultat, man får nemlig 2π gange et helt tal. Det hele tal, det er 2, hvis det er en kugleflade, hvis det er en torus (badering) så er det 0, hvis det er figur som en kringle med to huller i, så er det -2 osv. Dette resultat kalder vi indeks-sætningen, ja I dag kalder vi det den første index-sætning, for det er blevet stadig videreudviklet. I arbejdet med denne videreudvikling bruges teorien for partielle differentialligninger! Det er et eksempel på et område, der oprindeligt startede et helt andet sted, men hvor man pludselig skal lære sig en helt ny disciplin. Jeg husker det selv tydeligt: Da jeg første gang kom i forbindelse med Atiyah-Singers index-sætning, så skulle jeg lære mig en hel del om partielle differentialligninger.

MR *Og Poincare-formodningen, som i formuleringen lyder topologisk, er i sidste ende også blevet løst med metoder fra partielle differentialligninger, af den russiske matematiker Perelman.*

IM Ja, matematik er ofte meget mærkelig. Nu nævnte jeg at, når man integrerer Gauss-krumningen, så får man 2π gange et helt tal: Det hele tal er $(2 - 2g)$, hvor g er antallet af huller i den flade vi ser på. En badering har ét hul, en kringle to osv. Så det er uafhængigt af hvordan vi deformerer, rykker og slider i den her badering. Det er altså et tal, der er uafhængig af den præcise geometriske figur – og det er dét, der er det topologiske! Det er meget interessant, her og andet steds, at man har et problem i en kontinuert verden, men det har en skygge i noget diskret, som fx i de hele tal, eller i grafer osv.

Matematik – i andres øre

MR Lad os snakke lidt om formidling af matematisk forskning. Jeg tager udgangspunkt i følgende: Når man er sammen med mennesker, som man ikke har mødt på forhånd, fx til en festlighed og fortæller dem, man er matematiker, så er der nogle, der reagerer næsten skrækslagen. Og der er faktisk også kun et lille fåtal af ens fagfæller, der for alvor forstår, hvad det er, man beskæftiger sig med. Kan matematik dermed ikke også blive et ensomt fag?

SG Sidder man i festligt lag, så er det i hvert fald en forudsætning, at dem man sidder sammen med, at de er villige til at bruge mindst 5 minutter. Nogle gange vil de jo hellere fortælle om deres egne matematikoplevelser eller -uddannelse, som de ikke brød

sig om. Men hvis de er interesseret, så synes jeg godt, man på 5-10 minutter kan give en eller anden ide om, hvad man arbejder med, og hvorfor man tænker over det, hvorfor matematik findes som et fag. Men det er rigtig nok, at det er ensomt i den forstand, at man ikke sådan lige kan tegne en tegning og sige, at det drejer sig om den her partikel, der støder i den der.

EF Der kommer altid en reaktion, når man til en, man lige møder, siger man er matematiker. Men nu hvor jeg arbejder mere med anvendelsen af matematik, synes jeg, det er nemmere at forklare, hvad jeg laver. Men jeg siger ikke – jeg er matematiker – jeg siger bare, at jeg kigger på modeller inden for biologi, og det kan de fleste mennesker forstå. Tidligere, da jeg arbejdede med ren matematik, så sagde jeg ikke noget, det var meget abstrakt,

TC Ja, det er et spørgsmål, man ofte møder. Hvis man taler med en ingeniør, en fysiker eller en økonom eller datalog, så har de selvfølgelig mere kendskab til moderne matematik. Men hvis du taler med folk, der ikke har et sådant kendskab, så er det et spørgsmål, der ofte kommer. Lad mig fortælle en lille anekdote: Jeg var til et selskab i New York, hvor jeg var sammen med en amerikansk matematiker og hans østrigske kone. Jeg blev præsenteret for værtinden, som alle troede var af dansk afstamning, men det viste sig nu, at hun stammede fra de hollandsk vestindiske øer. I alt fald, efter at have snakket med hende, så spurgte hun mig, hvad jeg lavede, og jeg svarede, jeg er matematiker. Så vendte hun sig om til ham, der stod bag mig, og det var min amerikanske ven. Han havde fået færten af, at det var ikke så smart at sige, man er matematiker. Så han svarede, at han var arkitekt. Og så reagerede værtinden – "nej hvor interessant" – og så drejede konversationen sig om hans ikke eksisterende arkitektur.

Nogle gange skal man måske ikke reklamere for meget for matematik. Men hvis man har andre interesser, synes jeg ikke, det er det helt store problem. Så prøver jeg ofte at forklare nogle af de ting, jeg er interesseret i. Og det er jo sådan, at så at sige alt har en matematisk vinkel, eller kan reduceres til nogle matematiske spørgsmål. Så på den måde er det ubegrænset. Der er så mange interessante spørgsmål, man kan kaste sig over – hvis man har tid til det. Jeg kan fortælle lidt om et specielt projekt jeg beskæftiger mig med. For eksempel om meningsudveksling mellem folk: Hvad sker der, hvis du har en gruppe, hvordan udvikler de forskellige meninger sig over tid? Opnår de enighed, og hvis de gør det, hvor lang tid tager det? Den slags ting kan næsten alle forstå – en tilsvarende problemstilling møder man inden for statistisk fysik, inden for økonomi, inden for alle mulige social sciences, inden for alt muligt. De fleste af dem, der har beskæftiget sig med emnet kommer ikke med en matematisk baggrund. Dem, vi samarbejder med, er dataloger, de kender meget matematik – det er nogle matematisk orienterede dataloger – men de kender selvfølgelig ikke matematik på samme niveau, som vi gør. Det *er* helt klart et matematisk problem, det er klart relateret til eksisterende matematik, i det her tilfælde til varmeligningen. Men det *er ikke* varmeligningen. Det er heller ikke en ikke-lineær version af varmeligningen, jeg kender. Men ens matematiske baggrund hjælper helt klart.

IM Ensomhed? Jo, men Skype og konferencer og den slags, det hjælper jo lidt på ensomheden, når man snakker med sine fagfæller. Det er vanskeligt at fortælle sine forældre, hvad fanden det er, man egentlig beskæftiger sig med.

Det kan også på en vis måde være en fordel, at matematik er så vanskelig at forklare. Nu tænker jeg på det i økonomisk forstand: Hvorfor i alverden vil politikere give penge til sådan noget, som Søren og jeg laver? Det kan man egentlig godt undre sig over, men det er jo en del af den generelle menneskelige kultur, det skal man ikke underkende. Det er godt nok ikke så anerkendt i Danmark, som det er i fx Frankrig. Men matematik er altså en del af menneskehedens generelle kultur. Det kan være enormt svært at forklare det lille hjørne, man selv beskæftiger sig med, men så kan man jo forklare nogle af de store ting, som jeg prøvede det med historien om krumningen.

MR *Og selv om det ikke er det, der driver en selv, så er matematik faktisk blevet til en økonomisk drivkraft. Matematikken bliver brugt i mange forskellige tekniske og økonomiske sammenhænge og som redskab i andre videnskabelige fag... Og det er måske det, som politikerne i sidste ende forstår, og derfor er de villige til at investere.*

IM Man havde jo ikke haft computere, hvis der ikke havde været en matematik bag, der havde udviklet det. Det er jo helt givet. Eller det videoapparat, der optager os. Eller GPS-systemet. Der er matematik i næsten alle af de bekvemmeligheder, vi har.

Men faktisk tror jeg også, at en del politikere forstår det kulturelle aspekt. Vi sammenligner os med andre veludviklede lande, og dansk matematik er på et ret godt internationalt stade, og det er politikere også stolte over. De er stolte over Niels Bohr. De er stolte over, at vi deltager på lige fod med andre udviklede nationer, på alle måder ikke kun mht. litteratur osv., men også på de videnskabelige områder.

Gode råd til matematikere "in spe"

MR *Til sidst: Har I et råd til et ungt menneske, der overvejer en karriere inden for matematik, eller måske et beslægtet fag. Hvad kan man gøre i den situation for at blive klogere, hvad kan man læse, hvem kan man henvende sig til, for at finde ud af, om det er det rigtige for en?*

TC Den første forudsætning er, at man virkelig godt kan lide matematik! Det kommer selvfølgelig an på hvilket niveau man stiler efter. Men hvis man drømmer om et niveau som forsker, så er man nødt til at brænde for det.

SG Vi har mest snakket om en forskerkarriere. Jeg synes det er vigtigt at få med er, at i første omgang skal man tænke, om man gerne vil tage en bachelor og en kandidatgrad. Så finder man undervejs nok ud af, om forskervejen er den rigtige, i løbet af de 3-5 år, det tager. Hvis man allerede i gymnasiet er interesseret i matematik og overvejer, om man måske kunne blive forsker, så er der ret stor sandsynlighed for, at det vil være det rigtige valg at starte på universitetet og tage en matematikgrad.

EF Hvis man brænder for matematik, så er det virkelig værd at prøve at studere det. Det er en unik oplevelse, der er et stort fællesskab i Bachelor uddannelsen. Og som jeg har sagt tidligere – man kan studere mange ting med matematik, men det er nok sværere at skifte fra et andet fag og lige tage et kursus i matematik end omvendt.

MR Der er jo desværre færre kvinder i matematik end mænd, måske især i Danmark. Elisenda, har du en ide om, hvad der ligger bag? Er der noget der gør det vanskeligere for kvinder at læse matematik og at forblive i faget?

EF Det ved jeg faktisk ikke. I Sydeuropa udgør kvinderne mere end 50% af de studerende, der læser matematik. I Danmark er det 30%. Jeg forstår ikke hvor forskellen kommer fra. Jeg ville gerne forstå årsagen. Baggrunden er jo helt den samme, fra folkeskolen og op. Jeg føler ikke, jeg er kvindelig matematiker, jeg er matematiker. Der er flere kvinder i anvendt matematik, og der er nogle, der forklarer det med, at kvinder har mere behov for det sociale, og at de motiveres mere af at "gøre noget for samfundet". Og her giver anvendt matematik måske mere. Jeg ved det ikke. Men jeg opfordrer alle kvinder, der kan lide matematik, til at vælge det!

MR *Har I forslag til litteratur?*

TC Der skrives jo mange relativt let tilgængelige artikler, så der er meget her, man kan prøve. Jeg tænker på noget som Notices (fra AMS), som måske er på et relativt højt plan ift. hvad de kender, men som alligevel er tilgængelig. Så er der klassikere, som Courant og Robbins' bog What is mathematics eller d'Arcy Thompson's On Growth and Form som min gamle kollega Peter Lax kom til mig med engang. Den har jeg stadig på listen over emner, jeg gerne ville studere nærmere. Denne bog regnes for at være fødslen på matematisk biologi, og den var Courants favoritbog (ifølge Peter Lax). Det er en kanon spændende bog, som jeg har brug for et fjumreår til at studere nøjere. Der er alle mulige spørgsmål i det værk, hvor svarene er ukendte.

IM Martin, du sagde at man kan altid få et job, hvis man har en bachelor, eller en kandidatuddannelse – eller en forskeruddannelse - i matematik. Der er job til alle, der er uddannet i matematik. Da jeg gik i gymnasiet, da var der et bestemt bogsystem, man brugte på universitetets første år – Bohr og Mollerup kaldte man simpelthen systemet – den læste jeg, da jeg gik gymnasiet. Det er et ret stort system (4 bøger) og det kan man selvfølgelig gøre mere eller mindre. Man kan opsøge den slags bøger og se, om det er noget for en. Det vil være naturligt, når man prøver at finde ud af, hvilken slags karriere, man skal satse på. Det er svært for unge mennesker at finde deres vej. Jeg vil gerne tilføje: Jeg synes at den måde man pisker unge mennesker på nu er højst ubehageligt. Fremdriftsreformen er noget af det værste, politikerne nogensinde har fundet på. Det kræver sin tid at blive uddannet, og man skal også have tid til at være et normalt ungt menneske. Det kan ikke nytte noget, at man bare stikker næsen ned i bøgerne. Man skal udvikle sig på alle mulige måder. Og man skal i øvrigt også have det lidt sjovt.

MR *En udmærket afslutningsreplik! Tak til jer alle sammen!*

Mindeord om Richard V. Kadison (1925-2018)

Selvom han var født i New York og havde sin professionelle karriere i USA, kom Richard V. Kadison – "Dick" mellem venner og kollegaer – til at spille en helt særlig rolle også for ganske mange danske matematikere, hvilket i 1987 udmøntede sig i en æresdoktorgrad ved Københavns Universitet og endnu tidligere også i et korresponderende medlemskab af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab.

Så det føles naturligt at skrive en særlig dansk nekrolog her i Matilde, selvom der i Notices of the AMS i Oktober var en flot Memorial Tribute på 11 sider, også med bidrag fra to danske matematikere, Erik Christensen og Mikael Rørdam.

Som nær personlig bekendt af Dick vil jeg tillade mig at kalde ham sådan her i artiklen.

Dick blev født i juli 1925 i New York og kom efter 2. Verdenskrig på University of Chicago, hvor hans vejleder blev Marshall Stone. Efter sin ph.d. afhandling fra 1950, "A Unified Theory for Topological Algebras", traf han i 1951 Bent Fuglede ved Institute for Advanced Study i Princeton. De skrev to artikler sammen, den ene om hvad der nu kaldes "Fugledе-Kadison determinanten", og i 1953 kom Dick så til København for at besøge Bent. Dette ophold blev afgørende for hans tilknytning til Danmark, idet han på pensionatet Christiansgården mødte sin kommende danske hustru, Karen Holm.

Ægteskabet med Karen førte til mange ophold i Danmark, en god beherskelse af det danske sprog og en særlig imødekommenhed overfor at modtage danske og norske ph.d.studerende og gæster på de amerikanske universiteter, hvor Dick var ansat: først Columbia University i New York og senere University of Pennsylvania i Philadelphia.

Som ung dansker kunne man være sikker på at få mange gode råd fra Dick – han elskede at undervise og at dele ud af sin viden, både den matematiske og den almene, og at forklare forskellen på en dansk og en amerikansk tilgang til tingene.

For eksempel husker jeg tydeligt, hvordan han engang forklarede mig, at hvis man bad en amerikaner om hjælp til noget, så ville han/hun straks sige "of course, no problem" – men det kunne ligge lidt tungt med faktisk at få hjælpen realiseret. En dansker, derimod, ville sige "måske, det må komme an på, hvordan vi præcist kan gribe det an" – men ville så tænke over det og som regel gøre noget ved sagen.

Dick havde som nævnt meget tidligt kastet sin kærlighed på operator algebraer, og sammen med Isadore Singer fik han introduceret begrebet "triangulære operator algebraer" og udforsket et problem med rødder tilbage hos Dirac om udvidelsen af rene tilstande. De viste at rene tilstande på den kontinuerte diagonal af de begrænsede operatorer på Hilbert rummet $H = L^2([0,1])$ kan have flere udvidelser som rene tilstande på de begrænsede operatorer på H, og rejste så spørgsmålet om entydighed af udvidelsen af en ren tilstand på den diskrete diagonal af de begrænsede operatorer til en ren tilstand på alle begrænsede operatorer. Dette spørgsmål viste sig at være ækvivalent med mange andre vigtige matematiske spørgsmål i ingeniørvidenskab, teoretisk datalogi og lineær algebra og blev verdenskendt som "Kadison-Singer problemet". Det blev først bevist i 2013 efter flere reformuleringer, bl.a. med kombinatoriske metoder – lidt overraskende af forskere med baggrund i teoretisk datalogi.

Indtil 1964 var Dick på Columbia University og havde her bla. Erling Størmer og Marc Rieffel som ph.d.studerende. Men så blev han hentet til en særlig lærestol ved University of Pennsylvania, "Penn", hvor han også fik ret frie hænder til at opbygge en gruppe omkring sig. Dette førte efter nogle år til skabelsen af et veritabelt "kraftcenter" indenfor

operatoralgebra, med rigtig mange stor navne tilknyttet, og det blev et mekka for unge danske og norske matematikere.

Af stor betydning for dansk og norsk matematik blev det også, at Dick tilbragte det akademiske år 1965-66 i Århus, som gæst hos Svend Bundgård, og her havde medbragt en ret bred kreds af yngre matematikere fra USA, bla. Ed Effros, Rick Lavine, Jim Glimm, Alan Hopenwasser og Erling Størmer, hans norske ph.d.studerende. Året tiltrak også Erik Alfsen fra Universitetet i Oslo samt Esben Kehlet og Gert Kjærgård Pedersen fra Københavns Universitet, der alle blev betydningsfulde for den videre uddannelse af unge matematikere indenfor operatoralgebra-teori i Norge og Danmark.

Tilbage i USA opbyggede Dick som nævnt et "kraftcenter" for operatoralgebra i Philadelphia, med navne som Ed Effros, Shoichiro Sakai, Bob Powers, Michael Fell og Lajos Pukanszky. Jeg havde selv den fantastiske oplevelse at være gæstestuderende på Penn i det akademiske år 1971-72. Her fulgte jeg bl.a. et kursus i operatoralgebraer hos Dick sammen med Magnus Landstad og Christian Skau fra Norge, som begge tog en Ph.D. på Penn. Jeg selv var der kun et enkelt år, og tog derefter tilbage til Danmark, hvor jeg fuldførte min Ph.D. på Syddansk Universitet – men året blev meget betydningsfuldt for min interesse for operatoralgebraer.

Jeg havde på dette tidspunkt også giftet mig ind i C*-familien, som vi begyndte at kalde os – og gennem min mand Gert Kjærgård Pedersen og Dick lærte jeg hurtigt kernen i denne spændende familie at kende – herunder ikke mindst Alain Connes og hans vejleder Jacques Dixmier.

Det tætte samspil med statistisk mekanik og andre grene af teoretisk fysik og kemi var en hovedhjørnesten i Dick's faglighed, og det gjorde naturligvis også fagfeltet endnu mere spændende for de af os, der egentlig havde stået med et ben i både fysik og matematik under vores studier. Det betød også, at den internationale fagkreds omkring ham ikke kun bestod af matematikere, men også talte mange teoretiske fysikere som fx Elliott Lieb fra Princeton, Rudolf Haag fra Hamburg, Sergio Doplicher fra Rom, Nico Hugenholtz fra Groningen, Huzihiro Araki fra Kyoto og Daniel Kastler fra Marseille. I København var der også god kontakt til en lille gruppe teoretiske kemikere – med tætte relationer til Lieb – herunder Thor A. Bak og Ole Heilmann.

Ikke mindst Kastler i Marseille kom til at spille en stor rolle for at bringe unge forskere sammen, han skabte et gæsteprogram ved CNRS i Marseille og Universitetet i Luminy, som gav mulighed for at mange af os kunne bo nogle måneder i den lille sydfranske by Bandol og holde matematikseminarer på den lokale skole. Adskillige medbragte også deres børn og boede om vinteren i huse, der blev lejet ud til dyre penge i sommerperioden, men var relativt billige om vinteren. Dette skabte som nævnt følelsen af at tilhøre en C*-familie, og hvem andre end Dick kunne være vores "Godfather"? Han selv og Karen kom også indimellem til Bandol, hvor hans velkendte kærlighed til gamle biler fik gode muligheder for at udfolde sig.

Dick blev i egentlig forstand en samlende figur for den nye generation af C*-algebraikere, som blomstrede op i 1970erne og 1980erne, og han gjorde Philadelphia til et meget levende centrum for udviklingen – bl.a. kom Joachim Cuntz til Penn i flere år, og mange andre opholdt sig der som PhD-studerende eller på et-årige besøg. På mange måder kan man sige, at han var en absolut hovedkraft bag at holde operator-algebra-området levende efter von Neumann, især i en meget "død" periode i 1960erne, og indtil området igen blomstrede op med udgangspunkt i Tomita-Takesaki teorien, introduceret af den meget tunghøre japanske matematiker Tomita, men først forståeliggjort af Masamichi Takesaki. Efter dette gennembrud kom der virkelig gang i området igen over en bred front, anført af Fields medalisterne Alain Connes og Vaughan Jones, men også med substantielle bidrag fra mange andre, herunder fra fysiker-siden bl.a. fra Huzihiro Araki fra Kyoto om relativ entropi.

Samtidig betød hans nære tilknytning til Danmark, at der også kom et meget levende operatoralgebra-miljø her i landet, selvom Bent Fuglede selv havde forladt området ret få år efter deres fælles arbejder. Bent Fuglede havde dog nået at interessere Esben Kehlet for operatoralgebraer, og Esben havde vejledt Gert Kjærgård Pedersen til hans magisterkonferens i 1964. Begge disse to var som tidligere nævnt med til det særlige Kadison-år i Aarhus 1965-66, hvor også norske og islandske matematikere deltog. På dette tidspunkt havde man ikke nogen egentlig ph.d. grad i Danmark, men både Dick og Gert opfattede det sådan, at året 1965-66 fik samme betydning for Gert, som en egentlig ph.d.vejledning af Dick ville have haft. Det sendte Gert solidt videre i udforskningen af C*-integraler og frem mod skabelsen af hvad

NO SMOKING

der i dag går under navnet "Pedersen idealet", og gjorde ham til en naturlig del af den internationale C*-familie. Dick selv beskrev det mange år senere på følgende måde, i en mail som blev læst op i København ved et Memorial Conference for Uffe Haagerup, hvor Dick ikke kunne være med, og de to nævnte danskere – Gert & Uffe – desværre begge var afgået ved en alt for tidlig død:

" Gert had been my student back in 1965-66 during my year at Aarhus. He roared over from Copenhagen on his motorcycle a few times a week to work with me on his thesis (non-commutative measure theory and operator algebras). I'm not certain how Gert felt, but it was great fun for me. There was plenty of humor, jokes and that sort of thing, between the two of us. So, we came to know and understand each others' humor. When Gert started to describe his wonderful young student to me, I had not yet met Uffe, he said, "He's good; he's very good!", at which point, Gert began to brush both the sleeves of his jacket from his arms toward his hands in a manner that one might employ if an army of particularly frightening fire ants were racing up those sleeves intent on engulfing your neck and head and eating them. I knew what Gert was saying: Uffe was good - frighteningly so! It wasn't much after that that I came to consider that evaluation as a classic Danish understatement."

Rundt om Gert og Esben voksede en gruppe operator-algebraikere i København, med Esbens student Erik Christensen, Gerts studenter Uffe Haagerup, Ryszard Nest, Frank Hansen, Søren Eilers og Nadia Larsen og "tilflytteren" George Elliott, som var ansat i København fra 1972 og mange år frem, efter at han gennem bekendtskabet med Dick og Gert havde fået lyst til at være med i operatoralgebra-gruppen i Danmark. Jeg selv tog som nævnt min ph.d. i Odense, dog må det retfærdigvis siges, at George Elliott var min medvejleder og at jeg tillige havde stor glæde af, at der i 1972-73 var endnu et operator-algebra år i Aarhus, hvor Bill Arveson fra Berkeley var årets store gæstenavn og reelt også var medvejleder. Også i Aarhus kom der en mindre gruppe indenfor feltet, og da Uffe blev ansat i Odense, var også Odense stærkt med på operator-algebra-landkortet i Danmark.

Det glædede i den grad Dick, at han hver sommer under sine besøg hos Karens danske familie også kunne aflægge kortere eller længere visitter hos sin C*-familie, og ligesom Gert tilbragte et år i Philadelphia, blev det også tilfældet senere for Uffe, og derefter kom Mikael Rørdam til Penn som egentlig ph.d.studerende hos Dick og blev der i flere år. Dick åbnede også dørene, da en af mine egne meget unge studerende, Tobias Holck Colding, gerne ville til USA for at tage en ph.d., selvom det ikke var klart, at Tobias ville tage sin ph.d. inden for operatoralgebra. Dick's matematiske interesser var brede, og hans succes-kriterium var, at Tobias fandt sin rette hylde og fik en god uddannelse på Penn – og det tror jeg roligt man kan sige blev opfyldt, hvilket Dick sendte mig mange glade beskeder om gennem flere år.

Også grafteoretikeren Carsten Thomassen havde glæde af Dicks hjertevarme og gæstfrihed overfor danske matematikere uanset fagområde. Carsten tilbragte et halvt år i Philadelphia sammen med sin kone Lis og deres to sønner, og Dick og Karen Kadison var som altid gæstfri og de to familier blev bagefter ved med at ses, når Kadison-parret kom til Danmark.

Dick var i det hele taget en meget positiv person – han var en mester i at finde en positiv vinkel både i menneskelige og faglige sammenhænge, og kun yderst sjældent udtrykte han sig negativt. Hans store betydning både her i Danmark og i Norge og resten af Europa kom også til udtryk ved den glimrende Memorial Conference, som Mikael Rørdam og Magdalena Musat havde arrangeret i november i år på Carlsberg Akademi, og som er omtalt i en lille selvstændig artikel her i bladet,

Dick er listet i the Math Genealogy Project med 38 studenter (PhD-niveau) og 462 matematiske "efterkommere". Der er givetvis reelt flere. Men alene disse tal taler jo også deres tydelige sprog om hans store berøringsflade og betydning for de følgende generationer. Sin begejstring for matematikken videregav han også til sin søn Lars, der efter en ph.d. fra UC Berkeley også en tid var ansat ved Roskilde Universitet og senere i Sverige.

For yderligere omtale af Dick's matematiske indsats henvises til artiklen

" In Memoriam: Richard V. Kadison (1925-2018)", Notices of the AMS Volume 66, no.9, p. 1453-1463,edited by Liming Ge, Arthur Jaffe, Marc Rieffel and Mikael Rørdam.

Æret være hans minde.

Dorte Olesen

Den matematiske arv efter Richard V. Kadison

En mindekonference på Carlsberg Akademi 29.-30. november 2019

Årets dansk-norske konference inden for operatoralgebra fandt i år sted på Carlsberg Akademi og ikke det traditionelle Schæffergården eller Lysebu – og den var dedikeret taler om den matematiske arv efter Richard V. Kadison.

Mikael Rørdam og Magdalena Musat stod her for et flot program med støtte fra Carlsbergfondet og Center for Symmetri og Deformation – et program, der satte fokus på Richard V. Kadisons mangeårig betydning for udviklingen i operatoralgebra-teori og med et særligt fokus på hans store betydning for mange danske og norske matematikere.

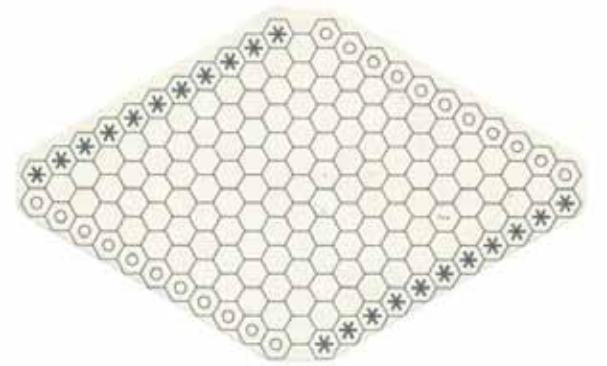
På mødet deltog ca 60 matematikere – og enkelte fysikere - fra Danmark, Norge, Sverige, Belgien, Holland, Tyskland, England, Skotland, Frankrig, Italien, Schweiz, Rumænien, Australien, Canada og USA – heriblandt også nogle med rødder i andre lande som fx Serbien og Japan. Så det var en meget international konference og talerne foregik på engelsk, selvom der også blev talt en del andre sprog i pauserne.

De matematiske indlæg havde alle et udgangspunkt i Kadison's arbejder, men selv med denne røde tråd kom konferencen til at spænde temmelig vidt. Til den afsluttende middag kom også Bent Fuglede – Kadison's oprindelige kontakt til Danmark – og Kadison's danskfødte hustru Karen og deres søn Lars, som også hele livet har bevaret en tæt kontakt til Danmark, bla gennem en ansættelse i nogle år på Roskilde Universitet.

Talerne omfattede Christian Skau fra Trondheim, Joachim Cuntz fra Hannover, Sergio Doplicher fra Rom, Siegfried Echterhoff fra Münster, Ilijas Farah fra Toronto, Cyril Houdayer fra Paris, Arthur Jaffe fra Boston, Tim de Laat fra Münster, Sorin Popa fra Los Angeles, Hannes Thiel fra Münster, Andreas Thom fra Dresden, Stefan Vaes fra Leuven, Alain Valette fra Neuchatel, Stuart White fra Oxford og Wilhelm Winter fra Münster.

Spillet, der blev den helt store dille

Piet Hein opfandt spillet Polygon, Politiken lancerede det, og tusinder af læsere satte deres krydser og boller



Værsgo', prøv et spil! Man skiftes til at sætte et kryds eller en bolle og med dem skabe en sammenhængende rute fra kant til kant. De fire hjørne-sekskanter hører til begge sider.

Den lille blok med 50 spilleplader, som Politiken udgav, blev først trykt i 20.000 eksemplarer. Med dem var der spilleplader til en million spil. Senere trykte man yderligere 30.000 blokke.

Til blokkens bagside havde Piet Hein skrevet et gruk, og yderligere fortalte et par tekster, at blokken passede lige ned i en almindelige konvolut, og at den kunne forsendes til laveste tryksagsporto.

"Vil De lære at spille Polygon?" spurgte Politiken i 1942 sine læsere, og – ja, tak, det ville de gerne. Spillet Polygon blev den helt store dille i det tysk besatte Danmark, ligesom *Sudoku* og *Rubiks terning* senere blev det i hele verden.

To matematikere, canadieren *Ryan B. Hayward* og danskeren *Bjarne Toft*, har netop på forlaget *CRC Press* udgivet en bog på 300 sider om Polygon-spillet og lanceringen af det i Politiken.

»Hex, The Full Story« hedder bogen, og dens indhold lever helt op til titlens løfte; vi får den fulde historie.

At spillet i bogens titel hedder Hex, og ikke Polygon, skyldes, at Hex er et navn, som spillet senere fik i den engelsktalende verden.

Bogen blander historie og spilteori, og blandt andet møder man *Piet Hein*, *John Nash* (kendt fra filmen »A beautiful mind«), den amerikanske matematik-skribent *Martin Gardner*, fysikprofessoren *Jens Lindhard* på Aarhus Universitet og mange andre fra matematikkens verden.

Polygons opfinder var – naturligvis – spillenes mester *Piet Hein*. Han skrev sine *gruk* i »At tænke sig« under pseudonymet *Kumbel Kumbell*, så det var oplagt for ham også at præsentere sit spil i avisen.

Spillet er ret enkelt. De to spillere skal prøve at skabe en ubrudt, snoet kæde af krydser og boller tværs over spillepladen fra kant til kant – og samtidig forhindre modspilleren i at gøre det samme.

Ligesom det gamle, kinesiske spil *Go* er spillet et forbindelses-spil, der altid vil have en vinder. Man kan ikke spille uafgjort.

Prøv selv at spille på den trykte spilleplade herover!

Igennem flere uger bragte Politiken dagens spilleplade samt en opgave lidt i stil med de skakopgaver, som man finder mange steder. Yderligere afholdt Piet Hein læsermøder i Politikens Hus. Han kaldte dem »saloner«.

Men det var jo lidt beskedent med en enkelt spilleplade i dagens avis. Politiken fik derfor trykt nogle små blokke med 50 ark, og med dem voksede interessen lynhurtigt. Blokkene kostede 50 øre, og der blev solgt 50.000 af dem.

I dag vil man næppe genoptrykke disse blokke – kopimaskinen er opfundet – men spillet kan købes hos *piethein.com* som et flot brætspil i røget egetræ.

Riemanns Zetafunktion

Christian Berg

De to vigtigste matematikere, der har beskæftiget sig med Zetafunktionen, er Euler og Riemann. Den første fandt ud af, at funktionen hænger nøje sammen med primtallene. Den anden gik langt videre og studerede funktionen af en kompleks variabel. Riemann fremsatte den til dato ubeviste hypotese, at funktionens nulpunkter i den komplekse plan udenfor den reelle akse alle ligger på en lodret linie med realdel $\frac{1}{2}$. Desuden studerede han primtalsfunktionen $\pi(x)$, der angiver antallet af primtal mindre end x. Baseret på Riemanns arbejde blev primtalssætningen bevist i 1896. Den siger, at for store værdier af x er $\pi(x)$ omtrent lig med $x/\log(x)$.

I 1859 skrev Bernhard Riemann (1826–1866) et berømt arbejde: "*Om antallet af primtal under en given størrelse*". Mange af eftertidens store matematikere som Hadamard, von Mangoldt, de la Vallée Poussin, Hardy, Littlewood, Siegel, Harald Bohr, Selberg og Artin har i deres arbejder været inspireret af ideer fra Riemanns 8 sider lange afhandling, der nærmest må kaldes et resumé af hans forskning på området. Det er ikke let at læse Riemann. Når læseren møder en påstand, så kan det være noget som let eftervises, det kan være noget, som Riemann ønsker at bevise eller mener han har vist, og som først er blevet bevist årtier senere, og det kan være en formodning som til dato er ubevist. Men desværre kan det også være forkert, med mindre der stilles yderligere betingelser. Riemann var langt forud for sin tid. Det tog mindst 30 år før nogen virkelig fattede hans ideer, og da Siegel i 1932 undersøgte Riemanns efterladte papirer fandt han nye betydningsfulde resultater.

Man kan finde yderligere information om meget af det følgende ved at søge på internettet og læse Wikipedia artikler.

Eulers studier

I studiet af primtallenes fordeling spiller Riemanns Zetafunktion ζ en vigtig rolle. Funktionen var allerede studeret af Leonhard Euler (1707–1783), og den er defineret ved formlen

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{1}$$

For at forstå denne formel, hvor man lægger uendeligt mange reelle tal sammen, er man nødt til at præcisere, hvad man mener med udtrykket, som kaldes en uendelig række. Hvis man nøjes med at summere ved at tage N led med i rækken, altså ser på tallene

$$\zeta_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{N^x}, N = 1, 2, \ldots,$$

så er spørgsmålet hvad der sker, når vi lader N blive større og større. Det viser sig, at når $x \leq 1$ så vil $\zeta_N(x)$ nærme sig uendelig, dvs. kunne blive større end et hvilket som helst stort tal, bare N vælges tilstrækkeligt stor. Hvis derimod $x > 1$ så vil $\zeta_N(x)$ nærme sig et endeligt tal, som vi kalder $\zeta(x)$, når N bliver større og større. Vi siger, at rækken (1) er konvergent når $x > 1$, og at den er divergent når $x \leq 1$.

Euler fandt som den første ud af at $\zeta(2) = \pi^2/6$, hvor $\pi = 3{,}14159...$ er defineret som den halve omkreds af en cirkel med radius 1 (eller ækvivalent hermed som arealet af den tilhørende cirkelskive). Problemet at finde den eksakte værdi af $\zeta(2)$ blev i samtiden kaldt Basel problemet og det var åbent i knap 100 år, før Euler fandt værdien omkring 1735. Løsningen gjorde med et slag Euler berømt. Senere fandt Euler ud af at

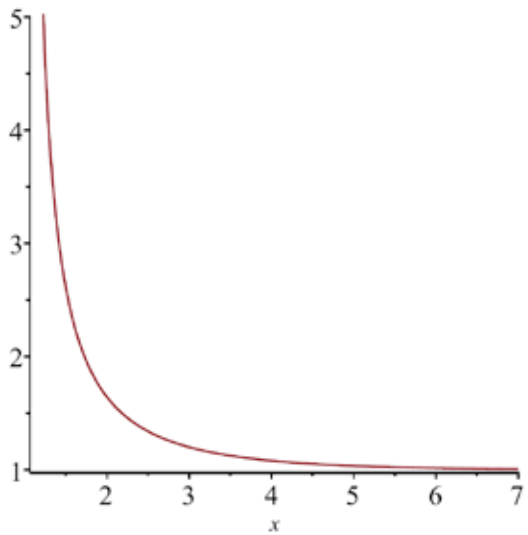
$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},$$

og han fandt endda en formel for $\zeta(2k)$ udtrykt ved det $2k$'te Bernoullital (se afsnittet herom nedenfor)

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Det skal understreges, at der ikke kendes nogen formel for ζ's værdier for de ulige heltal $3, 5, \ldots$.

Tegner man grafen for Zetafunktionen på det åbne interval $(1, \infty)$, ser man, at den aftager fra ∞ til 1.



Figur 1. Grafen for ζ på intervallet $(1, 7)$.

Euler opdagede også, at der er en sammenhæng mellem Zetafunktionen og primtallene $\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, dvs de naturlige tal større end 1, der ikke kan deles med andre naturlige tal større end 1 end tallet selv. Primtallene er byggestenene for alle

naturlige tal, idet ethvert naturligt tal større end 1 på entydig måde kan faktoriseres med udnyttelse af primtallene, fx

$$20328 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2.$$

Hvis vi stiller primtallene op i en følge $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \ldots$ (allerede hos Euklid er der bevis for, at der er uendeligt mange primtal), så fandt Euler ud af at

$$\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}}, \quad x > 1, \tag{3}$$

altså at tallene

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}}$$

nærmer sig $\zeta(x)$ når N bliver større og større. (Symbolet $\prod_{n=1}^{N} a_n$ betyder at man skal danne produktet af tallene $a_1, a_2, \ldots, a_N$.)

For at forstå at formlen blot er et udtryk for, at ethvert tal kan faktoriseres i primtal, skal vi udnytte den simple uendelige kvotientrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad 0 < q < 1. \tag{4}$$

Formlen betyder nemlig ved successivt at vælge $q = 1/2^x, q = 1/3^x, \ldots, q = 1/p_n^x$ at (3) kan skrives

$$\zeta(x) = \left(1 + \tfrac{1}{2^x} + \tfrac{1}{(2^2)^x} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3^x} + \tfrac{1}{(3^2)^x} + \cdots\right) \cdots \left(1 + \tfrac{1}{p_n^x} + \tfrac{1}{(p_n^2)^x} + \cdots\right) \cdots .$$

For at få bidraget $1/20328^x$ fra $\zeta(x)$ skal vi tage fjerde led $(= 1/(2^3)^x)$ fra første parentes, andet led $(= 1/3^x)$ fra anden parentes, første led (=1) fra tredie parentes, andet led $(= 1/7^x)$ fra fjerde parentes, tredie led $(= 1/(11^2)^x)$ fra femte parentes og derefter første led (=1) fra alle efterfølgende parenteser.

Euler bemærkede, at (3) for $x \to 1^+$ har den konsekvens at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

som på en stærk måde illustrerer, at der er uendeligt mange primtal, men de vokser langsommere end kvadrattallene n^2 da $\zeta(2) < \infty$.

Riemanns studier

Når funktionen ζ kaldes Riemanns Zetafunktion, er det fordi Riemann gik langt videre end Euler og studerede funktionen som en funktion af en kompleks variabel. For at forstå dette kræves kendskab til mængden af de komplekse tal $\mathbb{C}$. Det drejer sig om tal af formen $z = x + iy$, hvor x og y er reelle tal og i er et symbol, der opfylder $i^2 = -1$, så i og $-i$ er de to løsninger til andengrads ligningen $x^2 + 1 = 0$. Denne ligning har som bekendt ingen reelle løsninger og derfor kaldes i den imaginære enhed. Man kan sige at $i = \sqrt{-1}$ rent symbolsk, men der er jo ingen reelle tal hvis kvadrat er -1. Matematikerne begyndte at regne med komplekse tal i 1500-tallet, men først omkring år 1800 nåede man til fuld forståelse af de komplekse tal, bl.a. via den Dansk-Norske landmåler Caspar Wessel (1745–1818).

Man regner med komplekse tal som om det var sædvanlige tal, men skal benytte reglen $i^2 = -1$, og $x + iy$ skal fortolkes som $x + i \cdot y = x + y \cdot i$.

Således er

$$(2 + i5) + (3 + i2) = (2 + 3) + i(5 + 2) = 5 + i7,$$

$$(2 + i5) \cdot (3 + i2) = 6 + i4 + i15 + 10i^2 = 6 - 10 + i(4 + 15) = -4 + i19.$$

Det komplekse tal $x + iy$ kan repræsenteres ved punktet (x, y) i en plan med et retvinklet koordinatsystem. Det betyder, at 1 er enheden på abscisseaksen (= den reelle akse) og i er enheden på ordinataksen (= den imaginære akse) og planen kaldes den komplekse plan. For et komplekst tal $z = x+iy$ kaldes x for realdelen af z (skrevet $x = \Re(z)$), medens y kaldes imaginærdelen af z (skrevet $y = \Im(z)$). Det komplekse tal $z = x + iy$ har den numeriske værdi $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, som er afstanden fra $(0, 0)$ til (x, y) i planen. Medens de reelle tal kan identificeres med punkterne på en tallinie, kan de komplekse tal altså identificeres med punkterne i en plan.

Vi kan også betragte uendelige rækker $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ med komplekse led $z_n = x_n + iy_n$. En sådan række kaldes **konvergent**, hvis de endelige summer

$$\sum_{n=1}^{N} z_n, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

nærmer sig et fast komplekst tal $S = U + iV$, når N bliver større og større. Det kommer ud på, at de to rækker med reelle led $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ begge er konvergente med summer henholdsvis U og V. Hvis en række ikke er konvergent, så kaldes den divergent. Euler betragtede de elementære funktioner sin, cos, exp af en kompleks variabel ved at bruge uendelige rækker. For $z \in \mathbb{C}$ defineres

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

og alle tre rækker er konvergente for alle komplekse tal z. Indføres tallet e ved den uendelige række

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}71828\ldots,$$

er der gode grunde til at benytte skrivemåden

$$\exp(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

men det vil vi ikke komme nærmere ind på. Euler fandt sammenhængen

$$\exp(x+iy) = \exp(x)\left(\cos(y) + i\sin(y)\right), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

altså

$$\Re(\exp(x+iy)) = \exp(x)\cos(y),$$
$$\Im(\exp(x+iy)) = \exp(x)\sin(y).$$

Det leder til den forunderlige formel $\exp(i\pi) = e^{i\pi} = -1$.

Det er uproblematisk at definere $\zeta(z)$ for $\Re(z) > 1$ ved formlen

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \tag{5}$$

idet man definerer $n^z = \exp(z\log(n))$. Denne række er nemlig konvergent, når $\Re(z) > 1$, men divergent når $\Re(z) \leq 1$. Fra et geometrisk synspunkt er ζ altså defineret i halvplanen $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 1\}$, der ligger til højre for den lodrette linie $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 1\}$. Zetas værdier er visse komplekse tal. Det er imidlertid svært at forstå præcist hvordan funktionsværdierne opfører sig, og det har givet anledning til hundredevis af studier. Det skal nævnes, at formlen (3) også har mening og er rigtig, når x erstattes af et komplekst tal z med $\Re(z) > 1$. Der gælder altså at tallene

$$\zeta(z)\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right),$$

nærmer sig 1 når $N \to \infty$. Det har den konsekvens at $\zeta(z) \neq 0$ når $\Re(z) > 1$.

En af de største opdagelser i 1800-tallet var klassen af holomorfe funktioner, som er en speciel klasse af funktioner af en kompleks variabel med komplekse værdier. De tre hovedaktører i teoriudviklingen var Cauchy, Riemann og Weierstrass. At en funktion $f : G \to \mathbb{C}$ er holomorf i området $G \subseteq \mathbb{C}$ kan kortest bekrives ved kravet om, at differenskvotienterne

$$\frac{f(z+c) - f(z)}{c}$$

skal have en grænseværdi for alle $z \in G$, når den komplekse tilvækst c nærmer sig 0. Hvis dette er tilfældet, kalder man grænseværdien $f'(z)$, altså i symboler

$$\lim_{c\to 0}\frac{f(z+c) - f(z)}{c} = f'(z),$$

og $f'(z)$ kaldes den komplekse differentialkvotient af $f(z)$. Teorien er altså helt analog med differentialregning for funktioner af en reel variabel, men det viser sig at være en meget eksklusiv egenskab at være holomorf. Grunden ligger kort fortalt i, at ved differentiabilitet af en reel funktion, er tilvæksten c reel, dvs $z + c$ nærmer sig tallet z fra højre eller venstre, men når det drejer sig om komplekse tilvækster c, så vil $z + c$ kunne nærme sig z fra alle retninger i den komplekse plan.

Polynomier og de ovenfor definerede funktioner $\sin, \cos, \exp$ er holomorfe i hele $\mathbb{C}$ og Zetafunktionen er holomorf i den højre halvplan defineret overfor.

Sætning 1. Entydighedsssætningen for holomorfe funktioner *Lad f, g være to holomorfe funktioner i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ og lad $I \subset G$ være et kurvestykke. Hvis $f(z) = g(z)$ for alle $z \in I$, så gælder automatisk at $f(z) = g(z)$ for alle $z \in G$.*

For at sikre sig at to holomofe funktionerf, g defineret i hele $\mathbb{C}$ er ens, er det altså nok at vide, at de er ens for alle reelle værdier ($I = \mathbb{R}$) eller blot, at de er ens på et lille interval f.eks. $[3, \pi]$ eller på en nok så lille cirkelbue i planen.

Det er en utroligt dyb og vigtig sætning. Riemann opdagede, at Zetafunktionen kan defineres som en holomorf funktion i $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, så den passer med udtrykket (1) når $z = x > 1$. Af entydighedssætningen følger, at der kun er én måde at gøre dette på. Det følger også, at hvis man finder to forskellige måder at definere ζ på som holomorf funktion, der stemmer overens med (1), så må de to formler være lig hinanden. Det er for indviklet her at forklare, hvordan Riemann definerede Zetafunktionen i den venstre halvplan $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq 1\}$, men det skal nævnes, at han fandt den berømte **funktionalligning** for ζ

$$\zeta(z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-\frac{z}{2}} = \zeta(1-z)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\pi^{-\frac{1-z}{2}}, z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

der sammenknytter værdierne i z og $1 - z$.

Her optræder Eulers Gammafunktion Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad , \Re(z) > 0 \ ,$$

der har den simple funktionalligning

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Den skal iøvrigt bruges til at udvide Γ til en holomorf funktion i $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ med såkaldte poler for $z = 0, -1, -2, \ldots$ hvor $|\Gamma(z)| \to \infty$ når z nærmer sig en af polerne. (F. eks. er $\Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2)$.)

Af (6) kan man slutte, at ζ i halvplanen $\Re(z) < 0$ har nulpunkter hvor $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ har poler, altså netop i de negative lige tal $z = -2, -4, \ldots$. Resten af ζ's nulpunkter må ligge i strimlen $0 \leq \Re z \leq 1$. At der ikke er nogen nulpunkter på linierne $\Re z = 0$ og $\Re z = 1$ viste sig at være en væsentlig ingrediens i beviset for den berømte primtalssætning, som vi vender tilbage til nedenfor.

Zetafunktionen oscillerer vildere og vildere mellem de lige nulpunkter $-2k$, $k = 1, 2, \ldots$, når k vokser. Fx er (med 5 rigtige decimaler)

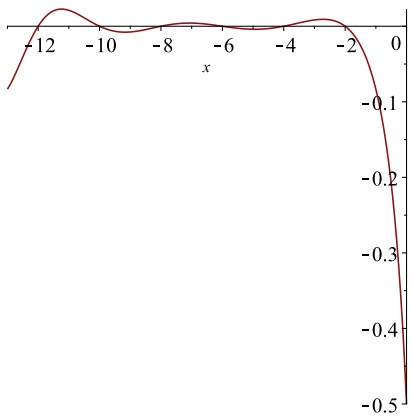
$$\zeta(-13) = -0{,}08333, \zeta(-15) = 0{,}44325,$$

$$\zeta(-17) = -3{,}05395, \zeta(-19) = 26{,}45621.$$

Man kan vise at $\zeta(0) = -1/2$ og på intervallet $(-2, 1)$ aftager ζ fra 0 til $-\infty$. Der er faktisk en formel for Zetafunktionens værdier i de negative heltal udtrykt ved Bernoullitallene B_n, nemlig

$$\zeta(-n) = (-1)^n\frac{B_{n+1}}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

De to formler (7) og (2) kan iøvrigt udledes af hinanden ved brug af funktionalligningen (6). Zetafunktionen er inkluderet i softwareprogrammet Maple, som er brugt til at tegne figur 2.



Figur 2. Grafen for ζ på intervallet $(-13, 0)$.

Primtalssætningen

Lad $\pi(x)$ betegne antallet af primtal $\leq x$, altså f.eks.

$$\pi(2) = 1,\ \pi(3) = \pi(\pi) = \pi(4) = 2,\ \pi(10) = 4,$$

$$\pi(100) = 25.$$

Primtalssætningen siger, at antallet $\pi(x)$ er tilnærmelsesvist det samme som $x/\log(x)$ når x er stor, i symboler

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{for} \quad x \to \infty, \tag{8}$$

og helt præcist betyder det, at udtrykket til venstre for $\sim$ divideret med udtrykket til højre for $\sim$ har grænseværdien 1, når x går mod uendelig, altså

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log(x)}{x} = 1.$$

At der ikke er nogen nulpunkter på linierne $\Re(z) = 0$ og $\Re(z) = 1$, og at (8) dermed gælder, blev vist af Hadamard og de la Vallée Poussin uafhængigt af hinanden i 1896. Langt senere er der givet et såkaldt elementært bevis for (8) af nordmanden Atle Selberg (1949). Det "elementære"betyder, at der ikke anvendes kompleks funktionsteori og Fourier transformation, men ellers er beviset ikke elementært.

Riemann hævdede også, at antallet $N(T)$ af nulpunkter for ζ i rektanglet $0 \leq \Re z \leq 1$, $0 \leq \Im z \leq T$ opfylder

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\ , \quad T \to \infty\ , \tag{9}$$

Det lykkedes først von Mangoldt i 1903 at vise (9). Derudover formodede Riemann, at *alle nulpunkter for ζ i strimlen $0 \leq \Re z \leq 1$ faktisk ligger på symmetrilinien $\Re z = \frac{1}{2}$*. Dette er den berømte og til dato stadig ubeviste **Riemann hypotese**.

Ifølge Clay Mathematics Institute er Riemanns hypotese et af de 7 Millennium Prize Problems, hvis løsning hver udløser en belønning på en million US-dollars.

Hardy beviste i 1914, at ζ har uendeligt mange nulpunkter på linien $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Bohr og Landau viste (også i 1914), at $N(T) \sim N_\varepsilon(T)$ for ethvert $\varepsilon > 0$ når $T \to \infty$, hvor $N_\varepsilon(T)$ er antallet af nulpunkter for ζ i rektanglet $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 \leq \Im(z) \leq T$, altså løst sagt, at nulpunkterne ligger tæt ved linien $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Bemærk, at funktionalligningen (6) viser, at hvis $\zeta = \frac{1}{2} + it$ er nulpunkt for ζ, så er også $z = \frac{1}{2} - it$ nulpunkt.

Den første substantielle numeriske information om ζ's nulpunkter i den kritiske strimmel skyldes den danske matematiker og aktuar J. P. Gram. I 1903 beregnede han alle ζ's nulpunkter i rektanglet $0 \leq \Re(z) \leq 1$, $0 \leq \Im(z) \leq 50$ og fandt, at der var 10 af dem og de lå alle på linien $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Det første var $\alpha_1 = \frac{1}{2} + i\,14{,}134725$, det sidste $\alpha_{10} = \frac{1}{2} + i\,49{,}773832$, idet imaginærdelene blev angivet med 6 decimaler. I 1925 kunne Hutchinson bekræfte, at alle ζ's nulpunkter med imaginærdel mellen 0 og 300 ligger på den kritiske linie, og der er 139 nulpunkter. Med brug af dagens hurtige computere ved man naturligvis, at alle nulpunkterne med imaginærdel mellem $-T$ og T ligger på den kritiske linie. Her er T et meget stort tal som år for år bliver større og større. Det betyder ikke, at Riemanns hypotese er rigtig, men kun at den bliver mere og mere sandsynlig.

I primtalsstudier møder man integrallogaritmen

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}\ , \quad x > 2,$$

Det er nemt at se ved partiel integration at

$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}\ ,$$

så primtalssætningen kan også formuleres som

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)\ .$$

Allerede Gauss observerede ved beregning som 15-årig i 1792, at $\mathrm{Li}(x)$ så ud til at være en god approximation til $\pi(x)$, og i mange år tydede numeriske beregninger på at $\mathrm{Li}(x) > \pi(x)$. Det var derfor en overraskelse, at Littlewood i 1914 kunne vise teoretisk, at der eksisterede store x så $\mathrm{Li}(x) - \pi(x) < 0$ og endda at udtrykket $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ skiftede fortegn uendeligt mange gange, når x gennemløb tallene fra 2 til uendelig. Der er dog ingen, der har været i stand til at angive et konkret tal x hvor $\mathrm{Li}(x) < \pi(x)$, men hollænderen te Riele viste i 1986, at der i intervallet $(6{,}62 \cdot 10^{370}, 6{,}69 \cdot 10^{370})$ findes mere end 10^{180} på hinanden følgende heltal x så $\mathrm{Li}(x) - \pi(x) < 0$.

Det er dernæst af interesse at undersøge hvor hurtigt

$$Q(x) := \left|\frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} - 1\right| \tag{10}$$

går mod 0 for $x \to \infty$.

De la Vallée Poussin viste i 1899 at

$$Q(x) < e^{-\sqrt{c \log x}}\ ,\ x \geq x_0$$

for passende c og x_0. Riemanns hypotese er ækvivalent med at udtrykket i (10) går mod 0 tilstrækkeligt hurtigt. Helt præcist har man:

Sætning 2. *Riemanns hypotese er ækvivalent med at der for ethvert $\varepsilon > 0$ gælder*

$$\lim_{x \to \infty} Q(x) x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = 0,$$

altså at $Q(x)$ går hurtigere mod 0 for $x \to \infty$ end $x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ uanset hvor lille ε er.

Bernoullital

Bernoullitallene $B_n, n = 0, 1, \ldots$ er en kompliceret følge af rationale tal, der kan defineres som $B_0 = 1,\ B_1 = -1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_3 = 0, B_4 = -1/30 \ldots$. Når B_k er udregnet for k op til $n-1$, så udregnes B_n ved formlen

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Man kan vise, at der gælder formlen

$$f(z) := \frac{z}{\exp(z) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\pi,$$

som også kan udtrykkes, at $B_n = f^{(n)}(0)$. Man kan vise at $B_{2k+1} = 0,\ k = 1, 2, \ldots$. Bernoullitallene har overraskende talteoretiske egenskaber, og de dukker uventet op i en række matematiske emner.

De følgende 2 lærebøger indeholder megen præcis information om ovenstående emner, men bøgerne kræver stor matematisk viden af læseren.

Litteratur

[1] H. M. Edwards (1974) *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York og London.

[2] P. Ribenboim (1996) *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag New York, Inc.

Christian Berg har undervist og forsket på Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet i mange år og er nu professor emeritus. Hans hovedinteresse er matematisk analyse og herunder harmonisk analyse og momentproblemer.

Ved uanbringelighed returneres bladet til afsender:
Matilde, Institut for Matematiske Fag,
Aarhus Universitet, Ny Munkegade, Bygning 1530,
8000 Århus C

POST B
PP DANMARK

Foredrag i Selskabet for Naturlærens Udbredelse SNU

Selskabet er stiftet i 1824 af H.C. Ørsted
Selskabets protektor er Hendes Majestæt Dronning Margrethe II

Forårsprogram 2020

Forårets tema er "H.C. Ørsted set i nutidigt perspektiv"

27 januar 2020 kl. 19.30 : H.C. Ørsted som folkeoplyser
v/ Professor emeritus Helge Kragh, Niels Bohr Institutet
Foredraget afholdes i Aud. 1 på H.C. Ørsted Instituttet, Universitetsparken 5, Kbh. Ø

17 februar 2020 kl. 19.30 : SWARM satellitter der måler jordens magnetfelt
v/ Professor Nils Olsen, DTU Space
Foredraget afholdes i Aud. 1 på H.C. Ørsted Instituttet, Universitetsparken 5, Kbh. Ø

9 marts 2020 kl. 19.30: H.C. Ørsteds rejsebreve
v/ Professor emeritus Andrew Jackson, Niels Bohr Institutet
Foredraget afholdes i Aud. 1 på H.C. Ørsted Instituttet, Universitetsparken 5, Kbh. Ø

30 marts 2020 kl. 19:30: H.C. Ørsted og farmacihistorien
v/ Dr.pharm. Poul R. Kruse, Dansk Farmacihistorisk Fond
Foredraget afholdes i Aud. 1 på H.C. Ørsted Instituttet, Universitetsparken 5, Kbh. Ø
Efter foredraget afholdes generalforsamling

20 april 2020 kl. 19.30: Om de 2000 ord H.C. Ørsted indførte i det Danske sprog
v/ Professor Frans Gregersen, Københavns Universitet
Foredraget afholdes i Aud. 1 på H.C.Ørsted Instituttet, Universitetsparken 5, Kbh. Ø
Efter foredraget uddeles H.C. Ørsted Medaljen til en inspirerende grundskolelærer.

OBS: Der må ikke parkeres ved hovedindgangen til Universitetsparken 5, og kun med særlig p-tilladelse andre steder i Universitetsparken. Der kan parkeres med Easypark på Nørre Allé.

Alle interesserede er velkomne til selskabets foredrag - det er ingen forudsætning, at man er medlem.
Se mere om selskabet på hjemmesiden: www.naturvidenskab.net eller på www.facebook.dk/SNU1824

Forespørgsler angående møderne kan rettes til:
Dorte Olesen, DTU Compute, Tlf.: 29926300 eller e-mail: snu@naturvidenskab.net