

mat

M A T I L D E

Tema:



Fremtidens gymnasium, fremtidens matematikere



NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR.

20

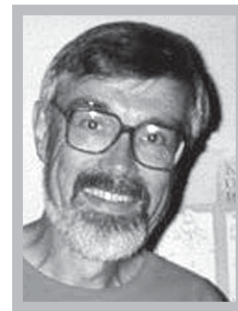
JUNI

2004

Fremtidens gymnasium, fremtidens matematikere



Af: Claus Jessen og
Kjeld Bagger Laursen,
temaredaktører



Dette nummer af Matilde dvæler ved temaet: Fremtidens gymnasium, fremtidens matematikere. De gymnasieklaser, der begynder i august 2005, får et gymnasieforløb, som er helt anderledes, end vi har været vant til. Særligt i det almene gymnasium, hvor de fleste universitetsstuderende i de matematiktunge uddannelser kommer fra, er ændringerne store både indholdsmæssigt og strukturelt. For matematik betyder det både ændringer i fagets egne krav til det faglige indhold og fagets arbejdsmetoder, samt i øgede krav til forpligtende samspil med andre fag, fysik, samfunds-fag, biologi, historie for blot at nævne nogle.

Faget selv bliver ikke længere baseret på et centralt defineret fast pensum, men på en central kerne plus en lokalt tilpasset udfyldelse. Der bliver også lagt større vægt på IT-basering, på eksperimentel tilgang til indsigten og til tema- og projektførelse.

Fagets samliv med andre fag bliver markant større, og dette samliv bliver *styret*, dels gennem nyskabelserne 'naturvidenskabeligt grundforløb' og 'almen studieforberedelse' og dels gennem studieretningernes fagkonstellationer. Dette stiller nye krav til matematiklærerne i gymnasiet, og dette fremstilles i Claus Jessens og Flemming Clausens artikel om fremtidens matematik i gymnasiet.

Fremtidens matematiker vil selvfølgelig nu som i fremtiden være et produkt af den måde faget fungerer i gymnasiet og af den uddannelse, han eller hun får på universiteterne.

Fremtidens matematiker vil – ganske som nutidens – være af mange forskellige afskygninger. Måske forsker på et universitet. Eller privatansat i en analytikerstilling eller som systemudvikler. Og selvfølgelig kan han/hun være gymnasielærer. Et centralt spørgsmål er, om vi også i fremtiden er rustede på universiteterne til at uddanne til så bredt et spektrum af muligheder?

De tre hovedfelter rekrutterer med forskellig kraft – og tiltrækker med forskellig kraft. Forskningsverdenen står stærkt i mange studerendes bevidsthed – trods meget lavt behov og trods rystende ringe egentlige karrieremuligheder. Udviklingen har lige siden 60'ernes studiereform, der erstattede skoleembedseksamen + konferens med scient.-graden, favoriseret universitetsforskningsperspektivet. Dette skyldes, at fokus i 60'erne flyttedes fra opfyldelse af undervisningsverdenens behov til dyrkelse af et forskningspræget værdisæt. Og vi må erkende at den nuværende høje grad af accept af forskningsorienteringen ikke bare er et udtryk for kvalitetssans blandt vore studerende, men et resultat af, at de er præget af dette værdisæt. Ændrer vi miljøets værdinormer og perspektiv, får vi også ændret studerendes indstilling til, hvad der er væsentligt og hvad der er relevant.

Erhvervslivet som mulig karrierevej for matematike-

re har vundet meget frem, og det virker som om rekrutteringen til den slags karriereforløb har et nærmest uanet stort potential.

Undervisningsvejen som karriereforløb er for matematik stadig relativ populær. Vel næsten 40 % af en kandidatårgang med hovedfag i matematik går til gymnasiet (i andre fag har det et væsentligt mindre omfang, fysik, fx). Men behovet for lærere er meget stort og forventes i fremtiden at blive endnu større – meget større end universiteterne kan dække.

Der er mange forklaringer på at vi ikke kan dække behovet. Nogle af dem har at gøre med faktorer som vi ikke har stor indflydelse på. Men vi har ikke haft stor nok vilje til at erkende at det vil kræve en ganske anden indsats end den hidtidige for bedre at sikre denne dækning. Der skal rekrutteres flere studerende – og der skal uddannes flere. Det betyder både 'bredere' rekruttering og bredere uddannelse end vi hidtil har praktiseret. Endvidere betyder det – så længe ungdomsårgangene er små og uddannelsesstilbudene så mangfoldige – at der navnlig skal arbejdes mere målrettet på at fastholde de studerende vi modtager. Den fastholdelse kan hjælpes på mange måder, og de skal alle have en chance for at komme i spil. Her koncentrerer vi os om den fødekæde der består af gymnasieelev -> universitetsstuderende -> gymnasielærer.

Vi skal arbejde på at glorificere lærergerningen. 'Glorificere' kan lyde misvisende, for det drejer sig jo ikke bare om et kosmetisk orienteret pr-nummer. Når ordet alligevel bruges, er det for at gøre opmærksom på vigtigheden af en holdningsændring. Samtidig skal ordet 'lærergerning' også ses i et bredere perspektiv, idet der her tænkes på formidling af matematik bredt forstået og ikke kun i snæver gymnasiesammenhæng. Vi ved alle sammen at det generelle behov i samfundet for matematisk indsigt er meget stort. Den uomgængelige – og samtidig, for universiteterne, egoistiske – konklusion er klart at behovet for matematiklærere er meget stort. Vi er forpligtede til at gøre hvad vi kan for at fylde dette behov. Og vi står os ved at gøre hvad vi kan: Der skal arbejdes på at tage seriøs formidling af matematik, lærergerningen og dens professionalisering alvorligt. Det betyder at den professionelle lærers virkemidler skal have en chance: en uddannelse der bringer fag-faglighed i spil med fagdidaktisk indsigt. Carl Winsløw har mere om dette, i artiklen "Matematiklæreruddannelse i Danmark – et udviklingsområde".

Flere af universiteterne har allerede ageret i denne erkendelse, Aarhus fx. Og der er andre der har reformeret deres uddannelsessystem, bla. for at tilgodese den slags moderniseringsbehov vi taler om her, KU's naturviden-

fors. side 32

**Matilde – Nyhedsbrev for
Dansk Matematisk Forening
medlem af European
Mathematical Society**

Nummer 20 – Juni 2004

Redaktion:

**Bent Ørsted, SDU
(ansvarshavende)**

**Claus Jessen
Kjeld Bagger Laursen
(TEMAREDAKTØRER)**

**Carsten Lunde Petersen, RUC
Jørn Børling Olsson, KU
Poul Hjorth, DTU
Mikael Rørdam, SDU
Carl Winsløw, KU**

Adresse:

**Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø**

**Fax: 3532 0704
e-post: matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk**

ISSN: 1399-5901

**Matilde udkommer 4 gange om
året**

**Indlæg til næste nummer skal
være redaktionen i hænde
senest 24. september 2004**

Indhold:

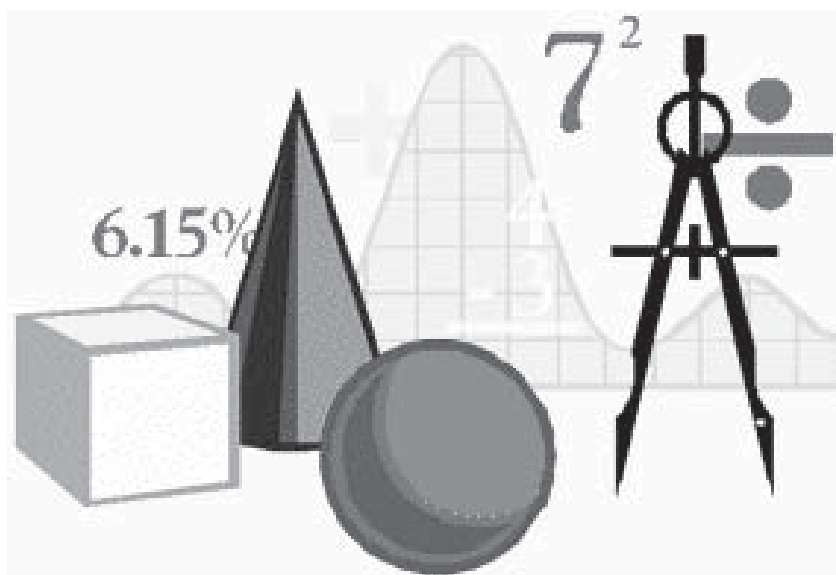
TEMA: Fremtidens gymnasium, fremtidens matematikere

<i>Carl Winsløw</i> Matematiklæreruddannelse i Danmark – et udviklingsområde	4
<i>Flemming Clausen og Claus Jessen</i> Forandring fryder ?	6
<i>H.C. Hansen og Kjeld Bagger Laursen</i> Matematik og omgivelserne – i uddannelsesperspektiv	8
<i>Bjørn Felsager</i> IT-værktøjer i fremtidens matematikundervisning i gymnasiet ...	10
<i>Søren Eilers</i> Eksperimentel matematikundervisning	12
<i>Søren Antonius</i> Matematiklærer og gymnasireformen	14
<i>Philip J. Davis</i> A Letter to Christina of Denmark	16
<i>Else Høyrup</i> Sofja Kovalevskaja (1850-1891): Verdens første kvindelige, professionelle matematiker	21
<i>Nekrolog</i> Flemming Damhus Pedersen	27
<i>Mindeord om matematikeren</i> Gert Kjærgård Pedersen	28
Uddannelsesfronten	31
Boganmeldelser	33
MatematikerNyt	34
Begivenheder	35
Aftermath	37

Af: Carl Winsløw, Center for
Naturfagenes Didaktik, KU
email: winslow@naturdidak.ku.dk



Matematiklæreruddannelse i Danmark – et udviklingsområde



Hvordan bør fremtidens danske matematiklærer uddannes? I dette nummer af Matilde stilles spørgsmålet mhp. gymnasiet. Inden vi begiver os ud i at skitsere og begrunde et muligt svar, må vi lige se på forudsætningerne.

Læreruddannelse betyder på dansk – i det mindste i daglig tale – den type uddannelse, som foregår ved lærerseminarierne (som nu er en del af de nye CVU'er). Altså uddannelse af lærere, som underviser i en lang række forskellige fag i folkeskolen. Denne uddannelse består af almene fag (pædagogik, psykologi, livsoplysning mv.), praktik og fire liniefag. Er matematik et af liniefagene, udgør studiet heraf – som også indeholder fagdidaktiske elementer – 0,7 årsværk.

Uddannelsen af gymnasielærere foregår derimod ved universiteterne. Matematik vil normalt indgå med mellem 2 og 4 årsværk, der vel at mærke er "ren" faglighed – dertil kommer så pædagogikum, hvor der indgår en form for praktik samt kortere kurser i pædagogik og fagdidaktik, som retter sig særlig mod gymnasieundervisning. I den nuværende ordning kan der desuden indgå supplerende faglige kurser i matematik.

Der er tale om to meget forskellige uddannelsesforløb. Begge rummer dog på deres måde (og i meget forskelligt omfang) flg. tre faglige elementer (cf. [1]):

- (1) matematik ("fag-faglighed")
- (2) matematikdidaktik (om undervisning i matematik)
- (3) pædagogik (om uddannelse og opdragelse generelt).

Forskellene knytter sig dels til elementernes indhold, volumen og placering i uddannelserne, dels til den måde, hvorpå de relateres til hinanden og til "praksis" (i undervisningssammenhæng og i samfundslivet i øvrigt). Dertil kommer naturligvis forskellen mellem at forberede til undervisning i to og i fire fag.

Så vidt det indledende overblik. I praksis rejser spørgsmålet sig dog: hvorfor denne enorme forskel mellem læreruddannelse til to niveauer, der i stadig højere grad fungerer – og skal fungere – som to dele af samme system? Svaret er, for mig at se: institutionel inertie og særinteresser. Der er ingen rationel begrundelse for, at læreren i 9. klasse og læreren i 1.G ikke har mere sammenlignelige uddannelser. Tilsvarende uddannelser og overgange i udlandet rummer i øvrigt ingen sidestykker.



For så vidt angår gymnasielærernes uddannelse generelt ligger den store udfordring i at styrke samspillet mellem videnskabsfag, pædagogik og didaktik, og disses samspil med praksis. Rammen om en dansk læreruddannelse til dette trin kunne meget vel være en kandidatuddannelse ved universiteterne, der – på basis af en fagfaglig (og helst to-faglig) bacheloruddannelse udviklede de tre elementer i samspil og med henblik på undervisningspraksis, gerne med kortere praktikforløb. Overgangen fra akademisk studium til lærergerning ville derved blive mere naturlig, samtidig med at den faglige basis i didaktik og pædagogik kunne styrkes. Desuden ville en karriere som underviser – særlig i de ”hårde” naturvidenskabelige fag – blive en mere synlig og accepteret del af uddannelsesperspektivet – og dermed rekrutteringsgrundlaget. I parentes bemærket kunne variationer over denne struktur – ligesom i udlandet – udgøre en udmærket model for læreruddannelse også til ”mellemskoleniveau” (6.-9. klasse).

For matematik specifikt skal der sættes ind på at målrette uddannelserne på alle tre områder (matematik, matematikdidaktik og pædagogik), og at gøre det på en måde, der hænger sammen. Matematik er jo både et videnskabsfag og et undervisningsfag. Det andet følger ikke af det første. Det er væsentligt – og en stor styrke ved danske gymnasielæreres uddannelse – at matematiklærere er fortrolige med videnskabsfagets hovedområder og metoder. I en vis forstand handler den nødvendige udvikling af uddannelserne om at forholde sig mere professionelt også til undervisningsfaget. At blive en god matematiklærer behøver ikke at være et mirakel, som det overlades til den enkelte kandidat at udvirke gennem de første års konfrontation med praksis. Og selvom pædagogikumlignende konstruktioner utvivlsomt fortsat vil være nødvendige, er der særdeles gode argumenter for allerede i den primære uddannelse at påbegynde arbejdet med *undervisningsfaget* matematik. Dels rent praktiske argumenter: vi har i dag en omfattende *viden* om matematikundervisning og matematiklæring, som det er naturligt og (i det mindste med de nuværende rammer) nødvendigt at påbegynde formidlingen af på kandidatniveauet. Dels mere normative argumenter vedr. det samlede billede af matematik, som uddannelsen formidler: at beskæftige sig med matematik som undervisningsfag tilføjer en akademisk bredde i uddannelsen, som er af selvstændig værdi, på samme måde som studier af matematikkens historie, filosofi, anvendelser, etc.

Mest overraskende vil det måske være for nogle, at uddannelsernes rent *faglige* del skal styrkes. Det drejer sig typisk ikke om at de studerende ikke når langt nok, i betydningen ”avanceret matematik”. Det drejer sig om at videreudvikle de studerendes indsigt, kunnen og dømmekraft i forhold til elementær matematik. Lad mig illustrere hvad jeg mener med en episode fra virkeligheden: to matematikstuderende på anden del har sat sig for at undersøge hvordan funktionsbegrebet indføres i forskellige gymnasielærebøger. Et indledende eksempel, som optræder i en af lærebøgerne, forekommer dem direkte fejlagtigt. Der er tale om en simpel (og naturligvis konstrueret) model for sammenhængen mellem prisen for et kilo tomater (p), og antal solgte kilo (N). Modellen er en aftagende lineær funktion $N(p)$ med en positiv værdi i 0, og med $N(30) = 0$. ”Det er meningsløst”, finder de stude-

rende. ”Hvem vil dog betale 30 kr. for 0 kg tomater!” Det er på en måde ikke de studerendes fejl. Det er succesfulde studerende, som har gennemført første dels hurtige progression og abstraktion. Men det er et spørgsmål om *forståelse af elementær matematik* [2], som ikke automatisk følger af et klassisk universitetsstudium i matematik, men som de får brug for som gymnasielærere. Denne forståelse bør studiet hjælpe dem med at udvikle.

Som anført ovenfor skal fremtidige lærere også allerede i deres studium tilegne sig grundlæggende matematikdidaktiske begreber, metoder og resultater. Det drejer sig dels om at udstyre dem med begrebslige værktøjer som muliggør systematisk refleksion over planlægning, gennemførelse og resultater af egen undervisning, dels om at sætte dem i stand til at forholde sig til bredt spektrum af tekster som er relevante for matematikundervisningen (herunder lærebøger, læreplaner og forskningsartikler). Et velafprøvet sæt af sådanne værktøjer udgøres af Brousseaus teori om didaktiske situationer [se fx ”Uddannelsesfronten” i dette nummer], som ret direkte kan knyttes til den førnævnte videreudvikling af den studerendes egen forståelse af elementær matematik. De studerende bør også stifte bekendtskab med andre og mere pragmatiske dele af matematikdidaktikken, fx vedr. nye arbejdsformer, tværfaglighed og IT-brug i matematikundervisning (se fx [3]) – som alle er temaer, der aktualiseres yderligere af den kommende gymnasiereform. Og det er naturligvis væsentligt at der arbejdes med at sætte teoridannelser og metoder i forhold til matematikundervisningens praksis og rammer i det danske gymnasium.

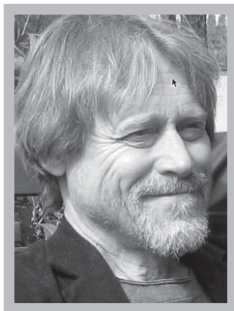
Almen pædagogik fjerner os endnu et skridt fra det klassiske matematikstudium. Allerede i forbindelse med refleksioner over matematikundervisningen og dens forhold til andre fag vil elementer herfra naturligt kunne introduceres, men det forekommer måske naturligt at denne del af uddannelsen i hovedsagen knyttes til og foregår sideløbende med de første års praksis (pædagogikum mv.). Den skarpe skillelinie mellem uddannelse og arbejde er i øvrigt generelt under opblødning. Efter- og videreuddannelse – både pædagogisk, fagdidaktisk og fagfaglig – vil under alle omstændigheder blive en mere almindelig del af gymnasielærernes karriere.

Referencer

- [1] Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: a psychological topology of teachers' professional knowledge. In: R. Biehler et al., *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*, 73-78. Dordrecht: Kluwer.
- [2] Ma, Liping (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah NJ: Erlbaum.
- [3] English, L. (ed., 2002) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah NJ: Erlbaum.

Forandring fryder ?

Af: Flemming Clausen, Nørre
Gymnasium, email:
flemming.clausen@skolekom.dk



og

Claus Jessen, Frederiksberg
Gymnasium, email:
claus.jessen@skolekom.dk



Gymnasireformen stiller nye krav til lærerne – også til matematiklærerne. Og det er både faglige og pædagogiske krav. Ikke alle er lige begejstrede.

I august 2005, altså om godt og vel et år, starter eleverne i et forandret gymnasium, som er resultatet af et meget bredt politisk forlig, som blev indgået for et år siden. Undervisningsministeriet arbejder på højtryk på bekendtgørelser og fagbeskrivelser – de såkaldte læreplaner. Reformen lanceres som den største reform siden 1903-reformen, hvor sproglig og matematisk linie indførtes. Og det er rigtigt, at der er tale om meget store ændringer. Ændringer som vil gribe ind overalt: de enkelte fag, i elevernes valg af fag, i skolens tilrettelæggelse af undervisningen, i samarbejdet mellem skolens lærere.

Det hævdes, at reformen vil betyde en styrkelse af det faglige niveau, noget Ulla Tørnæs igen og igen fremhæver. Men en styrkelse af det faglige niveau betyder her ikke kvantitativt mere af fagene, men at fagene skal have et kvalitativt løft uden flere ressourcer. Det er ideen, at fagene skal tænkes i helt nye rammer og at deres rolle i gymnasiet skal fornyes. Derfor kan reformen set fra lærernes synspunkt opleves som lidt af en revolution. Denne kan endda opleves som unødvendig, idet der ikke findes noget bevis for, at såkaldte kvalitative løft er reelle, og matematik i gymnasiet fungerer jo tilsyneladende udmærket. Men nu er reformen vedtaget, så lad os se på, hvori ændringerne består.

Faglighed og samspil mellem fagene

Styrkelsen af det faglige niveau skal ske på en utraditionel måde. I stedet for at fordybe sig og isolere sig i sin egen faglige kerne, skal fagene nu åbne sig mod hinanden og omverdenen, hvorved den brede faglighed og fa-

genes perspektiver skal styrkes. Fagene skal opdyrke deres omverdensbeskrivelse og bidrage til at give eleverne en mere helhedspræget uddannelse. Samtidig skal elevernes interesse for matematik og de naturvidenskabelige fag styrkes, således at flere fatter interesse nok til at give sig i kast med studier, hvor indholdet af matematik og naturvidenskab vejer tungt. Den bredere faglighed, hvor fagenes samspil bliver styrket, forventes at sætte de naturvidenskabelige fag i et nyt lys, der vil give dem mere appeal hos de moderne unge. Dette samspil mellem fagene lægges i faste rammer i gymnasiebekendtgørelsen. Dels beskrives fagene i gymnasiet ved målbeskrivelser, der er tilpas åbne til, at skolerne lokalt kan tilrettelægge det faglige samspil - også med inddragelse af moderne arbejdsformer fx projektarbejde. Dels afsættes der særlige timer til dette, idet der er forlods taget 10 % af alle fagenes timetal (og i det første halve år 20%) til en timeramme, *Almen studieforberedelse*, som skal bruges til dette samspil. Desuden stilles der krav om et udvidet samarbejde mellem de studieretningsfag, som skolerne udbyder, og eleverne vælger. Det forventes, at matematik ofte vil forekomme som studieretningsfag med de samarbejdsforpligtelser, dette medfører.

Hvad betyder samspillet for matematik?

Når matematik skal indgå i samspil med andre fag, vil perspektivering af matematik og matematiske perspektiver få en meget større vægt end hidtil, hvor undervisning i den "rene" matematik har været fremherskende. Nu skal matematikkens historiske og filosofiske betydning have vægt og indgå i samspil med bl.a. humanistiske fag (historie, filosofi og dansk). Det vil ikke være nok at nævne berømte matematikere og fortælle en anekdote med jævne mellemrum, men nu skal der tilrettelægges undervisningsforløb med det sigte at give en lodig beskrivelse af episoder fra matematikkens historie i samspillet med den filosofiske og historiske udvikling. Eksempelvis kunne Euklids rolle studeres ud fra spørgsmål som: Hvorfor opstår der netop i det antikke Grækenland behov for matematiske beviser? Hvilken rolle spiller Platons filosofi? Og demokratitankerne i tiden? I et sådant forløb kunne man både arbejde med Euklids enestående værk og den perspektivering, der ligger i at sammenholde det nyskabende i værket med kulturelle, samfundsmæssige og filosofiske problemstillinger i den historiske periode, hvori det blev skabt. Man kunne også forestille sig, at man i undervisningen på de højere niveauer undersøger forskellige opfattelser af, hvad matematik egentlig er sammenlignet med andre videnskaber, og derigennem inddrage matematisk filosofi og videnskabs-teori..

Ligeledes er det et krav, at matematik i studieretningerne i samspil med andre fag (fx fysik, geografi, kemi, biologi, samfundsfag, musik, billedkunst) skal belyse problemstillinger fra virkeligheden. Anvendelse af matematik i andre fag vil således få langt større betydning end hidtil, idet opstilling af matematiske modeller kommer til at bygge på faglig viden inden for de fag, som modellerne omhandler, samtidig med at det også bliver et krav, at rækkevidde og konsekvenser af modellerne skal vurderes. Matematiske modeller bliver ikke blot eksempler på matematikanvendelser, men bliver nu selve kernen i



sådanne undervisningsforløb. Eksempelvis bliver befolkningsvækst ikke blot en illustration af eksponentiel eller logistisk vækst, men et emne, hvor både matematik, geografi, biologi og historie/samfunds-fag alle bidrager lige-
ligt til at belyse *emnet*.

Dette vil stille to typer af krav til matematiklærerne. Dels skal de beherske de nye områder, som de faktisk ikke er uddannet i, nemlig historisk/filosofiske perspektiver samt anvendelser, dels skal de til at samarbejde med lærere fra andre fag, dvs. de skal kende til mulighederne i de andre fag, men det betyder selvfølgelig også, at de andre fags lærere ligeledes skal kende til matematikkens muligheder i deres fag. Den omstilling, som ligger i reformens krav til øget samarbejde mellem fagene, vil både kræve tid og energi, men indebærer også muligheden for at opdage nye sider af matematikken og for indblik i andre fag, som – hvis reformen lykkes – kan tilføre såvel den enkelte lærers undervisning som gymnasieundervisningen som helhed ny energi og måske endda begejstring.

CAS-revolutionen

Med denne reform skal eleverne arbejde med avancerede matematikprogrammer eller lommeregner, der kan udføre symbolsk algebraisk manipulation, og der åbnes op for, at sådanne hjælpemidler kan medbringes til eksamen. Dette kommer til at betyde en stor udfordring for matematikundervisningen, fordi en række opgaver, der indtil nu er blevet brugt megen tid på at træne, her-efter må forekomme overflødige, når programmer og maskiner nemt, hurtigt og pålideligt kan udregne fx differentialkvotienter og stamfunktioner samt løse differentia-ligninger. Når eksercitsen handler om færdigheder af lignende type som kvadratrodsuddragning, polynomiers division, matriksmultiplikation eller invertering af ma-tricer, er det givet vis ikke noget problem at skære ned på træningen. Men vi ved også, at opgaveregning er væ-sentlig for begrebstilegnelsen, og det er ikke ganske klart, hvor få differentialkvotienter eller tangenter man kan nøjes med at bestemme ved håndkraft, når man skal for-stå begrebet differentialkvotient. Og begreberne skal ele-verne stadig væk lære at forstå. Det er både forudsæt-ning for at kunne betjene sig af programmerne, for at kunne anvende begreberne til opstilling af modeller og for at kunne hæve sig op på et højere niveau, hvor begre-berne selv bliver de genstande, man manipulerer. De ændringer af undervisningen i matematikfaget, der kom-mer til at udspringe af dette problemfelt, vil nok være dem, der af lærerne vil opfattes som de mest fremmed-artede efter reformen. At omlægge undervisningen til at arbejde mere med forståelsen af de matematiske be-greber vil ændre matematikfagets fremtræden funda-mentalt. Pædagogisk set indebærer det, at der bliver lagt endnu større vægt på elevens eget arbejde med tilegnel-sen af de matematiske.

Nye lærerroller

Når der nu skal arbejdes intenst med elevernes begrebs-tilegnelse, vil lærerrollen ændres. Nu vil eleverne sidde ved computeren og benytte interaktive programmer og herved træne de matematiske begreber. Meget bevisgen-

nemgang vil erstattes af den eksperimenterende arbejds-form, der får meget mere plads. Selvfølgelig skal det eks-perimenterende ikke erstatte beviserne. Arbejdet ved computeren og det eksperimenterende skal være en træ-ningsplads, hvor begreberne styrkes og konsolideres, og hvor eleverne vænner sig til begreberne og går på opda-gelse i det genstandsområde, begreberne omhandler. Desuden vil en større del af arbejdet skulle foregå i pro-jektlignende forløb, hvor læreren optræder i rollen som vejleder i samarbejde med lærere fra andre fag, og det er noget andet end udelukkende at være den faglige for-midler af sit eget fag ved tavlen.

Har matematik nu en fremtid som fag i gymnasiet?

Mange vil nok spørge, om der med disse ændringer over-hovedet er matematik, der er værd at tale om, i gymnasiet. Når der nu skal være tid til at træne de matematiske per-spektiver, vil det så ikke gå ud over det pensum, man kan nå, og vil de nye computerprogrammer, der er på vej til at automatiseres mange af de traditionelle færdigheder, ikke overflødiggøre matematikundervisningen i gymnasiet? Det er rigtigt, at der er store dele af pensum, der forsvinder, og det kunne tænkes, at de fag, der anvender matematik hur-tigt selv kunne opstille modeller og lave beregninger i dis-se ved hjælp af de avancerede lommeregner. Så kunne matematikundervisningen blot reduceres til et kursus i ta-steoperationer på lommeregneren. Sådan vil det imidlertid ikke gå. Der er stadig behov for at lære matematik og at lære om matematik, fx at verden kan beskrives med tal og sammenhænge mellem tal. Der er også behov for at kende matematik som fagområde, hvor man er klar over, hvilke spørgsmål det er relevant at stille inden for faget, og hvilke svar man kan forvente. Det er blot rutinearbejdet med "at regne stykker", der får en mindre og ændret rolle. Det bli-ver det ikke nemmere af for eleverne, for det at forstå be-greberne er nu en gang vanskeligere end blot at løse en ru-tineopgave.

Konsekvenser for matematiklæreruddannelsen

Disse ændrede krav til matematiklærerne i gymnasiet vil betyde, at matematiklæreruddannelsen nu vil virke me-re skæv i forhold til matematiklærerjobbet, end det ople-ves i dag. Nu vil det ikke være nok for matematiklære-ren at have et stort fagligt overskud, sådan som det er tilfældet nu. Lærerne skal foruden det faglige overskud også vide meget om matematikkens historiske og kultu-relle betydning, ligesom hun skal kende en del til mate-matiske modeller. Endvidere er det vigtigt med en solid didaktisk ballast som lærer, hvis man skal kunne tilrette-lægge undervisningen i de nye rammer i gymnasiet. For slet ikke at tale om lærerne sociale kompetencer, såsom evnen til at indgå i lærerteams og samarbejde om opstil-ling af kompetencemål for undervisningsforløb i fælles-skab med andre fags lærere. Nu kan alle disse krav jo ikke lægges ind i matematikstudiet, men man må er-kende, at historisk/filosofiske perspektiver og anvendel-ser, samt didaktiske problemstillinger må få en afgøren-de større vægt.

Matematik og omgivelserne - i uddannelsesperspektiv

Vi har i de seneste måneder haft fornøjelsen af at være med i læreplansarbejdet i matematik for det almene gymnasium og HF. Vore interesser som aftagere af studenter er ikke altid sammenfaldende, og vi modtager typisk matematikstuderende fra forskellige ender af karakter-skalaen fra 6 til 13. Det gav os forskelligt udgangspunkt, men heldigvis konvergerer arbejdet – også med de øvrige i udvalgene – så resultatet, der snart kan offentliggøres, repræsenterer udbredt enighed inden for de givne rammer. Vi vil i det følgende forholde os mere principielt til ungdommens matematikuddannelse i forhold til omgivelsernes forskellige krav.

Dannelsesperspektivet

Der står i gymnasie- og HF-loven, at uddannelsen primært sigter mod videregående uddannelser og derfor skal udvikle den unges faglige og almene studiekompetencer. Men loven medtager også rene dannelsesmål: "Uddannelsen skal have et dannelsesperspektiv med vægt på elevernes udvikling af personlig myndighed. Eleverne skal lære at forholde sig reflekterende til deres omverden". Uddannelsen skal tillige udvikle elevernes kreative og innovative evner og deres kritiske sans.

Ved siden af disse mål for den mere individuelle dannelse – og lige så klart – står de demokratiske dannelsesmål: "Uddannelsen og skolekulturen som helhed skal forberede eleverne til medbestemmelse, medansvar, retigheder og pligter i et samfund med frihed og folkestyre. Undervisningen og hele skolens dagligliv må derfor bygge på åndsfrihed, ligeværd og demokrati". Disse formuleringer findes også i folkeskoleloven og viser, at de to skoleformer har fælles overordnede mål også hvad denne almindendannende opgave angår.

Matematik og den personlige dannelse

Matematik (på mindst C-niveau) bliver igen et obligatorisk fag for alle på de gymnasiale uddannelser, ganske som for 100 år siden, med Almenskoleloven af 1903 hvor man krævede matematik på den sproglige linie.

Sigtet var den gang klart almindendannende. Undervisningens formål var ikke at bibringe eleverne et omfattende kendskab til matematik, "men gennem stringente Betragtningssmaader at skole deres Tænkeevne". Denne opfattelse af matematik som særlig velegnet til opøvelse af tænkemusklen skulle dog snart blive udfordret. Allerede rektor Tommy Bonnesen, der vel var blandt dem, der bedst kunne lære sine elever at tænke, måtte ironisk skrive:

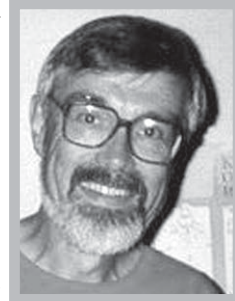
"Og heldigt er det for Matematiklæreren, at de paa-staaede Resultater er af en saa fin, aandelig Natur, at det kun vanskeligt kan kontrolleres, om de er opnaaede eller ej, og endnu vanskeligere, om de naas bedre ved den matematiske end ved andre mulige Fremgangsmaader".

Af: H.C. Hansen Københavns Dag-
og Aftenseminarium, email:
Hans.Christian.Hansen@skolekom.dk



og

Kjeld Bagger Laursen, Københavns
Universitet, email:
laursen@math.ku.dk



Skønt vi siden hen er blevet mere skeptiske i vor tro på matematikkens virkninger på den almindelige tænk-somhed, så skal faget altså nu sammen med de andre fag bidrage til elevens "kritiske sans" i det nye gymnasium. Hvis faget nu og da har svært ved at leve op til dette, så må faget til enhver tid sørge for ikke at fremme tankeløsheden, og her ligger der faktisk en reel risiko.

Væk med "formelfiskeri"

Den bedste tredjedel i en gymnasieklasse kan klare meget. Men hvis den svageste tredjedel udsættes for en vel-fyldt og detaljeret læseplan, så kan der opstå formelfiskeri. Det er sådan set blot en nyttig overlevelsesstrategi: Man lærer sig et arsenal af formler, og når man stor overfor et nyt problem, fisker man efter den formel der klinger bedst i situationen. Tidligere kunne eleven endda være så heldig, at der i selve opgaveformuleringen kunne ligge koder, der fremmede det rigtige formelfiskeri i arsenalet eller formelsamlingen. Her er en lille historie fra læreruddannelsen som kan illustrere fænomenet:

Vi er på første år og har på holdet lige gennemgået procentregning med stor vægt på forståelse og mange repræsentationer af samme sagsforhold. Vi har ikke i denne omgang arbejdet med handelsregning, for det "har de jo lært tidligere". Men læreren stiller denne opgave i et afleveringssæt for lige at tjekke at de kan det: Hansens Boghandel sælges kun to bøger:

Titel Matematik i læreruddannelsen Gøngehøvdingen		
Købspris	158	112
Salgspris	240	168

På hvilken beregnes den største procentvise avance?

75% af klassen griber det galt an og sammenligner 158/240 og 112/168. Det er klart ikke de allerstærkeste matematikere fra Gymnasium og HF, vi har her, men de fleste har dog taget A- (35%) eller B (50%) niveau og en mindre gruppe (15%) kun C niveau.

Læreren spørger hvorfor de regner det forkert ud. Det lader til, at de kobler omtanken fra, skønt det faktisk har været det bærende for et halvt års undervisning. De gri-



ber instrumentelt til nærmeste formel, der åbenbart giver sig selv ud fra stregerne i skemaet, der minder om brøkstreger. De kan godt bagefter se, at de nemt kunne have regnet det rigtigt hvis de havde tænkt sig om.

Vi ved ikke præcis, hvor denne instrumentelle tankegang er opstået, men vi ved, at det er svært at afskaffe den, fordi meget af trygheden og selvtilliden skal findes her. Noget af det kommer vel fra den gymnasiale undervisning, for, som en lærerstuderende siger det: "Når vi får dem der ligner gymnasiet, så slår vi over på autopiloten, hvad angår opgaver". En sådan indstilling er absolut ikke god almindelig dannelse og vel næppe heller særlig god studieforberedelse.

Vi kan forudse at flere af vore kolleger bliver bekymrede, når de ser at kernestoffet i de nye læreplaner for matematik er reduceret i forhold til tidligere. Det er der mange rigtig gode argumenter for, men her skal fremhæves at der til gengæld er kommet flere kompetencemål, og at disse faktisk er krævende. Så der er ikke i den forstand slækket på kravene. I et dannelsesperspektiv er for-delen ved denne transaktion, at sygdommen "pensumitis" kan holdes i skak, så følgevirkninger som tankeløst formelfiskeri forhåbentlig bliver mindre udbredt.

Matematik og den demokratiske dannelse

Når matematik på mindst C-niveau bliver obligatorisk for alle på de gymnasiale uddannelser, så vil det naturligvis have sin effekt både som bidrag til studieforberedelse og som en vis styrkelse af almindelsen. Men den dominerende holdning i udvalgsarbejdet har været, at faget på dette niveau skulle indgå i den demokratiske dannelse. Man kan mene, at denne del af fagets rolle burde være for alle og dermed skulle afrundes med folkeskolen. Men gymnasieloven er klar på dette felt: den demokratiske dannelse står centralt på de gymnasiale uddannelser. Herefter er det naturligt – ikke mindst på HF – at lade C-niveauet være stærkt tonet af dette demokratiske mål. Det er fremhævet under formålet for C-niveau på HF, der i skrivende stund starter med "Formålet med undervisningen i matematik er, at kursisterne bliver i stand til at forstå, anvende og kommunikere om matematik i sammenhænge, der vedrører dagligliv, samfundsliv og naturforhold"

De tre niveauer C,B,A

Vi har altså valgt overordnet at se C-niveauet i matematik som borgerniveauet. I en tilsvarende simplificering kan vi se B-niveauet som adgangsniveauet til de matematikbrugende uddannelser. A-niveauet er så for de matematikbaserede uddannelser.

Vil fremtidens studerende, med matematik på B- eller på A-niveau så være bedre rustet til deres uddannelse? Det korte, korrekte og intetsigende svar er at det vil tiden vise. Men vi tror det. Svaret er baseret på at der tegner sig en række ændringer for faget i gymnasiet:

- Emnemylderet reduceres, uden at bestræbelserne på matematisk indsigt svækkes: faget har en række relativt klare faglige mål, og eleven skal nå dem gennem arbejde af voksende selvstændighed.
- Samarbejde (med relevant fagligt indhold, både for matematik og for det andet fag) styrkes, og det skal

ske sådan at eleverne får at se at de samme matematiske metoder kan anvendes på vidt forskellige fænomener.

- Elevernes matematik-eksperimenterende tilgang skal bruges i undervisningen, sådan at de bla. efterhånden selvstændigt kan formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.
- Modellering styrkes.
- Statistik styrkes.
- Grundlæggende færdigheder og paratviden fastholdes ved regelmæssigt at blive taget op igen.

Her er et eksempel på et fagligt (del)mål (A-niveau): *Eleven skal kunne redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser og deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori.* Man skal lægge mærke til at der er tale om et kompetencemål, som overlader det til klassen/læreren at bestemme hvordan udmøntningen af målet skal finde sted.

Vi er klar over at disse principper delvis bryder med fagets tradition. De aftagende uddannelser er vant til at formulere deres forventninger i emnelister (det gælder nok mest udpræget de matematikbrugende uddannelser, dem der forlanger B-niveau, men også fx ingeniøruddannelserne). Det kan de fortsat gøre, men kun inden for kernestoffet er emnerne specificerede (eksempel: "definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner, samt regnereglerne for $(f+g)'$, $(f-g)'$, $(kf)'$, $(fg)'$, $(f/g)'$, udledning af udvalgte differentialkvotienter"). Resten af 'pensum', det supplerende stof, er formuleret i bredere vendinger (eksempel: "matematik-historiske forløb").

Der er mindst to relevante kommentarer her: Det er umuligt at lave minutiøse emnelister for et fag, der skal kunne indgå i en række forskelligartede fag-samarbejder. De matematiske emner, der byder sig til i fysik er ikke nødvendigvis identiske med dem der dukker op inden for samfunds-fag. Dertil kommer at det er debatterbart om den slags specifikationer er særlig hensigtsmæssige. Værdien af besiddelsen af viden om matematiske enkeltfacts kan være begrænset, både anskuet ud fra en vurdering af en persons egentlige matematiske indsigt, og ud fra en simpel langtidsholdbarhedsvinkel. Er det så ikke mere udsigtsfyldt at tilrettelægge en matematikundervisning der eksempelvis som mål har at eleven – og dermed den studerende – skal kunne "anvende funktionsudtryk, afledet funktion og stamfunktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne anvende simple funktionsudtryk i modellering af givne data, kunne foretage simuleringer og fremskrivninger og forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidden af modellen"?

Men vi skal være de første til at erkende udfordringens størrelse. Og vi er også bekendte med at indflydelsesrige uddannelsesfolk som fx Lars-Henrik Schmidt fra DPU næppe vil støtte denne vægtlægning af matematiske kompetencer, fordi han går ud fra at "uddannelse er kompensation for talent". Og hvis folk ikke i forvejen har talentet så er der jo ingen kompetencer at videreudvikle! Skønt der er et vigtigt element af sandhed i denne observation, tror vi altså på, at det kan nytte at tilrettelægge oparbejdelsen af værktøjerne sådan som der nu lægges op til i det nye gymnasium.

IT-værktøjer i fremtidens matematikundervisning i gymnasiet



Af: Bjørn Felsager,
Haslev Gymnasium
email:

bjoern.felsager@haslev-gym.dk

Med den nye gymnasierform vil der i højere grad blive sat fokus på brugen af IT-værktøjer – herunder brugen af avancerede lommeregnere – i matematikundervisningen på alle niveauer: Fra det obligatoriske C-niveau, som alle gymnasieeleverne fremover møder i deres første skoleår, til de valgfrie B- og A-niveauer, som en stor del af dem forhåbentligt føler sig fristet til at inkludere i deres studieretninger. Samtidigt vil der især på de lave niveauer blive sat øget fokus på en eksperimenterende tilgang til matematikundervisningen, der også i højere grad kommer til at tage afsæt i konkrete anvendelser. Samtidigt er det gymnasierreformens klare mål at styrke elevernes selvstændighed i arbejdet med det faglige stof. Endelig skal matematikken i højere grad indgå i tværfaglige samarbejder. Det gør det naturligt at bringe forskellige typer IT-værktøjer i spil og især tre typer har været fremhævet i de senere års standardforsøg: Regneark, dynamiske geometriprogrammer og symbolske CAS-programmer.



Eksperimenter i matematikundervisningen er ikke blot velegnede til at kigge efter mønstre og mulige sammenhænge. De er også nyttige til at simulere komplicerede fænomener, og resultaterne fra et simpelt eksperiment er ofte langt mere overbevisende for elever end abstrakte argumenter. Lad mig som et konkret eksempel se på en nyligt udkommen ungdomsbog, der bruger et kuglespil ('galtonbrædt') som en metafor for tilværelsens tilfældige forudsigelighed. I et appendix beskriver forfatteren nærmere virkningen af et sådant kuglespil:

"Kuglen falder og standses og triller til højre eller venstre i 49 trin, altså gennem 49 små trekanter, og havner på den måde til sidst i en af de 50 opsamlingsbåse, som findes nede under den store trekant, en bås under hver åbning mellem de nederste pigge. Der havner kuglen og får måske snart selskab. Åsa slipper nemlig kugle efter kugle ned gennem åbningen øverst oppe. Hun har tusind kugler og har altid passet så godt på dem, at hun stadig har dem alle sammen...I hver af de to midterste båse havnede mellem 110 og 115 kugler, nogle gange lidt flere, nogle gange lidt færre, men aldrig mere end 120, hvilket spillets konstruktør må have

været klar over, idet båsene ikke kan rumme mere end 120 kugler. Nogle gange var der en eller to kugler mere i den højre bås, nogle gange i den venstre. For det meste var der lige mange og aldrig færre end 104. Dette antal, 104, var, hvad der i gennemsnit havnede i båsene nærmest de to midterste, og derefter drejede det sig om cirka 90, så 70 og så 50, færre og færre, jo længere ud til begge sider man kom."

Bogen giver en meget fin beskrivelse af et randomwalk mønster, men afslører også at forfatteren aldrig selv har leget med bogens kuglespil, idet beskrivelsen af variationen i antallet af kugler der havner i de enkelte bokse er helt urealistisk. Hvordan kan man nu indse det? Det er ikke særligt nemt at konstruere et præcist kuglespil, men vi kan simulere kuglespillet i et regneark. Ved at udnytte den stokastiske funktion SLUMPMELLEM(0,1), der veksler tilfældigt mellem tallene 0 og 1, kan vi simulere udfaldet af en enkelt kugle ved at lægge 49 af disse stokastiske funktioner sammen. Derefter trækkes cellen med den enkelte kugles udfald ned gennem de næste 1000 celler og vi har med ét slag fået opbygget udfaldene for de 1000 kugler. Til sidst udregnes et histogram for fordelingen og vi kan således efter få minutter ved selvsyn se hvordan et realistisk forløb af kuglespillet ser ud. Allerede i første forsøg ramte jeg fx 125 i den ene midterbås. En sådan praktisk simulering kan man så på de højere niveauer bakke op med en teoretisk analyse fx baseret på en binomialfordeling.

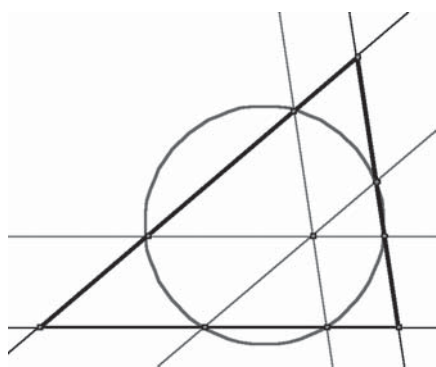
Regneark, der netop er udviklet for at gøre det enkelt at opstille konkrete modeller og udføre simuleringer, omfattes med en vis skepsis af mange matematiklærere. Der er stadigvæk en tendens til at betragte regneark som et professionelt værktøj for erhvervslivet, som ligger lidt for langt fra den traditionelle abstrakte tilgang til matematikundervisningen. Men for det første sker der en opblødning af matematikundervisningen så fokus bl.a. i højere grad lægges på variabelsammenhænge end på den abstrakte funktionsnotation og det passer fint med regnearkets grundlæggende filosofi, hvor celler netop repræsenterer variable. Det være sig talceller, der står for uafhængige variable, eller formelceller, der står for afhængige variable. For det andet er moderne regneark langt mere brugervenlige end deres rygte – det er faktisk svært at finde programmer, hvor det er nemmere at indtaste tabeller, oprette grafer og tilføje diverse typer tendenslinjer. Hvis man derfor skulle pege på blot ét enkelt fælles IT-værktøj, som alle elever kan have glæde af i en meget



bred vifte af fag, og som kan medvirke til at matematik kan indgå i et fagligt konstruktivt samspil med andre fag, så bliver det nok svært at komme uden om et professionelt regneark.

Derudover har man i matematikundervisningen behov for at kunne konstruere dynamiske geometriske modeller, gerne af fænomener fra naturen, foretage målinger og afbilde sammenhørende målinger som grafer, så man også her kan studere variabelsammenhænge. Moderne dynamiske geometriprogrammer rummer netop denne kobling mellem den mere traditionelle geometri og så en indbygget grafisk lommeregner med de værktøjer til undersøgelse af grafer vi er kommet til at forvente som standardtilbehør. Et dynamisk geometriprogram understøtter altså netop den sammenhæng på tværs, der er mellem geometrien på den ene side og funktioner og infinitesimalregningen på den anden side. Men geometriprogrammet er på mange måder langt mere konkret funderet end fx CAS-programmer samtidigt med at de kan levere de dynamiske illustrationer af formlerne, som er så visuelt overbevisende. Dermed kan geometriprogrammer bruges på alle niveauer til alle typer elever fra de meget konkret tænkende til de mere abstrakt minde. Og til de højeste niveauer er der gode muligheder for at stille reelt udfordrende opgaver, hvis løsning hverken elever eller lærere kan finde i standardlærebøgerne. Lad mig for at eksemplificere hvad der fx kunne være tale om nævne et enkelt eksempel jeg selv har været involveret i. På en matematikkongres i Norge her til jul dukkede følgende problemstilling naturligt op under et foredrag om keglesnit og geometriprogrammer:

"Givet en trekant ABC og et frit punkt P. Gennem P trækkes parallelle til trekantens sider, som skærer trekantens sider i seks punkter. Hvor skal man placere punktet P for at de seks punkter ligger på en fælles cirkel?" Her var der netop en god lejlighed til at eksperimentere sig frem med en passende blanding af geometriske og analytiske værktøjer, hvorved det lykkedes at finde frem til en overraskende simpel geometrisk beskrivelse af punktet P. Derved fik vi fornøjelsen af at gøre opdagelsen selv – vel vidende at resultatet ganske givet har været publiceret i en eller anden obskur matematisk journal!"



Endelig har man i matematikundervisningen et uomgængeligt behov for at kunne arbejde med symboler. Her kommer man ikke udenom et godt CAS-program. Der findes flere udmærkede mindre CAS-programmer som økonomisk er til at komme i nærheden af for skolerne, såsom MathCad, Derive og TI-Interactive. De har vist sig at fungere fint i standardforsøgene og dækker de fleste behov for symbolsk støtte i den daglige undervisning. Samtidigt giver de gode muligheder for også at arbejde

numerisk og grafisk med funktioner og data og for at kunne spille sammen med andre programmer. Derved øges mulighederne betragteligt for at kunne arbejde med mere realistiske problemstillinger. Til gengæld for de nye muligheder øges også elevernes ansvar for selv at kunne vælge en hensigtsmæssig måde at angribe problemet på, ligesom de også i højere grad kan gøres ansvarlige for at de rent faktisk kommer frem til et korrekt resultat. Samtidigt vil eleverne hurtigt opdage, at det kan være svært at få programmet til at give et simpelt svar når de arbejder med komplicerede udtryk som fx Planckfordelinger eller udviklingsmodeller for Universet. Matematikken bliver altså ikke nødvendigvis mere overskuelig ved indførslen af de nye værktøjer, ligesom arbejdet med at sætte sig ind i disse værktøjer også kommer til at beslaglægge en ikke-forsvindende del af elevernes uddannelsestid.

Matematikprogrammer anvender ofte en ny notation når resultater og beregninger udskrives. I visse tilfælde bærer den nye notation tydeligt præg af at være skåret til for maskinens skyld. I andre vidner den blot om andre matematiske traditioner, så vi kommer fx nok til at vænne os til nye måder at håndtere ligninger – her illustreret med en gang symbolsk Jeopardy, hvor man ud fra svaret

$$x = 2\sqrt{5 - \sqrt{3}} \text{ skal finde spørgsmålet (dvs. ligningen):}$$

$$(x = 2\sqrt{5 - \sqrt{3}})^2 - 20 \rightarrow x^2 - 20 = -4\sqrt{3}$$

$$(x^2 - 20 = -4\sqrt{3})^2 - 48 \rightarrow x^4 - 40x^2 + 352 = 0$$

IT-værktøjerne vil fremover komme til at sætte deres tydelige præg på kommunikation af matematik og det mundtlige og skriftlige matematiske sprog vil udvikle sig i de kommende år, indtil vi finder et fornuftigt leje, hvor vi får sat et tydeligt skel mellem maskinsprog på den ene side og et mere varieret almindeligt matematisk sprog på den anden side.

Selv om vi nu har øvet os i brugen af IT-værktøjerne på standardforsøgene i mange år er der stadigvæk mange uafklarede spørgsmål i forbindelse med undervisningen, herunder ikke mindst balancen mellem hvilke færdigheder man skal kunne håndtere i hånden, og hvilke færdigheder man kan overlade til værktøjerne. Hovedproblemet er at den nuværende generation af matematiklærere alle har indlært de fundamentale begreber alene på baggrund af en stor færdighed i selv at kunne håndtere udregninger og symbolmanipulationer. Men denne færdighed besidder vore elever ikke. Hvilke konsekvenser det har for deres begrebsindlæring er noget vi reelt ikke ved ret meget om. Alt dette kalder på støtte fra didaktiske miljøer, som heldigvis netop er ved at blive opbygget i disse år. Men mens de didaktiske miljøer internationalt er ved at få god fod på rationelle indlæringsstrategier for matematiske begreber i en klassisk undervisningsramme, kniber det med omfattende dokumenterbar viden om rationelle indlæringsstrategier i en IT-støttet undervisningsramme. Gymnasireformen er altså også i den henseende et stort eksperiment. Lykkes eksperimentet vil eleverne ikke blot fremover blive i stand til at bruge værktøjerne på en hensigtsmæssig måde til selv at erhverve sig ny viden, men også i højere grad opfatte matematikken som en vedkommende udfordring.

Vi vil da alle kunne ånde lettet op!



Eksperimentel matematikundervisning

Jeg fornemmer en tendens til at matematikere bliver mere og villige til at tale og skrive om de processer der har ført dem frem til deres forskningsresultater, snarere end blot at præsentere de færdigpolerede beviser. Det kan delvis skyldes at så snart der har været computere involveret i en sådan proces, så føles det i højere grad som et ærligt stykke arbejde at generere eksperimentelt input til teorien. Et klart udtryk for denne tendens findes fx i programerklæringen for tidsskriftet *Experimental Mathematics*:

Experiment has always been, and increasingly is, an important method of mathematical discovery. (...) Yet this tends to be concealed by the tradition of presenting only elegant, well-rounded, and rigorous results.

While we value the theorem-proof method of exposition, and do not depart from the established view that a result can only become part of mathematical knowledge once it is supported by a logical proof, we consider it anomalous that an important component of the process of mathematical creation is hidden from public discussion. It is to our loss that most of us in the mathematical community are almost always unaware of how new results have been discovered.

Det spørgsmål jeg gerne vil tage hul på her er hvorvidt det er værdifuldt at lade denne tendens sprede sig til den måde vi underviser i matematik. Det vil fremgå at jeg mener at svaret er ja, i hvert fald når de studerende har opnået et vist niveau af ma-

tematisk modenhed og indsigt så de selv kan opstille matematiske eksperimenter og reflektere over de teoretiske implikationer af dem.

Jeg har efterhånden i en del år søgt at holde øjnene åbne for at inddrage et eksperimentelt aspekt i kandidatundervisningen, og har gennem hjælp fra kolleger ved KU og i den danske operatoralgebra gruppe haft held til at isolere gode projekter af denne art. Her opsummerer jeg mine erfaringer på to felter, med vægten lagt på at præsentere det konkrete matematiske indhold i dem, så læseren kan vurdere om han eller hun har projekter der har tilsvarende egenskaber. Jeg kan også anbefale [1] som eksempelkilde.

Eksperimentelle specialer

Specialet har med sin nærhed til forskningsfronten og sin åbne struktur de ideelle forudsætninger for inddragelse af eksperimentelle aspekter. Men eftersom specialevejleders vigtigste opgave erfaringsmæssigt synes at være at få den studerende til at *holde op* med sit arbejde og aflevere til tiden, er det centralt fra starten at aftale hvor meget eksperimentelt arbejde der skal udføres, hvordan det skal afleveres og dokumenteres, og hvordan det skal vurderes. Jeg har indtil videre kun mødt velvilje hos studienævn og censorer om at reducere i forventningerne til den skriftlige del af specialearbejdet til gengæld for konkrete krav til eksperimenterne.

Det er bestemt ikke alle studerende ved KU der har lyst til eller forudsætninger for et delvist eksperimentelt speciale, men jeg har haft held til at lokke to studerende med særlige datalogiske kompetencer i denne retning. Her er lidt om det færdiggjorte projekt, som Ole Lund Jensen (OLJ) udførte.

Emnet var *stærkt skiftækvivalens* for kvadratiske matricer med ikke-negative heltalsindgange. Dette er ækvivalensrelationen genereret af den ikke-transitive relation $A \sim B$ givet ved

$$\exists D \in \mathbf{M}_n^m(\mathbb{N}_0), E \in \mathbf{M}_m^n(\mathbb{N}_0) : \\ A = DE, B = ED,$$

så to matricer er stærkt skiftækvivalente hvis der findes $C_0, \dots, C_l$ med

$$A = C_0 \sim C_1 \sim C_2 \sim \dots \sim C_l = B.$$

Generelt kan man ikke sige noget om længden l af sådan en kæde eller om størrelsen af de indgående matricer $C_1, \dots, C_{l-1}$ — bemærk at D og E ikke behøver at være kvadratiske — så der tegner sig et billede af at denne relation (af stor betydning i teorien for visse symbolske dynamiske systemer) ikke er generelt afgørlig. Det er dog i mange enkelttilfælde muligt at afgøre om to konkrete matricer er stærkt skiftækvivalente.

OLJ tog tilløb i form af et gruppefagprojekt og gik så i gang med at afgøre spørgsmålet for de såkaldt irreducibile 2×2 -matricer med ikke-negative indgange med sumnorm mindre end 25. Han angreb problemet fra to sider; dels ved at generere matricer der på håndfast vis kunne etablere at visse par af matricer var stærkt skiftækvivalente, og dels ved at beregne invarianter for at vise at visse par ikke var det.

Størrelsesordenen af problemstillingen (der er rundt regnet 75 millioner spørgsmål at afgøre) udgjorde fra starten et udfordrende datalogisk problem, som OLJ løste ved at inddrage kraftfulde databaseværktøjer. Der lå et stort stykke arbejde i at få indsamlet og behandlet de enorme datamængder konsistent og i rimelig tid, og eftersom der ikke var de store reduktioner at hente i at inddrage teori, var dette arbejde ret uafhængigt

Matematiklærere og gymnasiereformen



Af: Søren Antonius, Center for Erhverv og Uddannelse Storstrøm, e-mail: sa@ceus.dk

Gymnasiereformen stiller matematiklærerne overfor nye udfordringer¹. Kun det skriftlige pensum – det såkaldte *kernestof* – specificeres, og det forventes at komme til at udfylde ca. 2/3 af undervisningstiden. Resten – det *supplerende stof* – skal læreren selv vælge efter visse retningslinjer. Disse retningslinjer gælder navnlig kravet om fagligt samspil i forbindelse med almen studieforberedelse og studieretningerne, hvor matematik i visse tilfælde skal spille sammen med fysik og i andre tilfælde med samfunds-fag for blot at nævne to kombinationer. Det betyder, at læreren skal kunne tilrettelægge forskellige forløb for forskellige klasser, og at forløb, der bruges det ene år, næppe kan bruges uændret året efter.

Reformen rejser dermed spørgsmålet om matematiklærernes vilkår og muligheder for at leve op til intentionerne. Spørgsmålet kan ses ud fra mindst to perspektiver: Er uddannelsen til gymnasielærer i matematik god nok, og er der muligheder for, at lærerne kan fastholde og udvikle deres faglige og pædagogiske kompetence?

Er uddannelsen god nok?

Uddannelsen til gymnasielærer består af en faglig uddannelse efterfulgt af pædagogikum. De faglige krav er beskrevet generelt for alle fag og vil normalt være opfyldt med en kandidatuddannelse i matematik. Dertil kommer et 2-årigt pædagogikum, der omfatter både praktiske og teoretiske dele².

Uddannelsen har uafviselige kvaliteter og er efter min mening grundlæggende sund. Den sikrer et stærkt fagligt miljø, der er udbredt enighed om fagopfattelsen, og der er et ensartet og passende niveau ved den nationale studentereksamen. Den er også med til at sikre gode relationer mellem matematiklærerne og de matematiske institutter ved universiteterne. Gymnasielærerne udviser stor interesse for initiativer taget af de matematiske institutter, og de matematiske institutter udviser stor interesse for gymnasiet i form af deltagelse i læreplansgrupper, tilbud om efteruddannelseskurser og foredrag, udarbejdelse af tematisk undervisningsmateriale, åbent hus arrangementer og hjælp til stor skriftlig opgave. Matematiklærere i gymnasiet og universitetsmatematikere er gjort af det samme stof og rundet af den samme kultur. Alt dette er med til at afhjælpe overgangsproblemer fra gymnasiet til matematikuddannelsen.

Svaghederne ved uddannelsen knytter sig efter min opfattelse især til det fagdidaktiske indhold. Retfærdigvis skal det siges, at kandidatuddannelsen kan omfatte fagdidaktiske kurser og aktiviteter, og at der indgår et fagdidaktisk element i pædagogikum, men det er næppe en overdrivelse at sige, at det fagdidaktiske i de fleste uddannelser spiller en underordnet rolle. Dette forhold har en række uheldige konsekvenser:

Det kan give problemer i forbindelse med reformer, der som denne har fokus på didaktiske forhold, bl.a. nye arbejdsformer som fx projektarbejde, nye opgaveformer som fx tværfaglig modellering, samarbejde ikke bare mellem fagkolleger men også på tværs af fag, alt sammen forhold som i nogen grad repræsenterer et brud med den typiske undervisning, og som formentlig strider mod mange gymnasielæreres fagopfattelse (det der i den didaktiske forskning kaldes *beliefs*, og som er kendetegnet ved at have et affektivt indhold).

Det mangelfulde didaktiske indhold har også betydning for samarbejdet mellem folkeskolelærere og gymnasielærere eller manglen på samme. Her udtaler jeg mig generelt – jeg er klar over, at der er taget mange gode initiativer de seneste år. De to lærergruppers fagopfattelser er afgørende forskellige. Det skyldes uden tvivl, at folkeskolelæreruddannelsen lægger vægten på didaktik og pædagogik, mens det faglige (i traditionel forstand) spiller en mindre rolle. For uddannelsen til gymnasielærer forholder det sig omvendt. Der tales om *diskontinuiteten i matematikundervisningen* ved overgangen fra folkeskolen til gymnasiet, men den bagvedliggende forklaring kan meget vel være radikalt forskellige læreruddannelser. Mogens Niss udtrykker det på den måde, at folkeskolelæreren ser sig selv som ambassadør for eleverne overfor et fag, mens gymnasielæreren ser sig selv som ambassadør for et fag overfor eleverne³.

Det ringe didaktiske indhold i uddannelsen til gymnasielærer har uden tvivl også sin andel i det problem, der er blevet kaldt *gab mellem praksis og den didaktiske forskning*. Den matematikdidaktiske forskning har været inde i en rivende udvikling de seneste 30 år, men det er kun ganske lidt, der er nået ud til den gymnasiale praksis. Det skyldes ikke kun modstand fra lærerside; en væsentlig forklaring er, at forskningen i en årrække led under et empirisk underskud, som gjorde, at det var svært at omsætte forskningen til udviklingsprojekter. Men det skyldes dog også, at undervisning af mange gymnasielærere opfattes som en særlig 'kunst' og ikke som genstand for videnskab med implikationer for praksis. Skal denne holdning for alvor ændres, forudsætter det, at fagmatematikken og fagdidaktikken mødes allerede i kandidatuddannelsen, for det er her lærernes fagopfattelse bliver støbt – og med ordet *støbt* hentyder jeg til, at når det er sket, er den svær at rokke ved.

Mulige ændringer

Ifølge KOM-rapporten skal en matematiklærer være understøttet med en faglig kompetence og en didaktisk kom-



petence (læseplanskompetence, en undervisningskompetence, en læringsafdækningskompetence, en evalueringskompetence, en samarbejdskompetence og en professionel udviklingskompetence)⁴. Rapporten træder imidlertid forsigtigt, når det gælder en anbefaling af de strukturelle rammer for læreruddannelsen, og tager ikke stilling til, om uddannelsen skal bestå af en matematikuddannelse, der suppleres med didaktiske elementer i et efterfølgende pædagogikum, eller om de didaktiske elementer skal indbygges i kandidatuddannelsen. Jeg foreslår, at man gør det sidste.

Gymnasiet er stadigvæk det største beskæftigelsesområde for kandidater med matematik; ca. 1/3 af alle kandidater får deres første ansættelse i gymnasiet⁵. Når så mange kandidater vender tilbage til gymnasiet som matematiklærere, så må kandidatuddannelsen åbne sig mere overfor fagdidaktikken. Jeg hilser velkomment, at der er skabt muligheder for, at de studerende kan – og at de i nogle tilfælde skal – vælge didaktiske kurser eller projekter, men der er et stykke vej endnu, før fagdidaktikken har den placering den fortjener. Kurser i formidling har ikke kun relevans for en kommende gymnasielærer, men også for forskere og kandidater, der går ud i andre erhverv. Det samme gælder kurser i modellering og brug af IT. Med en bred opfattelse af begrebet fagdidaktik kan der også inddrages kurser i matematikkens filosofi og matematikkens historie.

Den svenske model er en overvejelse værd. Uddannelsen har et betydeligt indhold af almene emner inden for pædagogik, didaktik og praktik. Der er ikke vandtætte skotter mellem uddannelsen til folkeskolelærer og til gymnasielærer. Man kan udbygge en folkeskolelæreruddannelse til en gymnasielæreruddannelse, eller man kan begynde sin uddannelse på folkeskolelinjen for senere at skifte over til gymnasielærerlinjen uden tab af studiepoint. Uddannelsen afvikles i nogle byer i et samspil mellem en lærerhøjskole og et universitet.

En reform af læreruddannelsen gør det dog ikke alene. For det første går der årtier, før en ændret læreruddannelse sætter sine tydelige spor i kulturen på et gymnasium. For det andet er det vigtigt, at den fagdidaktiske interesse kan komme til udfoldelse i den daglige praksis – ellers dør den. Og her kommer jeg frem til mit andet spørgsmål. Forudsat at uddannelsen justeres, så den sikrer, at lærerne er født med en didaktisk indsigt og interesse fra universitetet, kan spørgsmålet formuleres således:

Kan den fagdidaktiske indsigt og interesse videreudvikles i praksis?

Der har de seneste år været stor interesse for at deltage i forsøgs- og udviklingsprojekter i forbindelse med eksamen og ændret indhold. På den måde har lærerne kunnet afprøve nye ideer og hente inspiration til nye måder at tilrettelægge undervisningen på. Mange lærere har gjort en kæmpeindsats i forbindelse med sådanne projekter, ikke bare i forbindelse med den daglige undervisning, men også i forbindelse med dokumentation og evaluering af forsøgene. Jeg kunne ønske mig, at der var muligheder for at grave et spadestik dybere og sætte erfaringer og resultater ind i en forskningsmæssig ramme. Jeg så gerne, at der blev skabt rammer for læreren som

didaktisk forsker – at lærere som reflekterende praktikere og i kraft af deres metakognitive aktiviteter fik muligheder for at indgå i større eller mindre forskningsprojekter, fx i form af aktionsforskning, enten på egen hånd eller i samarbejde med en universitetsforsker. Det forudsætter, at lærere frikøbes i kortere eller længere tid til at arbejde forskningsbaseret. Gerne til Ph.D.-projekter og masteruddannelser i gymnasiepædagogik, men mindre kan også gøre det. Det er ikke en flyvsk tanke, som jeg selv har udviklet; der arbejdes seriøst med den både på teoretisk og praktisk niveau⁶. Herhjemme har samarbejdsmodellen været praktiseret på folkeskoleområdet⁷.

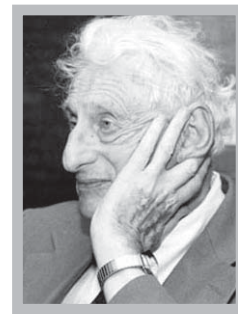
Der er gode grunde til at afsætte ressourcer til den slags aktiviteter på gymnasieområdet. På det praktiske niveau vil det betyde, at flere udviklings- og forskningsprojekter kan omsættes til praksis, og 'lærerforskere' kan bruges som igangsættere af og tovholdere for didaktiske diskussioner og initiativer på skolerne og mellem gymnasieskoler og folkeskoler hhv. universiteter. Effekten af den slags aktiviteter kan ses meget hurtigt. Men forslaget kan også begrundes ud fra en teoretisk synsvinkel. Når vi efterhånden samstemmende tilslutter os en eller anden form for konstruktivisme som læringsteori og har den opfattelse, at eleven kun lærer ved selv at arbejde aktivt med at strukturere sin matematik, så må vi i konsekvens heraf sige det samme om lærerens forhold til didaktikken: Læreren må selv arbejde aktivt med at strukturere sin didaktiske erkendelse.

Forslagene være hermed viderebragt til overvejelse og diskussion.

Noter

- ¹ Fagkonsulent Bjørn Grøn og formanden for Matematiklærerforeningen Nils Fruensgaard giver deres opfattelse af reformens udfordringer i *Matilde* nr. 18, 2003.
- ² Undervisningsministeriet (2004). Bekendtgørelse om undervisningskompetence i de almene gymnasiale uddannelser (*Faglig kompetence og pædagogisk uddannelse og kompetence*), nr. 242 af 31. marts 2004.
- ³ I *Gymnasieskolen* nr. 84 (7), s. 8-10.
- ⁴ Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temaseriehæfteserie nr. 18, Undervisningsministeriet.
- ⁵ Andersen, N.O., Laursen, K.B., Hansen, J.H. & Nielsen, S.E. (2001). *Kandidater i Matematik-, Fysik- og Kemifagene: Hvor gik de hen?* Undervisningsministeriet.
- ⁶ Bl.a. Barbara Jaworski har arbejdet med modeller af læreren som forsker, se fx Jaworski, B. (2000). How can research in mathematics education be useful for the practice of mathematics teaching?. I Blomhøj, M. & Wedege, T. (red.), *Matematikundervisningens praksis og matematikdidaktisk forskning – hvordan spiller de sammen?*, s. 15-33. Center for forskning i matematiklæring. For en oversigt om emnet henvises til Grevholm, B. (2003) (red.). *Matematikk for skolen*, s. 185-205. Fagbokforlaget.
- ⁷ Der kan fx henvises til samarbejdet mellem Helle Alrø, Morten Blomhøj, Henning Bødtkjær, Ole Skovsmose og Mikael Skånstrøm, der bl.a. har resulteret i artiklen 'Farlige små tal – matematikundervisning i risikosamfundet' i Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.) (2003), *Kan det virkelig passe? – om matematiklæring*, s. 39-50. L&R Uddannelse.

A Letter to Christina of Denmark



Af: Philip J. Davis
Professor emeritus, Brown University
email: Philip_Davis@brown.edu

The great Swiss mathematician Leonhard Euler wrote a highly admired three-volume popularization of science entitled *Letters to a Princess of Germany* (1768-72). Some time ago, my friend Christina (pseud.) in Denmark sent me a letter containing a number of questions about mathematics, a subject about which she had heard much, but knew little. I believe that Christina's questions are among those frequently asked by the general literate public. I have formulated some answers to Christina's questions and entitled them as I have in admiration both of

signs and their use). Since the development of mathematics is often inspired and guided by aesthetic considerations, mathematics is an "amphibian": it is both a science and a one of the humanities.

Q2. Why is mathematics difficult and why do I spontaneously react negatively when I hear the word?

A2. There are many reasons why the average person finds mathematics difficult. Poor, uninformed teaching; boring,



Christina and Euler. My answers are, alas, incomplete and I hope they will elicit more questions.

Q1. What is mathematics?

A1. Mathematics is the science and the art of quantity, space, and pattern. Its materials are organized into logically deductive and very often computational structures. Its ideas are abstracted, generalized, and applied to concerns other than mathematics itself.

When mathematics mixes with "outside concerns", the mixture is called applied mathematics, and for reasons that are by no means clear and may even remain a perpetual mystery, mathematics has been found to be of utility and an indispensable aid to the physical sciences. It has often been called the "Handmaiden of the Sciences." Some authorities have identified theoretical physics as that which is mathematical in character.

Applied mathematics exhibits descriptions, predictions and prescriptions. Description replaces a real world phenomenon with a mathematical surrogate: the lampshade casts a parabolic shadow on the wall. Prediction makes a statement about future events: there will be a total eclipse of the sun on July 11, 2010. Its duration will be 5 minutes and 20 seconds. Prescription (or formatting) organizes our lives and actions along certain lines: traffic lights control the flow of automobiles in a periodic fashion.

Mathematics has intimate relations with philosophy, with the arts, with language, with semiotics (theory of

doctrinaire, presentations. Overconcentration on the deductive aspect of the subject; presentations that fail to connect mathematics with the day-to-day concerns of average people. These are some of them.

Mathematical thinking and manipulations are cerebral activities that simply don't engage everyone. And then, let's face it, the material *can* be difficult. Common sense seems to be irrelevant. While mathematical skills and understanding can be learned and developed, I believe there is such a thing as innate talent for mathematics. Just as not everyone has the talent to be creative in art, or to write a great book, or has the body to be a ballet dancer or to break athletic records, not everyone can scale the heights of mathematical understanding. The very fact that professional mathematicians make long lists of unsolved problems attests to the fact that ultimately, that all professionals reach their own limit of mathematical accomplishment.

Q3. Why should I learn mathematics? History widened my horizons (and deepened my "roots." When I learned German, it opened up cultural treasures to me. Karl Marx explained (if not changed) the society I live in. What does mathematics have to offer?

A3. Mathematics is one of the greatest human intellectual accomplishments. Mathematical education is partly to enable us to function in a complex world with some intelligence, and partly to train our minds to be receptive

to intellectual ideas and concepts. Even as natural languages such as German or Chinese embody cultural treasures, mathematics does also. But one has to learn the “language” of mathematics to appreciate these treasures and to learn the history of mathematics to appreciate its growth within the history of general ideas.

Looking about us, if we are perceptive, we can see not only the natural world of rocks, trees, and animals, but also the world of human artifacts and of human ideas. The ideas of Karl Marx (and of other thinkers) explain the world along certain lines, each necessarily limited, but these ideas have often changed the world beyond recognition.

Mathematics also, is capable of explaining the world in remarkable but limited ways. It is capable of formatting our human lives in useful ways, and it is capable, again in a limited way, of allowing us to look into the future and to make prudential judgements. Every educated person should achieve some appreciation of the historical role that mathematics plays in civilization in order that the subject be given both intelligent support as well as intelligent resistance to its products.

Q4. What have been the dominant trends?

A4. First of all, the amount of new mathematical theories created since 1900 is enormous. During that time,



mathematics has become more abstract and deeper than it was in the 19th Century. By this I do not mean that simple things such as arithmetic have to be viewed by the general public in a more abstract or deeper way than before, but that the conceptualization of old mathematics and the creation and applications of new mathematics by the professionals have had that character.

Mathematical logic is now firmly on the scene as is set theory. A new and more abstract algebra has grown mightily and consolidated itself. Infinitary mathematics (i.e., the calculus and its elaborations) has grown by leaps and bounds, but has had increasingly, as opposed to the 19th Century, to share the stage with finitary mathematics.

Geometry, which began in antiquity as visual and numerical (lengths, areas, volumes) moved into an abstract axiomatic/deductive mode and now embraces such studies as algebraic, combinatorial, and probabilistic geometry.

A major trend since the late 1930's is to view mathematics as the study of deductive structures. Mathematics has shared the structuralist point of view with numerous non-mathematical disciplines ranging from linguistics to anthropology to literary criticism.

There is no doubt that the electronic digital computer which emerged in the middle 1940's, and is in many ways a mathematical instrument, has changed our day to day life noticeably. The computer has revitalized or widened the scope and increased the power of a number of tradi-

onal branches of mathematics. It has also created new branches of the subject, and all in all, has had a revolutionary effect throughout science and technology.

Q5. Tell me about the “chipification” of mathematics.

A5. A good fraction of the mathematics that affects our day-to-day life is now performed automatically. It is built into computer chips that are in our wristwatches, automobiles, cash registers, ATM's, coffee machines, medical equipment, civil engineering equipment, word processors, electronic games, telephone and media equipment, military equipment, ID plastic... the list has become endless and the word “chips” and the idea of inserting them to do clever things has become commonplace.

The mathematics in chips is hidden from view. The average person, though greatly affected by it, need pay no conscious attention to it as mathematics. This would be the job of a corps of experts who design, implement, monitor, repair, improve such systems. The “chipification of the world” is going forward at a dizzying rate. One of the disturbing side effects of this trend may very well be that in the near future Sally and Johnny will not have to add or read in the conventional way. Will this put us back several hundred years when literacy and numeracy were relatively rare achievements? Not at all. Modes of communication, interpretation and of social arrangements

have changed in the past and will change in the future. It does not mean that they will disappear.

Q6. Where are the centers where new mathematics is developed? Who is “hip?” A fan of good rock music knows where to go to hear it. Where would a math fan go these days?

A6. There are mathematical centers in all the developed countries of the world. They are located in universities, governmental agencies, research hospitals, scientific, economic or social “think tanks”, industries. All of these centers tend to be organized into groups and tend to concentrate their research on very limited and specific problems. There are also many mathematical researchers who work independently and productively outside of groups.

Depending on what sort of “mathematical music” you would like to hear, you would visit one of these groups or individuals. Although these groups exhibit a great deal of esprit de corps and self esteem, and can be influential beyond their own walls, there is, in my judgement, no single group that is predominates. And this diversity is a very good thing.

Much more close to home, there are now websites that cater to every level of mathematical interest and engagement.

Q7. How is mathematics research organized? Who is doing it, who is paying for it and why? Lonely, harmless riders, or highly efficient, highly organized, secret, threatening groups. Should one be scared?

A7. The forward movement of mathematics is driven by two principal forces: forces on the inside of the subject and forces on the outside.

Forces on the inside perceive certain questions or aspects that are incomplete, unanswered and call for answers. Or new mathematical ideas arising from free mental play come into prominence. "Lonely riders" very often make contributions.

Forces on the outside call for the application of available mathematics to the outside world of people or things or they may result in the development of genuinely new mathematics.

The work is paid for by institutions or organizations in anticipation of profit, or of scientific, social, national or cultural gain. The economically independent mathematical researcher exists, but is quite rare. NASA, the space agency, is a source of considerable mathematical support.

In the years following 1939, and particularly in the U.S.A., a great deal of mathematical research has been paid for by the military, and individual mathematicians have profited by this support independently of their private views of U.S.A. military or foreign policy. Since war appears to be endemic to the human condition, military support will undoubtedly go on at some level.

Support from the medical/health sector will gain in importance. The productivity of the United States gets a considerable boost from the "entertainment industry" and movies are using computer graphical software which has a considerable mathematical underlay.

Some of work of the various groups is restricted or confidential. This may be for reasons of national security or for reasons of industrial confidentiality in a free and competitive market.

In an ideal democratic society, all work must ultimately come into the open so that it may be judged both as regards its internal operation and its effects on society. Free and complete availability of information is one of the hallmarks of ideal science. While this has not always been the case in mathematical practice, judged over the past several centuries, the record is pretty good.

lence has a certain merit, then the work of e.g., the Fields Medal winners should be cited. This would cover Pure Mathematics where this prize, given since 1936, is the mathematical equivalent of the Nobel Prize. Similar prizes of substantial value exist in various pure mathematical specialties, in applied mathematics, statistics, computer science, etc.

The work of Fields medal winners over the past decades, people such as K.F. Roth, R. Thom, M. Atiyah, P.J. Cohen, A. Grothendieck, S. Smale, A. Baker, K. Hironaka, S.P. Novikoff, and J. Thompson, cannot, with some very few exceptions, be easily explained in lay terms. In view of their arcane nature, the public rarely hears about such things; and should a particular accomplishment reach the front page of the newspapers, its meaning is often mutilated by packaging it in the silver paper of sensation. Sensation is always easier for the public to grasp than substance.

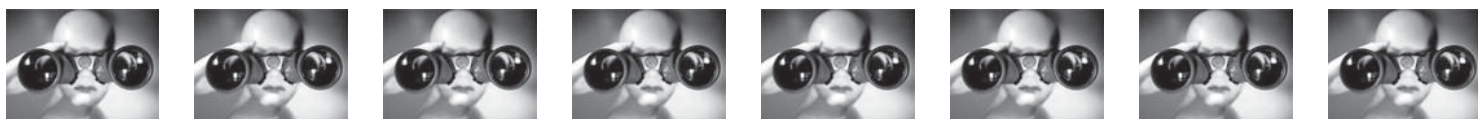
Judging from the selection of Fields Laureates, the criteria for the honor seem to be (1) the solution of old and difficult mathematical problems, (2) the unification of several mathematical fields through the discovery of cross connections and of new conceptualizations, (3) new internal developments.

A few years ago the world of research mathematicians was electrified by the public announcement that the Clay Mathematics Institute, a private organization, was offering one million dollars each for the solution of seven famous mathematical problems

We live in an Age of Sensation. As a result, only the "sensational" aspects of mathematics get much space in the newspapers: e.g., Fermat's "Last Problem", "the largest prime number now known is" or the solution of other so-called "big" unsolved problems, big international students' contests, etc.

Mathematical applications that are useful, e.g., the programming and chipification of medical diagnostic equipment, are rarely considered as "breakthroughs" and make the front pages. Historic research or philosophic discussions of the influence of mathematics on society have yet to be honored in prestigious manners.

Yet, from the point of view of affecting society, the major mathematical breakthrough since the end of World War II is the digital computer in all its ramifications.



Doing mathematics, developing new mathematics, is simply one type of human activity among thousands and thousands of activities. As long as constant scrutiny, judgement and dissent flourish, fear can be reduced.

Q8. Other sciences have had their "breakthroughs" in the past 10-20 years. What breakthroughs does mathematics claim?

A8. We might begin by discussing just what might be meant by the phrase "breakthrough in mathematics." If we equate breakthroughs with prizes, and this equiva-

This breakthrough involved a very strong mix of mathematics and electronic technology and is not the brain-child of a single person; hundreds, if not hundred of thousands of people contributed and still contribute to it.

Q9. Medical doctors fight cancer, AIDS and SARS. What is now the greatest challenge to modern mathematics?

A9. One might distinguish between "internal" problems and "external" problems. The former are problems that are suggested by the operation of the mathematical di-

sciences themselves. The latter are problems that come to it from outside applications, e.g., what is the airplane shape of minimum drag when the airplane surface is subject to certain geometrical conditions? What are the aerodynamic loads on the plane structure during manoeuvres?

In 1900, the great mathematician David Hilbert proposed a number of very significant unsolved problems internal to mathematics. Hilbert's reputation and influence was so great that these problems have been worked on steadily, and most of them have been resolved. Setting up, as it did, a hierarchy of values as to what was important (every mathematician creates his own list of unsolved problems!), their solutions have had a considerable influence on the subsequent progress of mathematics. The solvers, in turn, have gained a great reputation for themselves in the mathematical community.

Within any specific field of mathematics, its practitioners will gladly tell you what they think the major unsolved problem (or challenge) is. Thus, if a topologist is queried, the answer probably is to prove the Poincaré Conjecture in the case $n = 3$. If an analyst is queried, the answer might be: prove the Riemann Hypothesis.

As regards "external problems", a fluid dynamicist might say: devise satisfactory numerical methods for processes such as occur in turbulence or in meteorology that develop over long periods of time. A programming theorist might say: devise a satisfactory theory and economical practice for parallel computation.

If your question is answered in terms of specific problems, it is clear that there are many challenges and there is no agreement on how to prioritize them. Researchers can be drawn to specific problems by the desire of fame, money, or simply that their past work suggests fruitful approaches to the many problems that remain unsolved.

Your question can also be answered at a higher level of generality. A Pilot Assessment of the Mathematical Sciences prepared for the United States House (of Representatives) Committee on Science, Space, and Technology, identifies five interrelated long term goals for the mathematical sciences they are:

"

* to provide fundamental conceptual and computational

I should like to go up one more rung on the ladder of generality and answer you that the greatest challenge to modern mathematics is to keep demonstrating to society that it merits society's continued support.

Mathematics can and has flourished as a harmless amusement for a few happy aficionados both at the amateur and professional levels. But to have a long and significant run, mathematics must demonstrate an intent that engages the public. If the intent is simply to work out more and more private themes and variations of increasing complexity and of increasing unintelligibility to the general public, then its support will be withdrawn.

The long history of mathematics exhibits a variety of mathematical intents. Some of these have been: to discover the Key to the Universe, to discover God's will (thought to be formulated through mathematics), to act as a "handmaiden" to science, to act as a "handmaiden" to commerce and trade, to provide for the defense of the realm, to provide social formats of convenience and comfort, to develop a super brain — an intelligence amplifier of macro proportions.

The public demands a return for its support. But the place and the form of an acceptable return cannot be specified in advance. Perhaps a mathematical model of brain operation will be devised and will lead to insight and ultimately to alleviation of mental disease. It is not too fatuous to think that many of the common problems that beset humankind such as AIDS, cancer, hunger, hostility, envy, might ultimately be aided by mathematical methods and computation. While efforts in these directions are praiseworthy, they may come to naught.

By way of summary, the greatest challenge to the mathematicians of the world is to keep its subject relevant and to keep up the pressure that its applications promote human values.

Q10. What can you say about militarization, centralization, regionalization, politicization of mathematics?

A10. This is a very large order to answer: the first topic by itself would require several books. Since about 1940, one of the major financial supporters of mathematical research in the USA has been the military or the "milita-

tools for science and technology

* to improve mathematics education

* to discover and develop new mathematics

* to facilitate technology transfer and modeling

* to promote effective use of computers "

[*Notices of the American Mathematical Society*, Feb., 1992]

ry industrial complex." A similar assertion can be made of all the advanced nations. There are vitally essential mathematical underlays to new and sophisticated weaponry both offensive and defensive. Related economic, demographic, strategic studies and predictions often involve mathematics at the highest levels of complexity.

Since the end of the Cold War, with the military option reassessed and hopefully degraded somewhat, one looks forward to the development and the application of mathematics supported increasingly by such fields as medicine, biology, environment, transportation, finance, etc.

Centralization and regionalization: In the pre-computer days it used to be said that a mathematician didn't require much by way of equipment; just a few reams of paper, a blackboard and some penetrating ideas. Today, although much research is still done in that mode, we find increasingly that mathematicians require the aid of supercomputer installations. This is still far less costly than, say, the billions of dollars of laboratory equipment required by high-energy physicists or astrophysicists.

Centralization of mathematics occurs as the result of a number of factors: (1) The willingness and ability of a society to support mathematical activity (2) The desire and the utility of having mathematicians work in groups, centers, etc. The notion of the critical inter-communicating mass of creative individuals is at work here. New systems of rapid intercommunication and transport of graphical and printed material may in the future affect the clumping of centers for research and development.

Politicization: While the contents of mathematics is abstract, mathematics is created by people and is often applied by people to people. It is to be expected, then, that the creation and the application of mathematics should be subject to support, pressures, monitoring and suppression by governmental, political or even religious institutions. The interaction between mathematics and human institutions has a long and documented history.

Q11. Give me ten points that worry a concerned mathematician.

A11. A concerned mathematician will worry about the abuse, misuse, or misinterpretation of mathematics or of its applications. But remember that even people who have been satirized as technocrats, computocrats or mathocrats may all be concerned people.

Insofar as we are living in a thoroughly mathematized civilization, the number of concerns is necessarily vast and it is natural that most concern is focussed on "life and death" issues. If, for example, a mathematical criterion were developed via encephalography for determining whether a person is "brain dead", then this would engender a great deal of concern.

Q12. I read a statement attributed to the famous physicist Max Born that the destructive potential of mathematics is an immanent trend. If that is so, why then should I, an average person, know a whole lot more about mathematics?

A12. You should know more about it for precisely that reason.

All creative acts have destructive potential. Though we try to reduce the risk, an electrical outlet in the average home is not totally risk-free. The destructive or revolutionary potential of graphical arts, of literature is well documented. Even as mathematics solves many problems, it creates new problems, both internal to it and external.

To live is to be at risk, and no number of insurance policies can reduce the psychological risk to zero. Moreover, to live at the very edge of risk is thought by some people to be "truly alive."

The more the average person knows, the better off that person is to make judgements. Some of those judgements will be how to balance risk with prudence. In a world in which scientific, technological and social changes occur rapidly, a democratic society cannot long endure in the presence of ignorance.

Rettelser til Matilde 19

Korrektoren på Matilde 19 foregik under stort tidspres, så en del trykfejl blev overset. Redaktørerne beklager.

Det var flest problemer i Claus Jensens artikel om Perspektivkasser. En ny version af denne artikel med nogle rettelser kan ses i Matildes arkiv http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M19/claus_jensen.pdf

Niels Richard Hansen, forfatteren til "Bioinformatik - en statistisk disciplin" er tilknyttet Afdeling for Anvendt Matematik og Statistik, KU
email: richard@math.ku.dk

Ekspérimentel matematikundervisning

forts. fra side 13

til produkter, der kunne omsættes i ny indsigt.

Litteratur

[1] J. Borwein, D. Bailey. *Mathematics by Experiment: Plausible Rea-*

soning in the 21st Century, AK Peters, 2003.

[2] N.P. Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.

[3] D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR 97a:58050

Verdens første kvindelige, professionelle matematiker



Sofja med barn



Af Else Høyrup,
Cand.scient. i matematik
og BA i russisk
Hejnstrupvej 94
Gundsømagle
4000 Roskilde
email elseho@worldonline.dk

1. Indledning

For nogle år siden blev jeg opmærksom på en russisk, kvindelig matematiker fra 2. halvdel af 1800-tallet: Sofja Kovalevskaja. I min matematikstudietid i 1960'erne var Emmy Noether (1882-1935) ellers den eneste kvindelige matematiker, jeg lærte om. Jeg begyndte at studere Sofja Kovalevskajas liv, virke og baggrund, og jo mere jeg satte mig ind i dette stof, jo mere fascineret blev jeg af hendes personlighed. Hun trodsede de hårde betingelser for kvinder dengang (universiteterne var bl.a. lukkede for kvinder), og hun havde en meget alsidig personlighed, - bl.a. var hun også forfatter, og hun havde et fuldt liv som kvinde. I forbindelse med et russiskstudium, som jeg afsluttede i 2002, fik jeg lyst til at læse værker af og om Sofja Kovalevskaja på russisk og til at studere hendes periode i russisk og vesteuropæisk kulturliv. Desuden begyndte jeg at fokusere min interesse for matematikkens historie på 1800-tallet. I dette essay vil jeg fortælle om Sofja Kovalevskaja.

2. Baggrunden

Tsarernes Rusland var et meget reaktionært og represivt samfund. Deres autokrati (selvherskerdømme) var værre end vores enevælde, og det var ikke Stalin, der opfandt koncentrationslejrene i Sibirien. Det er tsarernes opfindelse. De livegne bønders vilkår var værre end vores stavnsbundne bønders. Aleksandr II (1855-81) var en relativt reformvenlig tsar, og i hans regeringstid blev livegenskabet afskaffet (1861). Det var samtidig med den Nordamerikanske Borgerkrig (1861-65), som førte til slaveriets ophævelse.

I 1860'erne opstod der i Rusland en antiautoritær bevægelse mod tsarstyret, nihilismen. Nihilismen var ikke noget parti, for partier var forbudt, og nihilismen som sådan var også forbudt. "Nihil" betyder egentlig "intet"; men det var ikke fordi nihilisterne ikke havde nogen programpunkter. Det var oprindeligt et øgenavn, første gang brugt af Turgenjev i "Fædre og sønner" i 1862; men siden tog nihilisterne selv navnet til sig. De udgjorde en radi-

kal, demokratisk politisk opposition til tsarernes autokrati og despoti. De gik ind for uddannelse til alle, og de gik ind for, at ren og anvendt naturvidenskab blev opprioriteret. Bortset fra Peter d. Store (1682-1725) var tsarerne traditionelt modstandere af naturvidenskab, som de anså for farlig og demokratisk. Nihilisterne støttede kvindesagen, som i Rusland blev kaldt "kvindespørgsmålet". Det gjaldt om at befri kvinder fra undertrykkelse ved at give dem uddannelse og arbejde, samt selvbestemmelse over liv og krop, og de hjalp kvinder med at komme væk fra tvangsægteskabet. Nihilismen var den eneste bevægelse blandt mænd, som støttede kvinderne, og derfor blev mange russiske kvinder nihilister, bl.a. Sofja Kovalevskaja.

Senere udartede en gren af nihilismen sig til at blive terroristisk; men det er ikke denne gren, jeg vil skildre, for Sofja Kovalevskaja var bestemt ikke terrorist. Der er visse lighedspunkter mellem nihilismen i Rusland i 1860'erne og 1870'erne med Vestens ungdomsoprør 100 år senere; men der er en for os væsentlig forskel mellem dem: Den russiske nihilisme så naturvidenskab som en progressiv faktor, mens visse dele af studenteroprøret så naturvidenskab som en reaktionær faktor, fordi de næsten satte lighedstegn mellem naturvidenskab og positivismen, som de havde gjort til en fjende.

Nihilismen ligner også anarkismen lidt; men nihilisterne var mindre individualistiske og gik ind for, at man skulle være nyttig og tjene folket. Da Sofja Kovalevskaja som ung blev påvirket af nihilismen, ville hun først være læge; men hun gav senere efter for sin indre trang og sit talent og blev matematiker.

Hendes vej til en karriere som professionel matematiker var imidlertid kroget, for som kvinde kunne hun hverken få uddannelse eller arbejde på russiske universiteter. De var lukkede for kvinder indtil 1918, bortset fra at kvinder i perioder fik lov til at følge forelæsninger i begrænset omfang, og bortset fra at der i 1878 i Skt. Petersborg blev åbnet de såkaldte Bestuzjevskie kvindekurser. Her fik Sofja Kovalevskaja imidlertid heller ikke lov til at blive lærer. I Danmark blev universiteterne åbne for kvinder i 1875. I 1700-tallets Italien var der en liberal bølge, der tillod kvinder på universiteterne i et begrænset omfang. Bl.a. blev matematikeren Maria Gaetana Agnesi (1718-99) en kort tid professor efter sin far, indtil hun gik i kloster.

3. Opvæksten

Sofja Kovalevskaja, f. Korvin-Krukovskaja, var adelig, og hendes far var general. Da hun var 8 år gammel, gik han på pension, og familien flyttede til godset Palibino nær den polske grænse. Der var en ældre søster, Anjuta (Anna) (1843-87), som Sofja hele livet var nært knyttet til, og en yngre bror. Børnene havde amme, guvernanter og en huslærer. Allerede som barn blev Sofja Kovalevskaja interesseret i den højere matematik ved et pudsigt tilfælde: Da familien flyttede ind på Palibino, manglede der lidt tapet, og da det var besværligt at skaffe mere fra Skt. Petersborg, besluttede man sig til at bruge faderens litograferede forelæsningsnoter i differential- og integralregning af Mikhail V. Ostrogradskij (1801-61/62) som tapet i børneværelset. Og her stod Sofja så tit og studerede de mærkelige hieroglyffer, så hun havde relativt nemt ved

dette stof som voksen. I familien var der desuden to onkler, en morbror og en farbror, som begge var meget interesseret i naturvidenskab, og som med glæde videregav denne interesse til Sofja.

Da søstre voksede op, fik de besøg af to unge mænd fra hovedstaden, som var nihilister, og det påvirkede dem begge meget, og de drømte om at blive nyttige og tjene folket. Anjuta kom senere til Frankrig, hvor hun blev revolutionær og bl.a. deltog i Pariserkommunen 1871. Anjuta ønskede også at blive forfatter, og derved kom hun i kontakt med Dostojevskij (1821-81), som havde et tidskrift. Dostojevskij forelskede sig i Anjuta og friede til hende, men fik nej. Til gengæld blev den unge Sofja forelsket i ham. Men både Anjuta og Sofja bevarede et livs langt venskab med Dostojevskij. Sofja Kovalevskaja har givet en levende skildring af sin barndom og tidlige ungdom i sine barndomserindringer, der også udkom som roman. I "Den kvindelige nihilist" (Nigilistka) har Sofja Kovalevskaja også skildret en ung adelig piges opvækst i tiden omkring livegenskabets ophævelse 1861. (Se afsnit 8: Forfatterskabet og Litteraturlisten).

4. Ungdommen

Sofjas forældre, især faderen, var stærke modstandere af hendes matematiske tilbøjeligheder. Hun skulle giftes og være en anstændig kvinde. Færdig. Men én af faderens venner, en fysikprofessor, blev så imponeret af Sofjas kundskaber i trigonometri, som hun havde sat sig ind i på egen hånd, at han overtalte faderen til at lade Sofja få privatundervisning i højere matematik i Skt. Petersborg. Hendes lærer blev nihilisten og matematikeren, Aleksandr Strannoljubskij (1839-1903). Ruslands førende matematiker i 2. halvdel af 1800-tallet, Pafnutij Tjebysjev (1821-94), viste tidlig interesse for Sofja Kovalevskajas talent og blev med årene en stor beundrer af hendes evner og en venlig inspirator i perioder, hvor hun gik lidt i stå p.gr.af de vanskeligheder, hun som kvinde mødte på sin vej.

I datidens Rusland krævedes der pas ved rejser, også indenlands, og ved job, og da Sofja Kovalevskaja ønskede at rejse for at studere og senere at få et job, havde hun brug for et pas. Men kvinder kunne ikke få eget pas, enten skulle de stå på faderens eller ægtemandens pas. Og hendes far ville ikke give hende lov til at rejse eller få et job. Også andre russiske kvinder var i samme situation, og da de mandlige nihilister gerne ville hjælpe kvinderne, blev "fiktive ægteskaber" en hel modebølge. I 1868 indgik Sofja Kovalevskaja et fiktivt ægteskab med nihilisten Vladimir O. Kovalevskij (1842-83), som er en af palæontologiens grundlæggere. På den tid havde han et lille, idealistisk forlag, der udgav naturvidenskabelige bøger, bl.a. Darwins "The Origin of Species". Senere mødte ægteparret Kovalevskij Darwin i England.

Efter brylluppet fulgte Vladimir Sofja, Anjuta og Sofjas veninde, Julija Lermontova (1846-1919) til Heidelberg, hvorefter Vladimir rejste videre til Wien. Kvinderne dannede et lille kvindekollektiv, og Sofja og Julija begyndte at gå til forelæsninger på universitetet, Julija i kemi. Det krævede en særlig tilladelse, for også i Tyskland var universiteterne i princippet lukkede for kvinder, hvad der var en stor skuffelse for de russiske kvinder.

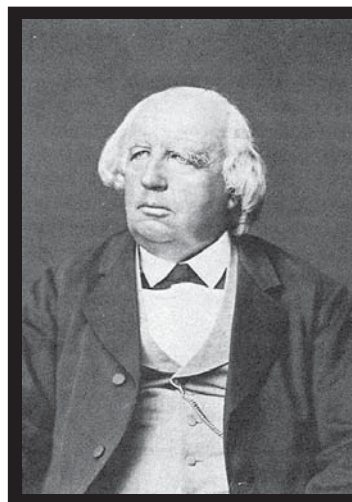
I 1870 rejste Sofja og Julija videre til Berlin, fordi Sofja

ønskede at studere hos mesteren, Karl Weierstrass (1815-97), som jo kaldes den matematiske analyses fader. Introduktionen af Sofja hos den ældre ungar Karl Weierstrass, der boede sammen med sine to ugifte søstre, var ganske interessant: I Berlin var universitetet totalt lukket for kvinder, så Sofja Kovalevskaja ønskede at blive privatelev hos Weierstrass. Han var imidlertid meget konservativ, også med hensyn til kvinder, så han havde ikke lyst til at have Sofja som privatelev. Han spurgte dog hendes lærere fra Heidelberg, som sagde god for hende, og da hun kom på besøg hos ham, gav han hende nogle meget svære matematikopgaver. Stor var hans forbavselse, da hun nogle dage senere dukkede op igen med korrekte og endog originale løsninger til alle opgaverne.

Fra den dag blev han hendes glødende ven og forsvaret; han blev hendes mentor. De brevvekslede resten af livet, bortset fra en periode, hvor Sofja gik i stå med matematikken, så hun ikke havde lyst til at svare på hans breve, hvad han blev meget ked af. Ved hendes alt for tidlige død i 1891 brændte han hendes breve, mens hun havde gemt hans. I dag er Weierstrass' breve til Sofja Kovalevskaja udkommet i to bøger: en russisk-tysk udgave og en tysk udgave. Senere tiders gisninger om et forhold mellem dem har ifølge brevene ikke hold i virkeligheden. I årene 1870-74 gennemførte Sofja et monomant studium af matematik hos Weierstrass, som bragte hende på højt videnskabeligt niveau. Hun levede meget puritansk i denne periode, og talte kun med familien Weierstrass og Julija. Sofja inspirerede også livet igennem Weierstrass til nye, store kreative perioder, så påvirkningen gik begge veje. Han regnede hende for sin bedste elev; men hun var ikke hans marionet, som onde tunger senere påstod: Deres brevveksling, hendes dagbøger og andre brevvekslinger viser tydeligt, at hun var meget selvstændig som matematiker. Men hun nærede stor veneration for Weierstrass. Han var overvejende ren matematiker, mens hun både var ren og anvendt matematiker. Bl.a. arbejdede hun med astronomi (Saturns ring), fysik (lysets brydning i krystaller) og teoretisk mekanik (rotationsproblemer), og hun skrev artikler om disse emner.

I 1874 blev hun som den første kvinde doktor i matematik. Hun blev doktor in absentia med udmærkelse ved Göttingen Universitet på 3 vægtige afhandlinger, som hver havde været nok til en doktorgrad. Hun valgte ikke at aflægge den mundtlige prøve, da hun følte sig genert som kvinde ved at skulle stå over for et mandligt panel af eksaminatorer, på et fremmed sprog.

Hovedarbejdet, som blev det ene af hendes to hovedværker, hed da det blev trykt: Sophie von Kowalevsky: "Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen." Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), Vol.80, No.1 (1875), pp.1-32. Det drejer sig om det, vi i dag vil kalde eksistens- og entydighedssætninger for løsninger til et system af partielle differentiaalligninger med givne begyndelsesbetingelser. Cauchy havde allerede i 1842 v.h.j.af den såkaldte majorantmetode bevist en sætning herom; men Weierstrass kendte ikke Cauchys sætning, da han gav opgaven til Sofja Kovalevskaja. Hun begyndte derfor forfra; men det lykkedes hende også at give sætningen dens endelige form og at forenkle beviset. Derfor hedder sætningen i dag Cauchy-Kowalevsky sætningen. Onde tunger har påstået, at det var Sofjas mand, der havde lavet sætningen, fordi navnet



I 1870 rejste Sofja og Julija videre til Berlin, fordi Sofja ønskede at studere hos mesteren, Karl Weierstrass (1815-97), som jo kaldes den matematiske analyses fader.

på sætningen bruger det russiske efternavn Kowalevsky i maskulinum i stedet for i femininum, Kowalevskaja, som det hedder i Rusland. Men det skyldes, at Sofja for ikke at forvirre vesteuropæere med russisk grammatik, brugte sit efternavn i den maskuline normalform. Og Sofjas mand kunne slet ikke matematik.

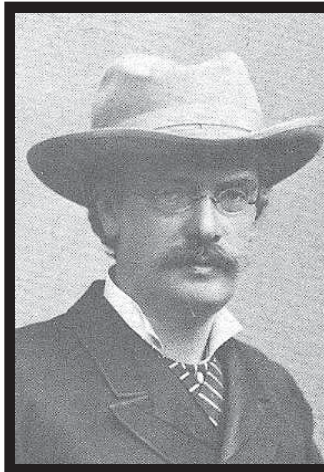
Sætningen siger kort fortalt, at hvis man har et generelt system af partielle differentiaalligninger på den såkaldte normalform, hvor både de i ligningerne indgående funktioner og de givne begyndelsesbetingelser er analytiske funktioner (dvs potensrækker), så eksisterer der løsninger til ligningssystemet, som er analytiske og entydige. Kovalevskaja starter med såkaldt quasi-lineære systemer og generaliserer senere v.h.j.af, hvad Hans Tornehave har kaldt et genialt trick. Kravet om normalformen er en nødvendig betingelse, hvad Kovalevskaja beviste ved et smart eksempel med varmeledningsligningen.

Sofja Kovalevskaja arbejdede således allerede i 1874 på højt niveau med komplekse og reelle differentiaalligninger og kompleks funktionsteori. Differentiaalligninger er ét af de største områder af matematikken den dag i dag, og Kovalevskajas arbejde udgør en naturlig del af fundamentet. Desuden blev hun specialist i det vanskeligt tilgængelige område abelske funktioner, dvs de inverse til abelske integraler, som rummer elliptiske og hyperelliptiske integraler, og hun skrev om disse emner bl.a. i den anden af doktorafhandlingerne.

5. Pause i matematikken

Efter endt studium hos Weierstrass, rejste Kovalevskaja tilbage til Rusland for at søge job der. Vladimir og hun flyttede sammen igen, og deres ægteskab blev nu et fuldbyrdet ægteskab, - Vladimir havde nok hele tiden været forelsket i Sofja. Men der var ikke nogen job til nogen af dem, Sofja fordi hun var kvinde, Vladimir måske fordi han var nihilist. Det var et chok for dem begge to, og selv om Sofja havde arvet nogle penge, kunne det ikke forsørge dem ret længe. Så kastede de sig over pengespekulation, i starten byggespekulation, for at de hurtigt kunne blive rige og senere få tid til deres videnskabelige arbejde.

Som kontrast til de ensomme og puritanske studier i Berlin kastede Sofja Kovalevskaja sig nu over et udadvendt selskabsliv, og hun deltog ivrigt i tidens debatter. Matematikken gled i baggrunden i nogle år. Til gengæld



Mittag-Leffler, professor ved Stockholms Universitet. Han startede tidsskriftet Acta Mathematica og gjorde Kovalevskaja til medredaktør. Hun blev dermed den første kvindelige redaktør af et matematisk tidsskrift. Der udviklede sig et nært venskab og samarbejde mellem Mittag-Leffler og Kovalevskaja.

startede hun på en ny løbebane som skribent: Hun skrev teateranmeldelser og populærvidenskabelige artikler om ny naturvidenskab og nye opfindelser, baseret på Scientific American. I 1878 fødte hun sit eneste barn, datteren Sofja Vladimirovna Kovalevskaja, kaldet Fufa. Det var en vanskelig fødsel, og Sofja var afkræftet i lang tid derefter. Hun havde nogle specielle, ret strenge børneopdragelsesprincipper. På grund af hendes mange rejser og hele omtumlede liv, boede datteren ikke hos hende hele tiden, men var tit i pleje hos familie og venner. Ved Sofjas alt for tidlige død i 1891, kom Fufa til at bo hos Sofjas veninde, Julija Lermontova. Fufa blev senere læge og døde ugift i 1952.

Weierstrass var fortvivlet over, at Sofja ikke svarede på hans breve og forsøgte at få hende tilbage til matematikken igen. Han sendte en anden af sine elever, svenskeren Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), til Skt. Petersborg for at påvirke Sofja. Også Tjebysjev forsøgte at lokke hende. Men først i 1880 begyndte hun lejlighedsvis at rejse væk fra Rusland igen og vende tilbage til matematikken. Weierstrass var lettet; nu havde hun lige overbevist ham om, at kvinder kunne blive matematikere, og så ville han gerne have, at hun var et eksempel for andre kvinder. En anden grund til, at Sofja begyndte at rejse til Berlin og Paris igen, var at ægteskabet gik dårligt. Det var nu tydeligt, at Vladimir havde dårlige nerver og havde rodet sig ud i noget snavset oliespekulation, lokket af de noget lys-sky Ragozin-brødre. Sofja ønskede ikke at fortsætte spekuleringen længere, men at vende tilbage til matematikken og søge job. Vladimir ønskede ikke, at hun skulle fortsætte med matematikken, - han havde glemt sin ungdoms idealer.

I 1883 fik Sofja så, mens hun var i Paris, den lammen-de besked, at Vladimir havde begået selvmord. Hun fik et alvorligt chok og nægtede at spise i nogle dage, indtil en læge fik hende tvangsfodret. Men hun rettede sig, og nu da hun var enke og enlig mor, blev hun endnu mere determineret i at søge at skaffe sig et job. Her viste Mittag-Leffler sig at være redningen.

6. Stockholm

Gösta Mittag-Leffler var professor i matematik ved det nyåbnede, progressive Stockholm Universitet. Han var en strålende organisator og kan måske sammenlignes med Svend Bundgaard fra Aarhus. Han var en stor be-

undrer af Weierstrass og hans matematik, og han ønskede at føre svensk matematik op på et internationalt niveau. Derfor kunne han bruge Sofja Kovalevskaja med hendes mange internationale kontakter i Tyskland, Rusland og Paris. Hun var nu enke, og det var faktisk en bedre position end både at være en ung, ugift kvinde eller en gift kvinde. Hun var kommet i gang igen med matematikken efter pausen i Rusland, og hun var meget interesseret og forberedte sig godt til undervisningen sammen med Weierstrass. Vinteren 1883/84 rejste hun til Stockholm for at starte som privatdocent i foråret 1884. Her kom hun til at blive resten af sit liv, og hvert semester holdt hun en forelæsningsrække om et avanceret, matematisk emne, ofte ud fra sin egen forskning, eller ud fra Weierstrass' matematik. I starten var hun selvfølgelig lidt nervøs, for hun havde ikke ret meget træning i at optræde offentligt. Men det gik godt. Også sprogbarrieren fik hun hurtigt overvundet v.hj.af sit sprog-talent, idet hun lærte at tale og skrive svensk.

I Sverige ventede der både varme tilhængere og arge modstandere af kvinders emancipation. Til de sidste hørte Strindberg. Til de første hørte bl.a. Mittag-Lefflers familie, specielt hans søster, forfatteren Anne Charlotte Leffler (1849-93), som siden blev Sofjas nære veninde, samt mange af professorerne ved Stockholm Universitet. I 1884 fik Kovalevskaja et 5-årigt professorat, og i 1889 blev hun professor på livstid. Hun blev den første kvindelige professor i matematik i nyere tid.

Mittag-Leffler havde startet tidsskriftet Acta Mathematica, som han forsøgte at gøre til et internationalt tidsskrift. Han gjorde Kovalevskaja til medredaktør og udnyttede hende som en slags rejsende ambassadør i matematik. Hun blev dermed den første kvindelige redaktør af et matematisk tidsskrift. Der udviklede sig et nært venskab og samarbejde mellem Mittag-Leffler og Kovalevskaja. Igennem nogle år (fra 1881) interesserede Kovalevskaja sig for følgende problem fra teoretisk mekanik: I et homogent tyngdefelt betragtes et tungt, stift legeme, der kan bevæge sig omkring et fast punkt. Der er ikke andre ydre kræfter end tyngdekraften og kraften i fixpunktet. Problemet er at bestemme legemets bevægelse, når man til et bestemt tidspunkt kender tyngdepunktets beliggenhed samt omdrejningsaksen og vinkelhastigheden. (Feltet af hastighedsvektorer vil til ethvert tidspunkt være som et rotationsfelt). Eksempler er en snurretop, der roterer om et fast punkt, og et gyroskop. Det var hendes egen idé, ikke Weierstrass'. Ved hjælp af den såkaldte inertiellipsoide var det kendt, at man kunne opstille 6 ordinære differentialligninger af 1. orden; men man kunne ikke løse det generelle system. Euler betragtede i perioden 1750-83 et specialtilfælde, hvor tyngdepunktet er i fixpunktet, og løste dette tilfælde. Lagrange betragtede i 1788 et andet specialtilfælde, hvor inertiellipsoiden er symmetrisk, og tyngdepunktet ligger på rotationsaksen for inertiellipsoiden. Desuden var det kendt, at man kunne løse specialtilfældet, hvor der er komplet kinetisk symmetri, og inertiellipsoiden er en kugle. Her stod sagen så stille, indtil Kovalevskaja gik videre.

Kovalevskaja kom videre med rotationsproblemet ved hjælp af en ny angrebsvinkel: Hun betragtede nemlig, inspireret af Henri Poincaré (1854-1912), tiden som en kompleks variabel! Derefter brugte hun kompleks funktionsteori til problemet i mekanik. Senere var der også

andre matematikere, der brugte dette trick i andre områder af matematikken, således at Morris Kline, 1972, 1990, Vol.2, p.626 kan bringe et citat af Jacques Hadamard (1865-1963): "Den korteste vej mellem to sandheder i de reelle tals område, går gennem de komplekse tals område."

Kovalevskaja betragtede et nyt specialtilfælde, som er asymmetrisk. Hun søgte løsninger af formen funktioner, som er potensrækker med højst et endeligt antal negative eksponenter, dvs evt med poler i den komplekse plan. Beregningerne her var meget vanskeligere end i de første 3 specialtilfælde; men Kovalevskaja var god til store beregninger. Hendes løsning involverede hyperelliptiske integraler, nemlig integraler, som indeholder rationelle funktioner af x og kvadratroden af $f(x)$, hvor $f(x)$ er et polynomium af grad større end 4. Hun nåede frem til et meget elegant ligningssystem ved hjælp af, hvad en russer, V.V.Golubev, i 1953 har kaldt en virtuos transformation. Resten af problemet - at invertere integraler - er ekstremt kompliceret. Her benyttede Kovalevskaja med stort talent Jacobi's theta-funktioner, som er beslægtede med elliptiske funktioner. Senere matematikere har forsøgt at simplificere beregningerne.

De 4 nævnte specialtilfælde er de eneste, der kan løses v.hj.af potensrækker med højst et endeligt antal negative eksponenter. Sofja Kovalevskajas intuition her var rigtig; men det endelige bevis lavede andre matematikere først i årene derefter. I 1888 fik hendes arbejde med rotationsproblemet den meget prestigefyldte franske akademi-pris, Bordin prisen, og i 1889 udkom hendes afhandling: Sophie Kowalevski: "Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe." Acta Mathematica, Vol.12, No.2 (1889), pp.177-232. Tjebysjev blev meget begejstret for hendes arbejde og fik hende udnævnt til korresponderende medlem af Videnskabernes Akademi i Skt. Petersborg i 1889. Men hun kunne ikke blive fuldt medlem, da hun var kvinde, så hun kunne ikke få gage. Derfor havde hun ingen økonomiske muligheder for at vende tilbage til Rusland, som hun ellers havde ønsket. Hun havde også drømt om et job i Paris; men Stockholm var det eneste sted, som ville ansætte en kvinde, så hun var nødt til at blive her, selv om hun ikke brød sig så meget om klimaet og syntes, at der var lidt for provinsielt. Nok var hun ensom noget af tiden, når hun boede alene; men hun havde trods alt mange nære venner i Stockholm, som også hjalp med at passe hendes datter, Fufa.

Den russiske matematiker, Andrej Markov (1856-1922), var en stridbar herre. Han var meget kritisk over for andre matematikeres arbejder, herunder Kovalevskajas rotationsarbejde. Han påstod, at der var flere fejl i det, selv om han ikke selv kunne bevise det. Han satte en anden russisk matematiker, Aleksandr Ljapunov (1857-1918) til at bevise det; men Ljapunov beviste, at Kovalevskaja havde ret. Diskussionerne om rotationsproblemet førte imidlertid til en lang stribe russiske artikler herom, indtil i hvert fald 1970'erne (Kochina 1981, 1985). Kovalevskajas løsning kaldes Kovalevskaja snurretoppen eller Kovalevskaja gyroskopet.

7. De sidste år

I 1887 mødte Sofja sit livs store kærlighed, en fjern slægtning til hendes første mand: Maksim M. Kovalevskij (1851-1916). Det var omtrent samtidig med, at hun for alvor kastede sig over en skønlitterær løbebane. Gösta Mittag-Leff-

fler var fortvivlet over, at Sofja i perioder lod sig distrahere væk fra matematikken; men hans søster, Anne Charlotte Leffler, som selv var forfatter, var begejstret. De to kvinder forsøgte oven i købet at skrive et drama, "Kampen om lykken", i fællesskab i 1887! For at vende tilbage til Maksim Kovalevskij, så var han en kendt og banebrydende samfundsvidenskabsmand. Han arbejdede med sociologi, jura, historie, etnografi og økonomi. Da Sofja lærte ham at kende, var han ligesom hun emigrant, fordi tsarstyret havde taget hans professorstilling fra ham p.gr.af hans liberale anskuelser. Senere blev han politiker og vendte hjem til Rusland, hvor han blev medlem af Dumaen. Han døde imidlertid inden Revolutionen. Han var ikke kommunist; men han korresponderede med Marx.

Maksim Kovalevskij boede en del i sin villa ved Rivièraen, hvor Sofja tit boede sammen med ham i sine ferier og i sin orlovsperiode, som hun fik p.gr.af overanstrengelse. De rejste også meget sammen i ferierne. Deres forhold var præget af den store lidenskab; men det gav også Sofja mange op- og nedture, da det var to store personligheder, der stødt sammen. Vistnok ville Maksim have Sofja til at opgive matematikken, hvad hun ikke ønskede, mens han støttede hendes litterære ambitioner mere. I hvert fald endte det med, at Sofja skrev i et brev, at de skulle giftes sommeren 1891. Den 10. februar 1891 døde Sofja Kovalevskaja imidlertid pludselig af lungebetændelse i en alder af kun 41 år.

Sofjas veninde, Anne Charlotte Leffler, mente, at Sofjas liv endte ulykkeligt p.gr.af problemerne med Maksim. Andre venner mente, at hun var glad til sidst. Men det er Anne Charlottes mening, der er kommet til at dominere eftertidens holdning til Sofja Kovalevskaja. Kovalevskaja var verdensberømt i sin levetid, og mange ledende matematikere var, som vi senere vil vende tilbage til, store beundrere af hendes talent, også efter hendes død. Men det er Anne Charlotte Lefflers biografi om Sofja Kovalevskaja, der udkom sammen med Sofjas barndomserindringer i 1892 (året inden Lefflers egen død), der har givet Sofjas eftermæle den sentimentale drejning. "Hun var ulykkelig, fordi hun var matematiker og kvinde"! Og senere generaliseringen: "Matematik og kærlighed er uforenelige for kvinder"! I 1984 kom der en svensk film om Sofja Kovalevskaja, der handler om denne konflikt mellem "følelser og fornuft": "Bjerget på Månens Bagside". Instruktion Lennart Hjulström. Manuskriptet var af Agneta Pleijel, som hader matematik, fordi hendes far var matematiker!

Jeg mener imidlertid, at Sofja Kovalevskaja havde så mange facetter, at den sentimentale side kun er én af dem. Hun var bidt af matematik siden barndommen, og når ånden kom over hende, havde hun en enorm arbejdskapacitet. Hun havde sine op- og nedture, som mange kreative mennesker; men hun var ikke syg.

8. Forfatterskabet

Sofja Kovalevskaja skrev både på russisk og på svensk. Meget af hendes skønlitteratur havde karakter af memoarer. Hun skrev dels essays om personer og institutioner, hun havde mødt (bl.a. den kvindelige engelske forfatter, George Eliot), dels egentlig skønlitteratur. Ved sin død efterlod hun sig mange ufuldendte, skønlitterære udkast. Hendes to hovedværker er dels barndomserindringerne, som først udkom som roman på svensk i 1889, siden

på russisk i 1890. Dels den posthumt udgivne, lille roman om en kvindelig nihilist, som kom på svensk i 1892 og uden for Rusland i forskellige, russiske udgaver, tilrettelagt af Maksim Kovalevskij. Den var forbudt af tsarens censur. I den nyopståede interesse for Sofja Kovalevskaja blev barndomserindringerne genudgivet på engelsk i 1978 og som roman på dansk i 1981. Romanen om Nihilisten Vera Vorontsov blev genudgivet på dansk i 1982. Se litteraturlisten.

Kovalevskajas skønlitterære værker blev meget positivt modtaget, bl.a. blev Georg Brandes meget glad for dem. Note: Georg Brandes: Samlede Skrifter. København 1899-1910. Citeret i Kochina, 1985, pp.224-225 efter den russiske udgave, Collection of Works. 2nd ed. Kiev, 1902, bd.1, pp.241-242 + 255. - Også de russiske kritikere var meget positive og sammenlignede erindringerne med Turgenjev. Hovedværkerne har mange lyriske naturskildringer og også lidt satire. De handler om unge, adelige, progressive kvinders opvækst i en brydningstid. Her bør det indskydes, at Rusland ikke har nogen tradition for en middelklasse.

Da Sofja Kovalevskaja døde, skrev kritikerne, at det var et nyt, lovende talent, man mistede. For at belyse forholdet mellem Kovalevskajas interesser for matematik og litteratur, bringes nu her et citat af hende selv: Hun blev engang spurgt af forfatterinden A.S. Sjabelskaja (pseudonym for A.S. Montvid) om, hvordan hun som kvinde kunne være både matematiker og forfatter. Hendes svar lød som følger:

"Jeg forstår, at De er meget overrasket over, at jeg kan arbejde sideløbende med litteratur og matematik. Mange, som aldrig har haft lejlighed til at opdage mere om matematik, forveksler den med aritmetik og betragter den som en tør og gold videnskab. I virkeligheden er den imidlertid en videnskab, som kræver den største fantasi. ...én af vort århundredes største matematikere har udtalt, helt korrekt, at det er umuligt at være matematiker uden at have en digters sjæl. Med hensyn til mig selv, så har jeg aldrig været i stand til at afgøre, hvad jeg har haft mest lyst til: matematik eller litteratur. Så snart min hjerne bliver træt af rene abstrakte spekulationer, begynder den straks at stille om til observationer af livet, til behovet for at genfortælle, hvad jeg ser. Og omvendt, på andre tidspunkter synes alt i livet pludselig så virkeligt og uinteressant, og det er kun de evige, uforanderlige love i videnskaben, som tiltrækker mig. Det er meget muligt, at jeg ville have kunnet udrette mere på det ene eller det andet af disse områder, hvis jeg havde hengivet mig selv udelukkende til det; men samtidig kan jeg simpelthen ikke opgive det ene eller det andet."

Citatet er fra et udateret brev til Sjabelskaja fra ca. efteråret 1890, som blev genudgivet i "Nekrolog: Sofja Vasilevna Kovalevskaja", Kharkovskie gubernskie vedomosti, 1. februar 1891 (gammel tidsregning).

9. Afslutning

Sofja Kovalevskaja var en habil matematiker, bedre end de fleste; men hun var ikke banebrydende som matematiker, som fx Weierstrass eller Emmy Noether. Efter hendes død holdt Moskvass Matematiske Forening en min-

dedag om hende med foredrag om hendes liv, hendes rene og hendes anvendte matematik. Matematikere, kvinder og mange andre i mange lande sørgede ved hendes alt for tidlige død i 1891. Hun blev beundret som matematiker af mange ledende matematikere i mange lande, ikke bare Weierstrass og Tjebysjev; men også for eksempel af Charles Hermite (1822-1901), som var den førende franske matematiker af den gamle generation, og af Henri Poincaré, som var den førende franske matematiker af Kovalevskajas egen generation. Gösta Mittag-Leffler ærede mindet om hende, til han selv døde i 1927; han gemte hendes papirer på Mittag-Leffler Institutet i Stockholm, og han skrev flere biografiske artikler om hende og om Weierstrass.

Men hun havde også modstandere, som fx Markov og anti-kvindesags mænd. Desuden har der i matematikens historie været forskellige "skoler", som har bekriget hinanden mere eller mindre. Fx havde Weierstrass' skole både mange tilhængere og mange modstandere. Blandt de sidste var der mange russiske matematikere, som så med skepsis på hans "rene" matematiske analyse, og Felix Klein (1849-1925), som grundlagde en geometrisk skole, og som derfor ikke roste Kovalevskaja så meget i sin bog, "Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert", 1926.

Hendes væsentligste indsats som matematiker var nok, gennem Acta Mathematica og rejsevirkomheden, at blive bindeled mellem russisk og vestlig matematik. Hun introducerede Weierstrass' skole i et skeptisk Rusland, og hun var hans bedste elev, men ikke hans marionet. De påvirkede gensidigt hinanden, og hendes poetiske åre virkede givet inspirerende på ham.

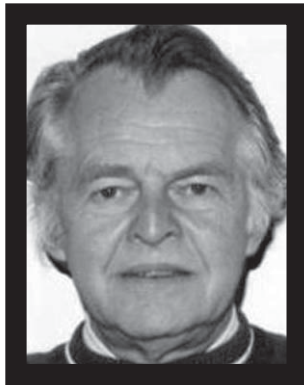
Hun var med til at åbne universiteterne for kvinder, også jobmæssigt, og som kvinde og pioner var hun den mest betydningsfulde videnskabskvinde før Emmy Noether og Marie Curie (1867-1934); men de nævner hende ikke som rollemodel, nok p.gr.af hendes sentimentale eftermæle. I dag er hendes liv og arbejde sat ind i en kulturhistorisk ramme, ofte med betoning af hendes nihilisme; men vi må ikke glemme hendes matematik. Nihilismen som ideologi støttede naturvidenskab og kvinder; men den var også politisk farlig for de etablerede kredse. Derfor var der også modstand mod Sofja Kovalevskaja; men alt i alt var nihilismen afgørende for hendes livsbane. Sammen med hendes specielle og store talent for matematik og hendes stærke viljestyrke og store arbejdssevne.

Litteratur

Det meste af nedenstående litteratur findes på Roskilde Universitetsbibliotek, hvor jeg var forskningsbibliotekar i perioden 1976-92. En undtagelse er den russiske bog af Kocina. Kovalevskajas matematiske artikler findes på Københavns Universitets Matematiske Instituts Bibliotek.

Den mest alsidige kilde til Sofja Kovalevskaja (bortset fra de russiske samfundsforhold, som nok anses for kendte af russere) er skrevet af den russiske, kvindelige matematiker, matematikhistoriker og Kovalevskaja-ekspert: Kocina, P.Ja.: Sofyja Vasilevna Kovalevskaja (1850-1891).

fors. side 30



Nekrolog

Flemming Damhus Pedersen

19. maj 1925 – 12. marts 2004

Af: Bodil Branner, Vagn Lundsgaard Hansen og Tom Høholdt (DTU)

Den 12. marts 2004 afgik forhenværende afdelingsleder lektor Flemming Damhus Pedersen, Institut for Matematik, DTU, ved døden. Igennem hele livet var Flemming et yderst beskedent og tilbageholdende menneske, der ikke ønskede nogen form for virak omkring sin person. Han vil blive husket af sine mange venner.

For studerende og udenforstående fremtrådte Flemming som et yderst venligt og hjælpsomt menneske, de der lærte ham nærmere at kende værdsatte desuden hans integritet og retskafne karakter. Flemming var på alle måder ualmindeligt velbegavet, og en person hvorom man med rette kunne bruge betegnelsen vis. Vi satte ham højt både af menneskelige og faglige grunde.

Flemming blev student i 1944 og påbegyndte straks derefter studier i matematik, fysik og kemi ved Københavns Universitet. Fra 1948-52 var han på studieophold ved University of Southern California, hvor han erhvervede graden Ph.D. i 1952. I 1952-53 var han ved Yale University. Han blev efterfølgende cand. mag. og mag. scient. fra Københavns Universitet i 1954. Han var derefter ansat på Danmarks Tekniske Højskole (nu Danmarks Tekniske Universitet) fra 1954 til sin fratræden i 1988. På DTU fik han hurtigt ry for at være en fremragende underviser, og han var gennem alle årene en berømt og værdsat lærer.

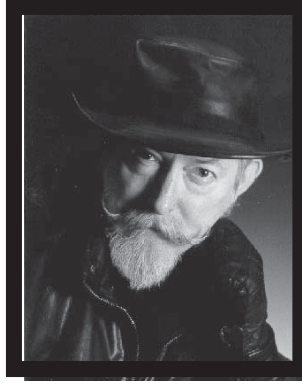
Flemming påtog sig mange opgaver både af faglig og administrativ karakter. Han arbejdede samvittighedsfuldt med de mange henvendelser, og løste dem effektivt og altid helt uselvsk. Flemming var institutleder fra 1976-79 og igen 1982-85, men i realiteten var han den egentlige kraft bag beslutninger i instituttet allerede fra 1970. Det krævede anvendelse af alle Flemmings talenter at overkomme dette i kamp med lettere genstridige og mageligt anlagte ældre medarbejdere ved instituttet, som til og med på papiret havde højere beføjelser end han. Flemming opbyggede instituttets bibliotek, indførte videregående kurser og var i 1975 den centrale person, der bevarede den grundlæg-

gende matematikundervisning på DTU samlet i et institut. Flemming var ordholdende og han støttede på alle måder medarbejderne på instituttet uden smålig skelen til egen fordel.

Hans ideal for udviklingen af instituttet var Matematisk Institut ved Aarhus Universitet, hvortil han havde nære forbindelser. Som formand for det Centrale Studienævn ved DTU, var Flemming hovedansvarlig for indførelsen af modulplanen ved DTU, der var en afgørende nyskabelse såvel teknisk som fagligt. Senere var han i perioden 1983-88 formand for fagråd G, hvor han igen fik brug for sine mangesidige talenter og diplomatiske evner i en brydningstid.

Flemming lagde mange kræfter i sin undervisning og han havde mange tunge administrative poster. Han fik dog også tid til i mere beskedent omfang at dyrke sine forskningsinteresser, som lå inden for differentialgeometrien, og som var blevet vakt gennem hans forbindelse med den berømte differentialgeometer Herbert Busemann hos hvem han skrev sin Ph.D.-afhandling om emner fra metrisk geometri. Senere opnåede han interessante resultater om de såkaldte midtpunktskurver og pedalkurver for plane kurver. De kontakter Flemming havde opnået gennem sit forskningsarbejde kom senere andre medarbejdere til gode.

Flemming var i årene 1968-76 medlem af bestyrelsen for Dansk Matematisk Forening, i perioden 1970-74 som foreningens meget aktive formand. Han var den helt afgørende hovedkraft bag afholdelsen af foreningens festslike 100 års jubilæum i oktober 1973. Han påtog sig også at redigere jubilæumsskriftet "Dansk Matematisk Forening 1923-1973" i forlængelse af C. Crones "Matematisk Forening gennem 50 år". Desuden tog han initiativ til etableringen af MatNyt, hvis første nummer udkom i april 1974. Han bevarede livet igennem en stor interesse for foreningens virksomhed.



Mindeord om matematikeren

Gert Kjærgård Pedersen

Af: Søren Eilers og Mikael Rørdam

Ved Gert Kjærgård Pedersens alt for tidlige død d. 15. marts mistede Danmark en af sine mest markante matematikere, og dansk operatoralgebra mistede sin bannerfører.

Gert, født i 1940, blev student ved Skt. Annæ Gymnasium i 1958, blev mag.scient. i matematik fra Københavns Universitet under vejledning af Esben Kehlet i 1964, og blev dr. phil. i 1972. Gert blev ansat som lektor ved Københavns Universitet i 1968, og blev professor samme sted i 1975, kun 35 år gammel.

I 1965/66, året efter at Gert blev kandidat, arrangerede Sven Bundgaard et legendarisk år for operatoralgebra i Århus med deltagelse af Richard Kadison - Mr Operator algebra himself! - Ed Effros, Erling Størmer m.m.fl. Også den unge nybagte kandidat Gert deltog i det årelange seminar, og det huskes hvordan han kom kørende til Århus fra København på sin motorcykel. Dette ophold var begyndelsen på Gerts usædvanligt stærke internationale netværk og det store internationale navn, han skabte sig. Siden kom der mange andre længerevarende studieophold til, bl.a. i Philadelphia (1971/72), Marseille (1974), MSRI, Berkeley (1984/85) og Fields Institutet, Waterloo (1995). Omfanget og styrken af Gerts videnskabelige netværk blev demonstreret af det overvældende fremmøde der næsten sprængte rammerne, da hans tresårsdag i foråret 2000 fejredes med et symposium i J.C. Jacobsens gamle bolig på Carlsberg.

Gerts videnskabelige produktion tæller over 100 publikationer med i alt 22(!) forskellige medforfattere. Produktionen ligger indenfor operatoralgebra og relaterede emner. I publikationslisten, og i bogreolerne hos alverdens operatoralgebraikere, finder man monografierne "C*-algebras and their automorphism groups" (Academic Press, 1979) og "Analysis Now" (Springer Verlag, 1988). C*-bogen er nok hård kost for dagens sarte sjæle, men alle, som tager bogen frem, vil glæde sig over Gerts vidunderlige beherskelse af det engelske sprog og hans elegante matematiske stil. Tre dage efter Gerts død forelæste Alain Connes - som på det tidspunkt endnu ikke havde hørt den sørgelige nyhed - over anvendeligheden af operatoralgebra indenfor fysikken. Her nævnte han flere gange Gerts C*-bog og hans resultater om multiplikatoralgebraen, herunder især den ikke-kommutative Tiet-

zes udvidelsessætning for lokalkompakte rum, som er omtalt nedenfor.

Operatoralgebra blev skabt i 1930'erne af John von Neumann og hans student Murray, som i en serie af artikler, omhandlende hvad vi i dag kalder von Neumann algebraer, formaliserede en matematisk ramme for kvantemekanikken. Observable repræsenteres ved operatorer på et Hilbertrum, og tilstande ved vektorer i Hilbertrummet. En von Neumann algebra er en algebra af (begrænsede) operatorer på et Hilbertrum, som er afsluttet under adjungering og under punktvis konvergens. Von Neumann algebraer er dybe og spændende objekter, som endnu i dag udfordrer vores forståelse. En kommutativ von Neumann algebra er isomorf med $L^\infty(X, \mu)$, hvor (X, μ) er et målrum, og studiet af von Neumann algebraer kan derfor kaldes *ikke-kommutativ målteori*. Gert har primært interesseret sig for C*-algebraer. Disse er også selv-adjungerede algebraer af operatorer på et Hilbertrum, men er til forskel fra von Neumann algebraer blot antaget at være afsluttet under den uniforme (= operator-norm) topologi. En kommutativ C*-algebra er isomorf med $C_0(X)$, hvor X er et lokalkompakt Hausdorff rum. Teorien om C*-algebraer kaldes i overensstemmelse hermed *ikke-kommutativ topologi*. Netop dette synspunkt, at betragte topologiske begreber, f.eks. dimension, oversætte det til algebraform, og generalisere det til vilkårlige C*-algebraer, har været en ledetråd i Gerts forskning.

Til en legendarisk konference i Baton Rouge i 1967 fremsatte Richard Kadison 20 fundamentale problemer vedrørende von Neumann algebraer. To af problemerne (nummer 17 og 18) blev løst af Gert i artiklerne "Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras" (Bulletin of the London Math. Soc. 4, 1972) og "The 'up-down' problem for operator algebras" (Proc. National Academy of Sciences USA 68, 1971). Begge problemer handler om, hvornår en C*-algebra er en von Neumann algebra. 4 af Kadisons problemer er stadig uløste. Liming Ge har for nyligt gennemgået alle 20 problemer i et manuskript, som er tilgængeligt på adressen: <http://spicrack.sr.unh.edu/~liming/gpots02.dvi>.

Et tilbagevendende tema i Gerts forskning var studiet af de såkaldte *multiplikatoralgebraer*. Multiplikatoralgebra-

en for en C^* -algebra A er den største C^* -algebra, der på essentiel vis indeholder A som et afsluttet tosidedt ideal. Da multiplikatoralgebraen for $C_0(X)$ kan identificeres med $C_b(X)$ kan forholdet mellem en C^* -algebra og dens multiplikatoralgebra opfattes som en generalisation af forholdet mellem et rum af kontinuerte funktioner der forsvinder i uendelig, og et rum af kontinuert begrænsede funktioner. Et af Gerts tidlige, dybe og ofte benyttede bidrag til forståelsen af denne sammenhæng (fra artiklen "Multipliers of C^* -algebras", Journal of Functional Analysis 13 (1973)), skrevet sammen med Chuck Akemann og Jun Tomiyama, er en ikke-kommutativ udgave af Tietzes udvidelsessætning for lokalkompakte separable Hausdorff rum. Den klassiske kommutative udgave siger, at hvis X er et lokalkompakt separabelt Hausdorff rum, og hvis Y er en afsluttet delmængde af X , da kan enhver kontinuert begrænset funktion på Y udvides til en kontinuert begrænset funktion på X . Restriktionsafbildningen $C_b(X) \rightarrow C_b(Y)$ er med andre ord surjektiv. Den mere elementære kompakte version af Tietzes udvidelsessætning giver, at restriktionsafbildningen $C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ er surjektiv. Det i artiklen viste teorem: *Enhver surjektiv $*$ -homomorfi mellem separable C^* -algebraer kan udvides til en surjektiv $*$ -homomorfi mellem deres multiplikatoralgebraer*, er således en ikke-kommutativ udgave af Tietzes sætning.

I et andet samarbejde med Chuck Akemann, "Ideal perturbations of elements in a C^* -algebra" Math. Scand. (1977), påvises eksistensen af en kvasi-central approksimativ enhed for en (ikke-unital) C^* -algebra. Med kvasi-central menes, at den approksimative enhed (som er et net) kommuterer asymptotisk med ethvert element i multiplikatoralgebraen for den givne C^* -algebra. Man kan f.eks. tænke på C^* -algebraen K af de kompakte operatorer på et Hilbertrum. Multiplikatoralgebraen for K er $B(H)$, mængden af alle begrænsede operatorer på Hilbertrummet H . Teoremet anvendt på dette eksempel giver eksistensen af et net $\{K_\lambda\}$ bestående af kompakte operatorer, således at $\|(I - K_\lambda)A\| \rightarrow 0$ og $\|K_\lambda T - TK_\lambda\| \rightarrow 0$ for alle kompakte operatorer A og for alle begrænsede operatorer T . Eksistensen af den kvasi-centrale approksimative enhed optræder i artiklen som et lemma, som forfatterne måske ikke anså for at være noget særligt, da de nedskrev det, men eftertiden har vist, at det var det!

Gert har i en stribe af artikler, heraf 3 i Inventiones Mathematicae, studeret C^* -dynamiske systemer. Blandt medforfatterne til disse artikler finder vi på en prominent plads Dorte Olesen, Gerts student og senere ægtefælle. I artiklerne behandles grupper, der virker som automorfi-er på en C^* -algebra. Der fokuseres blandt meget andet på Connes spektret for en gruppevirkning, og betingelser som sikrer, at krydsproduktet af en C^* -algebra med hensyn til en gruppevirkning – eller fikspunktalgebraen under en gruppevirkning – bliver en simpel C^* -algebra. Disse resultater er stadig i dag flittigt brugte klassikere.

Gerts måske mest citerede artikel, " C^* -algebras of real rank zero" (Journal of Functional Analysis 99 (1991), p. 131-149), er skrevet sammen med en anden af hans yndlingssamarbejdspartnere, Larry Brown. Heri generaliseres dimensionsbegrebet for kompakte og for lokalkompakte Hausdorff rum til C^* -algebraer, således, at der til enhver C^* -algebra A knyttes et tal $RR(A)$, som enten er et ikke-negativt helt tal eller $+\infty$. Dette tal måler dimensionen af C^* -algebraen A , og tallet er lig med $\dim(X)$, hvis A



Gert og Alain Connes, 1973

$= C_0(X)$. Særligt tilfældet, hvor $RR(A) = 0$ (real rank zero) er interessant og karakteriseres på forskellig vis i artiklen. Dette 0-dimensionale tilsyneladende særtilfælde har vist sig at være overraskende almindeligt forekommende indenfor simple C^* -algebraer, og begrebet og den ovennævnte karakterisering spiller en helt central rolle i Elliotts klassifikationsprogram for nukleære C^* -algebraer, hvor netop reel rang nul tilfældet opfører sig særligt eksemplarisk.

Gert har også opnået at få et matematisk begreb opkaldt efter sig. *Pedersen idealet* fra en af Gerts allerførste artikler "Measure theory for C^* -algebras" (Math. Scand. 19, 1966) er det mindste tætte ideal i en C^* -algebra, og det er et ikke-oplagt faktum, at et ideal med denne egenskab altid findes. Pedersen idealet for C^* -algebraen $C_0(X)$ er $C_c(X)$, de kontinuerte funktioner med kompakt støtte, og Pedersen idealet for de kompakte operatorer på et Hilbertrum er idealet af endelig-rangs operatorerne. (For en unital C^* -algebra er Pedersen idealet hele C^* -algebraen.) Pedersen idealet er bl.a. nyttigt, når man ønsker at finde et fælles domæne for samtlige tæt definerede spor på C^* -algebraen.

Meget mere kunne siges om Gerts forskning, f.eks. om hans arbejder vedrørende det konvekse hylster af ekstremalranden af enhedskuglen i en unital C^* -algebra, hans fællesarbejder med blandt andet Loring om stabile relationer, hans nyere artikler med Frank Hansen og Elliott Lieb om operator uligheder, og hans ligeledes nylige arbejder med Pere Ara om ikke-kommutativ ringteori. Med de udpluk, vi har præsenteret, har vi ønsket at give en smagsprøve på Gerts matematik.

Gert var en vittig sprogkunstner. Han har utvivlsomt været begejstret for at benytte "datidsformen" for C^* -algebras da han navngav en svag version af en AW^* -algebra med det velklingende SAW^* -algebra. En (velstående) C^* -algebra, hvor det konvekse hylster af ekstremalranden af enhedskuglen er hele enhedskuglen har Gert døbt "extremally rich". En uforstående referee forhindrede dog at det begreb der i dag kendes som "state excision" fik det noget mere malende navn "circumcision".

Udover sit omfattende virke indenfor matematisk forskning har Gert haft en række betydningsfulde tillidshverv. Blandt andet var han formand for Danmarks Matematiske Forening 1974-78 og et meget dedikeret med-



*Gert ved orglet i
hjemmet på
Kildeskovvej*

lem af Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab siden 1977, herunder vicepræsident og formand for den naturvidenskabelige klasse 1987-93. Man har ofte hørt Gert fortælle i kaffestuen på instituttet, at i aften skulle han til møde i VS! Gert blev tildelt Knud Sands legat i 1988: æresboligen på Kildeskovsvej i Gentofte. Boligen har været rammen om et travlt selskabsliv med blandt andet et utal af middage for lokale og tilreisende matematikere. Familiens gæstebog er et digert værk.

Gert formåede altid at omsætte sin glæde ved matematik i vedkommende og inviterende forelæsninger, der tog de studerende ved Københavns Universitet med storm. Oplevelsen var vel stærkest når han forelæste efter sin ovenfor nævnte lærebog "Analysis Now" i forbindelse med avancerede førstedelskurser eller indledende andendelskurser, og en sådan dosis af funktionalanalyse i den æstetisk rene form lokkede mange studerende i retning af Gerts forskningsfelt. Flere valgte Gert som vejleder, men uanset om Gert havde en formel supervisorsopgave at varetage eller ej, sørgede han altid for at følge de matematiske invitationer op med indbydelser til forskellige selskaber på Kildeskovsvej.

Som vejleder var Gert kendetegnet ved en fundamental tillid til sine speciale- og ph.d.-studerende. Man kunne altid få hjælp til såvel matematiske som karrieremæssige spørgsmål, men som udgangspunkt stode han på, at man selv kunne holde skruen i vandet. At blive mødt med en sådan tillid var særligt værdifuldt i en fase af ens uddannelse, hvor troen på egen rækkevirke af og til kunne svigte. Gert var også omhyggelig med at sikre, at de af hans studerende, der gik videre i den akademiske verden, blev inkluderet i Gerts internationale faglige netværk.

Det var klart fra selv et overfladisk kendskab til Gert, at hans interesser strakte langt ud over matematik, navnlig til familien, musikken og historien. Men selv for de matematikere, som i kraft af faglige fællesskaber kom tæt på ham, var omgangsformen altid i ordets bedste forstand akademisk; centreret omkring det faglige fællesskab og fascinationen af vort fags mange nuancer. Man kan derfor nok tillade sig at sige, at det var umuligt at forestille sig Gert uden matematik. For mange af os bliver det næsten lige så svært at vænne sig til matematik uden Gert.

Gert efterlader sig ud over Dorte deres tre voksne børn Just (1976), Oluf (1980) og Cecilie (1984).

Sofja Kovalevskaja

forts. fra side 26

(På russisk). Moskva: Nauka, 1981. 312 pp. Den er oversat til engelsk: Kochina, Pelageya: Love and Mathematics: Sofya Kovalevskaya. Moskva: Mir, 1985. 340 pp.

En anden grundbog, som lægger vægt på nihilismen, men ikke rummer noget matematik, er: Koblitz, Ann Hibner: A Convergence of Lives: Sofia Kovalevskaja: Scientist, Writer, Revolutionary. 1. ed 1983. 2nd ed. New Brunswick, N.J.: Rutgers Univ. Press, 1993. 305 pp.

Fra SK's forfatterskab:

Kovalevskaya, Sofya: A Russian Childhood. /Transl., Ed., and Introduced by Beatrice Stillman, and with an article "On the Scientific Work of Sofya Kovalevskaya" by P.Y. Polubarinova-Kochina. New York: Springer, 1978. 250 pp. Kovalevskij, Sonja: Liv i Rusland: Søstrene Rajevskij. /Oversat fra svensk. Esbjerg: Hønsetryk, 1981. 162 pp.

Kovalevskij, Sonja: Den polske opstand & Nihilisten Vera Vorontsov. /Oversat fra svensk. Esbjerg: Hønsetryk, 1982. 158 pp.

SK's matematiske hovedværker:

Kowalevsky, Sophie von: "Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen." Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol.80, No.1 (1875), pp.1-32.

Kowalevski, Sophie: "Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe." Acta Mathematica, Vol.12, No.2 (1889), pp.177-232.

Desuden har hun skrevet 7 andre matematiske afhandlinger, som nævnes i litteraturen om hende, bl.a. Polubarinova-Kochina, 1978 (se ovenfor under Kovalevskaya, 1978); Kochina, 1985; og Cooke, 1984. Anden litteratur:

Cooke, Roger: The Mathematics of Sonya Kovalevskaya. New York: Springer, 1984. 234 pp. Kline, Morris: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Vol.2:3. New York and Oxford: Oxford Univ. Press, 1972 (i 1 bind), 1990 (pb i 3 bind). Vol.2: Pp. 391-812.

Koblitz, Ann Hibner: Science, Women and Revolution in Russia. Amsterdam: Harwood Acad. Publ., 2000. 211 pp.

The Legacy of Sonya Kovalevskaya. Proceedings of a Symposium Sponsored by The Association for Women in Mathematics and the Mary Ingraham Bunting Institute, held October 25-28, 1985. /Ed. Linda Keen. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1987. 297 pp. (Contemporary Mathematics, Vol.64). - Rummer artiklen: Terng, Chuu-Lian: "Some Geometric Developments Related to Kowalewski's Work." Pp. 195-205.

Spicci, Joan: Beyond the Limit: The Dream of Sofya Kovalevskaya. Forge Books, 2002. 490 pp. Anmeldt i Notices of the AMS, Vol.51, No.1 (Jan. 2004), pp.39-42. Stites, Richard: The Women's Liberation Movement in Russia: Feminism, Nihilism, and Bolshevism, 1860-1930. 1. ed. 1978. 2nd ed. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1991. 476 pp.

Vucinich, Alexander: Science in Russian Culture, 1861-1917. Stanford: Stanford Univ. Press, 1970. 575 pp.

Weierstrass, Karl & Kowalevskaja, Sofja: Briefwechsel zwischen Karl Weierstrass und Sofja Kowalevskaja. /Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Reinhard Bölling. Berlin: Akademie Verlag, 1993. 504 pp.



Og den første pris g r ... til Guy Brousseau!

Den internationale kommission for matematikundervisning (ICMI) har for nogle år siden besluttet at etablere en pris for "lifetime achievement" i matematikdidaktisk forskning. Prisen er opkaldt efter Felix Klein, som var ICMI's første præsident (1908-1920). Den uddeles for første gang ved ICME 10, som finder sted på DTU i begyndelsen af juli. Som den første modtager er valgt den franske matematikdidaktiker Guy Brousseau. Uddrag af pris-komiteens hyldest til modtageren kan ses i tekstrammen på næste side.

Mange af bladets l sere vil utvivlsomt have hørt om Brousseau, men alligevel er det vel på sin plads at sige lidt mere om hans hovedværk, *Teorien om didaktiske situationer i matematik* [1]. Meningen med de flg. linier er ikke at give et overblik over Brousseaus arbejder – som for en dels vedkommende er særdeles specialiserede og vanskeligt tilgængelige. Meningen er blot at introducere nogle f a hovedideer. Mere omfattende fremstillinger på dansk findes fx i [2], [3].

Udgangspunktet for Brousseau er samspillet mellem tre instanser: læreren, eleven og "matematik". Hvordan kan læreren tilrettelægge situationer, som g r det muligt – herunder meningsfuldt – for eleven at tilegne sig matematisk viden? "Det viser sig", skriver han, "at en god epistemologisk teori sammen med et godt didaktisk design er afgørende" ([1, p. 24]). Epistemologi refererer her til lærerens – og didaktikerens – viden om, og analyse af, matematiske begreber og resultater med henblik på undervisning. Et vigtigt produkt af denne analyse er *funda-*

mentale situationer fx for et begreb – dvs. problemstillinger som muliggør at eleven, gennem sit arbejde med dem, kan tilegne sig en funktionel og fyldestgørende forståelse af begrebet. Design drejer sig nu om at tilrettelægge *overdragelsen af situationen til eleverne (devolution)* – og det kan indebære omfattende eksperimentelt arbejde med forskellige former, der bl.a. tager sigte på at gøre situationen både interessant, udfordrende og overkommelig. Den teoretiske situation bliver gennem overdragelsen til en *adidaktisk situation* – dens succes afhænger af elevernes handlemuligheder i arbejdet med den (elevens samspil med det didaktiske miljø). Der er mange komplekse og undertiden paradoksale fænomener, som betinger denne succes. På den ene side hører det med til de uskrevne regler for undervisningssituationen (den *didaktiske kontrakt*), at læreren i en eller anden forstand skal igangsætte elevens arbejde og skabe fornuftige rammer om det. På den anden side må læreren ikke fortælle eleverne hvad de skal gøre – så ødelægges jo elevernes læringsmuligheder ved selvstændigt at prøve kræfter med situationen. Der er med andre ord tale om et "ustabilt" system, der let bringes ud af balance – en let for ndring af de "variable" kan føre til et helt andet resultat. Og det kræver meget præcise begreber overhovedet at holde styr på de "variable" i dette system. Læreren må hele tiden træffe valg om, hvornår der skal gives yderligere information, stilles spørgsmål etc., og dette samspil mellem læreren og elevens arbejde i den adidaktiske situation kalder Brousseau en *didaktisk situation*. Endelig er det lærerens opgave at *institutionalisere* viden, som eleverne har tilegnet sig – uden "opsamling" og "præcisering" af indvundne erfaringer bliver resultaterne af den adidaktiske situation ikke varige og fælles, og dermed ikke noget der kan bygges videre på.

Hvad har ovst. egentlig at gøre med matematik, bortset fra at ordet optræder? L sere, der fik tygget sig igennem ovst. afsnit og måske endda fandt lidt mening i det, vil sikkert blot have fundet konturerne af en meget generel model for "undervisningssituationer". Hertil er der to ting at sige. For det første bliver dele af Brousseaus teorier og metoder faktisk anvendt inden for andre fags didaktik. For det andet udgør selve "begrebsapparatet" et skelet, som kun konkrete anvendelser og resultater kan give mening til. Hovedparten af Brousseaus produktion baserer sig da også på et enestående empirisk arbejde med udvikling og afprøvning af didaktiske situationer i matematikundervisning, udført inden for rammerne af den "forsøgsskole" ( cole Jules Michelet) ved Bordeaux, som blev oprettet i 1972 i tilknytning til Brousseau's forskningscenter. Betydningen af Brousseau's livsværk ligger der-



Fra en reception ved Jules Michelet Skolen i Talence, juni 2000, i forbindelse med det internationale Brousseau-kollokvium. Guy Brousseau ses yderst til højre.



Guy Brousseau

From the early seventies, Guy Brousseau emerged as one of the leading and most original researchers in the new field of mathematics education, convinced on the one hand that this field must be developed as a genuine field of research, with both fundamental and applied dimensions, and on the other hand that it must remain close to the discipline of mathematics.

His notable theoretical achievement was the elaboration of the theory of didactic situations, a theory he initiated in the early seventies, and which he has continued to develop with unfailing energy and creativity. At a time when the dominant vision was cognitive, strongly influenced by the Piagetian epistemology, he stressed that what the field needed for its development was not a purely cognitive theory but one allowing us also to understand the social interactions between students, teachers and knowledge that take place in the classroom and condition what is learned by students and how it can be learned. This is the aim of the theory of didactic situations, which has progressively matured, becoming the impressive and complex theory that it is today. To be sure, this was a collective work, but each time there were substantial advances, the critical source was Guy Brousseau.

This theory, visionary in its integration of epistemological, cognitive and social dimensions, has been a constant source of inspiration for many researchers throughout the world. Its main constructs, such as the concepts of adidactic and didactic situations, of didactic contract, of devolution and institutionalization have been made widely accessible through the translation of Guy Brousseau's principal texts into many different languages and, more recently, the publication by Kluwer in 1997 of the book, 'Theory of didactical situations in mathematics - 1970-1990'.

(...)

Guy Brousseau is not only an exceptional and inspired researcher in the field, he is also a scholar who has dedicated his life to mathematics education, tirelessly supporting the development of the field, not only in France but in many countries, supporting new doctoral programs, helping and supervising young international researchers (he supervised more than 50 doctoral theses), contributing in a vital way to the development of mathematical and didactic knowledge of students and teachers.

(Uddrag af "Citation for the 2003 ICMI Felix Klein Medal to Guy Brousseau". Hele teksten kan læses på <http://www.ams.org/ams/Brousseaucitation.pdf>)

for i den videnskabelige metode, hvor teori og systematisk observation hænger sammen. "Matematikdidaktik" uden empirisk grundlag er i bedste fald skrivebordsfilosofi – og "matematikdidaktik" uden teoretisk grundlag er i bedste fald ufokuseret dataindsamling. Brousseau har med sine arbejder sat høje standarder for et forskningsområde, hvis vigtighed er åbenlys, men hvor ikke alt, der glimrer, er guld.

Leder

forts. fra side 2

skabelige fakultet fx. Sidstnævnte har ganske vist ikke gjort det let for gymnasieverdenens behov: NAT-KU's bacheloruddannelser er for fagsnævne (de er principielt 1-fags) og de gør det vanskeligt at lave kombinationer mellem ligeberettigede fag. Måske kan kandidatuddannelserne rette op på skævheden, men det ville have været bedre at udforme bachelorgraderne med mulighed for bredere indhold og afrunding. Og på det allerseneste er der jo også endelig kommet en bekendtgørelse, som stiller visse krav.

Som nævnt stiller fremtidens gymnasium nogle ganske særlige krav, også til matematiklærerne: de skal kunne håndtere faglige samarbejder, de skal kunne håndtere IT-værktøjer (se hvad Søren Eilers og Bjørn Felsager har herom i deres artikler om brugen af CAS) og de skal kunne håndtere undervisnings- og arbejdsformer, som ligger milevidt fra den traditionelle tavleorienterede klasseun-

Referencer

- [1] Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- [2] Morten Blomhøj (1995): *Den didaktiske kontrakt i matematikundervisningen*. Kognition og Pædagogik 4 (3), 16-25.
- [3] Jørgen C. Ebbesen (2003): *Den franske skole indenfor matematikkens didaktik*. (Opgave fra cand.pæd.-studiet i didaktik mshp. matematik.) Findes on-line på <http://joergen.c.ebbesen.person.emu.dk> (klik på "Den franske skole" og derpå "her").

dervisning. De skal simpelthen kunne formidle matematikken på en didaktisk solidt funderet basis afpasset eleverne samtidig med, at de skal kunne bruge faget i et kulturelt og anvendelsesmæssigt perspektiv. Det taler alt sammen for at indføre en stærkere fokusering på gymnasielæreruddannelsen som en toningsmulighed inden for det generelle bachelor+kandidatforløb – og ikke blot afvente pædagogikum. Fremtidens gymnasium varsler også at de tendenser i retning af større tværfaglighed, som vi ser mange steder også i forskningsverdenen, vil blive mere og mere udprægede, hele samfundet igennem. Den samme tendens opleves inden for erhvervslivets anvendelse af matematikere, hvor den formidlingsmæssige side også er af stor betydning. Den gamle isolerede, rene matematiker bliver lidt af en sjældenhed – der er simpelthen ikke meget brug for ham/hende.

Boganmeldelser

ved Carsten Lunde Pedersen

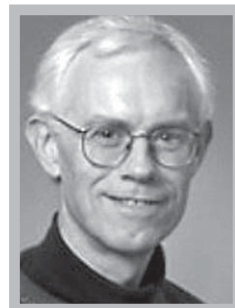


Anmeldelse:

**Malene Marie Bak: *Matematik i Danmark 1500-1700*
Steno Museets Venner 2003, 51 sider, 55 kr.**

**Palle Bak Petersen & Søren Vagner:
Studentereksamensopgaver i matematik 1806-1991.
Matematiklærerforeningen 2003, 326 sider samt CD,
300 kr.**

Af: Søren Antonius,
Center for Erhverv og
Uddannelse
Storstrøm, e-mail:
sa@ceus.dk



Matematikundervisningens historie er omgærdet af stor interesse for øjeblikket. I 2002 udkom H.C. Hansens Fra forstandens slibesten til *borgerens værktøj* (DCN) om folkeskolens matematikundervisning, og en ny udgivelse om samme emne er på vej med H.C. som redaktør. Ind i mellem disse udgivelser er der kommet to andre publikationer, som ligger smukt i forlængelse af hinanden: Malene Marie Baks *Matematik i Danmark 1500-1700* og Palle Bak Petersen & Søren Vagners *Studentereksamensopgaver i matematik 1806-1991*.

Malene Marie Bak, Ålborg Katedralskole, begynder sin gennemgang med *den danske skole* i 1500-tallet, som var en grundskole for børn af borgerskanden og de fattigste i samfundet. Det er bemærkelsesværdigt, at den danske skole var for både drenge og piger. Der blev undervist i aritmetik, dvs. de fire regningsarter suppleret med bl.a. Regula de tri. Alt sammen med et praktisk formål. *Latinskolen*, som stammer helt tilbage til 1100-tallet, var mere teoretisk og omfattede både aritmetik og geometri. Latinskolen fungerede som adgangsvejen til universitetet, hvor matematikundervisningen – skal man tro MMB – var af noget blandet kvalitet. Matematik havde åbenbart ikke den store status – studenterne var mere interesseret i teologi, medicin og astronomi, hvilket bl.a. kom til udtryk ved, at professorerne i matematik var dårligere lønnet end andre professorer. Den væsentligste faglige bedrift i denne 200-års periode synes at være indførelsen af logaritmer i undervisningen.

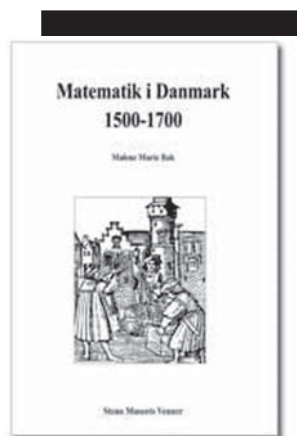
Bogens styrke ligger primært i skildringen af en række matematiklærere og matematikeres liv gennem deres interesser, udgivelser og ansættelsesforhold. Nogle var for mig ukendte, bl.a. Jørgen C. Dybvad (d. 1612), der skrev lærebøger i geometri for latinskolen, blev professor i matematik ved Københavns Universitet, men avancerede senere til professor i teologi for at ende i unåde hos kongen og blive afskediget, fordi han tillod sig at kritise-

re adel og regering. Andre er mere velkendte. Georg Mohr (1640-1697) er kendt af enhver matematiker gennem Matematiklærerforeningens årlige Georg Mohr konkurrence. Hans udgivelse om Euklids geometri blev genopdaget i 1927, og den skabte respekt om hans faglige dygtighed, idet den viste sig at indeholde et bevis for, at Euklids passer-og-lineal konstruktioner kan udføres med passer alene – et resultat, som man troede først var blevet bevist 100 år efter hans død.

Palle Bak Petersen, rektor ved Frederiksværk Gymnasium, og Søren Vagner, undervisningskonsulent i Undervisningsministeriet, begynder deres beretning om matematikfaget i *den lærde skole* (gymnasiet) ca. 100 år efter, at MMB slutter – omkring 1800. Materialet omfatter alle opgaver fra studentereksamen gennem næsten 200 år. Sommeropgaverne fra studentereksamens højeste niveau er aftrykt i bogen, mens samtlige opgaver er medtaget på en medfølgende cd. Det er en sand guldgrube af opgaver. Enkelte opgaver er suppleret med kommentarer og besvarelser. Der er eksempler på trekanter, der ikke eksisterer, og som førte til fyring af undervisningsinspektøren, og opgaver med fejl, der førte til omeksamen. Igennem dette eldorado af opgaver kan man selv danne sig et indtryk af gymnasiefagets udvikling i niveau og indhold gennem de forskellige uddannelsesreformer. Jeg kunne ikke dy mig for at begynde læsningen med at gense mine to eksamenssæt fra studentereksamen i 1970. Meget er forblevet næsten uforandret, fx funktionsundersøgelser, vektorer og rumgeometri. Noget er forsvundet, fx kompositioner, affine afbildninger og komplekse tal. Og nye emner er blevet tilføjet, fx stokastiske variable og de tre aspekter.

Men bogen er meget mere end en opgavesamling. Forfatterne giver en grundig orientering om de forskellige reformer af gymnasiet igennem hele perioden med fokus på matematikfagets indhold, timetal og eksamensform,

fors. næste side





Bent Ørsted er pr. 1. september 2004 ansat som professor ved Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet.

Bent er uddannet cand. scient. i matematik og fysik fra Aarhus Universitet (1974) og Ph. D. i matematik fra Massachusetts Institute of Technology (1976). Han har været ansat ved MIT, University of Utah, og ved IMADA, SDU, samt været gæstprofessor ved flere universiteter, sidst ved Cornell University. Han arbejder med Lie grupper og deres anvendelse i harmonisk og geometrisk analyse.

Bent interesserer sig også for matematiks rolle i andre fag, herunder fysik, samt fagets placering i uddannelsessystemet.



Jacob Schach Møller er pr. 1. september 2004 ansat som Skou stipendiat ved Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet.

Sin Cand. Scient og Ph.D. grad tog Jacob ved Aarhus Universitet under vejledning af Erik Skibsted, i henholdsvis 1994 og 1998. I årene 1998 til 2004 har Jacob arbejdet som PostDoc ved Universite Paris-Sud, Frankrig, og Mainz Universitet, Tyskland. Hans interesseområde er matematisk fysik, med hovedvægt på kvantemekanik, statistisk mekanik og kvantefelt teori.

Jacob holder desuden af at spille basketball.

fors. fra forrige side

herunder karaktergivning. Det begynder med den skriftlige prøves dåb i 1806 – to opgaver i aritmetik og to i geometri. Det er interessant, at man bruger formuleringer som *Hvis tiden tillader, bevises*, og *Man viser, saavidt tiden tillader*. Den skriftlige prøve indgik i *Examen Artium*, der også fungerede som adgangsprøve til universitetet. Den mundtlige prøve blev indført i 1812. Herefter følger hovedtræk ved de efterfølgende reformer. Først reformen i 1850 – kaldet den *Madvigske Skoleordning* efter Johan N. Madvig, som satte sit præg på reformen som kultusminister 1848-51 og derefter som undervisningsinspektør. Det er her gymnasiet får 'den almindelige dannelse' som et formål. Indholdet blev for første gang centralt fastlagt ved en bekendtgørelse. Det hedder heri, at undervisningen skal 'meddele Kundskab' om aritmetik og elementær algebra samt plangeometri, stereometri og trigonometri. Med reformen i 1871 delte man gymnasiet i en sproglig-historisk linje og en matematisk-naturvidenskabelig linje, hvor der blev plads til analytisk geometri og projektionslære. Det var dog kun ganske få elever, der valgte denne linje. Den store reform i 1903 indførte mellemsskolen, og gymnasiet deltes i tre linjer: den klassisk sproglige, den ny-sproglige og den matematisk-naturvidenskabelige linje. Undervisningen kom for første gang til at omfatte infinitesimalregning – indtil 1937 dog kun som valgfrit emne. Grengymnasiet indførtes i 1958, og matematikundervisningen blev præget af *new math* og strukturalisme. Matematik på sproglig linje blev genindført efter at have været ude siden 1953. Med reformen i 1971 fik eleverne lørdagsfri, og i 1988 blev valgfagsgymnasiet indført.

Og hvordan er det så gået med timetallet? Op og ned! I starten blev der undervist i 4 timer pr. uge (formentlig

50 minutters lektioner), med 1871-reformen topper timetallet med 9 pr. uge, og nu er det nede på 5 timer pr. uge.

Gennemgangen suppleres af interessante portrætter og anekdoter om matematiklærere og dem, der stillede eksamensopgaverne: H.C. Ørsted (1777-1851) tilskrives det første opgavesæt i 1806, og han argumenterede med bogen *Aanden i Naturen* for at naturfagene kunne bidrage til almindelsen, Julius Petersen (1839-1910), undervisningsinspektør og forfatter til et meget udbredt lærebogssystem, der først endeligt blev udkonkurreret af Kristensen & Rindung, H.G. Zeuthen (1839-1920), internationalt anerkendt for sin forskning i matematikkens historie, og ikke mindst Harald Bohr (1887-1951), der skrev den første danske lærebog i infinitesimalregning og var ophavsmand til formuleringen 'et epsilon givet os af vor værste fjende'.

Også enkelte elever kommer til orde. Fortællingen krydres af en række personlige beretninger om det at gå til eksamen i matematik. H.C. Andersen har efter sigende været ganske god til matematik, men ret nervøst anlagt. Det fortælles, at han besvimelede ved slutningen af prøven og fik dryppet "eudecolone" i ansigtet for at vække ham. William Bergsøe blev udsat for en opgave, som ikke kunne regnes med den lærebog de havde brugt og fik derfor hævet 'slet' til 'mådelig med spørgsmålstegn'. Men rektor havde trøst til den uheldige Bergsøe, da han fik overrakt karakterbogen: "Bryd Dem ikke derom! Karakterbogen gælder for Skolen, ikke for Livet. Den betegner i Reglen Flid, men ikke Begavelse." Ak ja, spørgsmålet om, hvad karakterer måler, er ikke af ny dato.

Begivenheder

ved Poul Hjorth



Dansk Matematisk Forenings Sommerskole for andendels og Ph.D. studerende i matematik i Danmark. 2004.

Tidspunkt: 9-11 august

Sted: Århus Universitet

Pris: 500 kr, som de studerende opfordres til at søge i deres respektive institutter. Prisen dækker opholdet, altså kost og logi, men ikke rejsen, som de studerende forventes at dække af egen lomme.

Emnerne er

Gröbnerbaser eller Gausselimination for viderekomne ved Niels Lauritzen

Matematiske modeller i Bioinformatik ved Asger Høboldt,
Bioinformatics Research Center, Aarhus Universitet og Niels Richard Hansen, Kbh.

Endvidere evt. et videnskabshistorisk tema.

Flere oplysninger kan findes på hjemmesiden
<http://www.dmf.mathematics.dk/kurser/aarhus-04.html>

Dansk Matematisk Forenings Generalforsamling (er afholdt: her er referatet)

DMFs ordinære generalforsamling den 17. maj 2004.

Ved generalforsamlingen blev den foreslåede bestyrelse for 2004 - 2006 valgt. Bestyrelsen består dermed af

Johan P. Hansen (AU), formand,
Jan Philip Solovej (KU), sekretær og næstformand,
Søren Eilers (KU), kasserer,
samt
Lisbeth Fajstrup (AAU),
Henrik Gordon Petersen (MIP, SDU),
Andrew Swann (IMADA, SDU),
Poul Hjorth (DTU og MIP, SDU).

Som revisorer blev valgt
Anders Jensen og Mogens Bruun Heefeldt.

Kontingentet for ordinære medlemmer blev vedtaget til 310 kr pr år og 155 kr for studerende, pensionister og reciprocitetsmedlemmer.

Med ophøret af avispostkontorets udsendelse af Matilde må foreningen forvente øgede udgifter.

Det vil derfor være nødvendigt kritisk at gennemgå listen over de institutioner, der modtager frieksemplarer. For medlemmer med en arbejdsadresse på et af universiteterne i Danmark vil bladene fremover blive sendt samlet til en kontaktperson på arbejdsstedet og distribueret gennem denne.

ICME - 10. Internationale Kongres om Matematikuddannelse:

afholdes i København 4. - 11. juli 2004. Se <http://www.icme-10.dk/>

OLA 2004 Workshop on On-Line Algorithms, afholdes på Rungstedgaard, 5. - 7 juli 2004

Se: <http://ola.imada.sdu.dk/>

SWAT 2004 9th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory

afholdes på Louisiana Kunstmuseum 8. - 10 juli 2004.
Se: <http://swat.diku.dk/>

ESGI 51

Det 51. Europæiske 'Study Group' med Industrien afvikles i dagene 16.- 20. august på DTU. En 'Study Group' er et arbejds møde hvor matematiske spørgsmål fra virksomheder bliver 'brainstormet' af de deltagende matematikere i grupper. Se mere om deltagelse, og om årets industriopgaver, på
<http://www.mat.dtu.dk/ESGI/51/>

3rd Symposium on Applied Analysis, 26. - 28 August 2004

Organized by the Danish SNF-PDE-group.
The meeting is sponsored by the Danish Natural Science Research Council (SNF) and by MaPhySto.
Se <http://www.math.ku.dk/conf/3dansymp/>

Christian U. Jensen Symposium on Algebraic Number Theory, 3. - 5. september 2004

Se: <http://www.math.ku.dk/conf/cuj/>



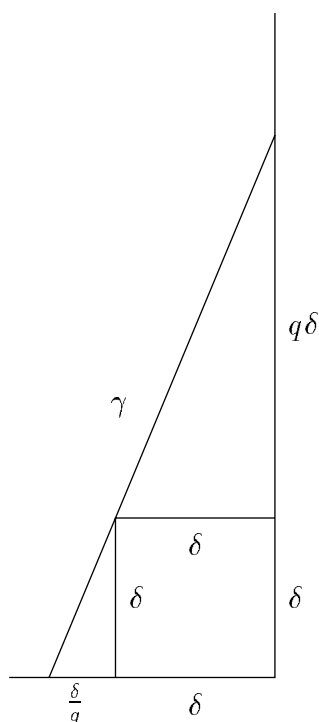
AFTERMATH

LØSNINGER

Opgaverne er hentet fra Hugh ApSimon, Mathematical Byways, Oxford University Press 1984.

Alle opgaver er løst af Ebbe Thue Poulsen. Jeg bringer hans løsninger frem for forfatterens.

Stigen



En stige på 221 cm står op ad en mur, så den netop rører en kasse, der er 60 cm på hver led og som står klos op ad muren. Hvor højt op ad muren kan stigen nå?

Vi sætter $q = \frac{\alpha}{\beta}$ og $k = \frac{\gamma}{\delta}$. Så er

$$\gamma = \delta\sqrt{1+q^2} + \delta\sqrt{1+\frac{1}{q^2}} = \delta\sqrt{q+\frac{1}{q}} \left(\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}} \right)$$

der giver

$$k^2 = \left(q + \frac{1}{q} \right) \left(q + \frac{1}{q} + 2 \right) = \left(q + \frac{1}{q} + 1 \right)^2 - 1$$

og videre

$$q + \frac{1}{q} + 1 = \sqrt{k^2 + 1}$$

hvoraf vi får

$$q = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 + 1} - 1 \pm \sqrt{k^2 - 2 - 2\sqrt{k^2 + 1}} \right)$$

I den højeste stilling når stigen højden

$$h = \delta + q\delta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} + \delta + \sqrt{\gamma^2 - 2\delta^2 - 2\delta\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \right)$$

og i det specielle tilfælde $\gamma = 221\text{cm}$, $\delta = 60\text{cm}$ får vi $h = 204\text{cm}$.

Stigerne

En stige af længde ... står stjelt op ad muren, så den netop rører en kasse, der har form som en terning, og som står klos op ad muren. Stigens fod er ... fra muren. Hvor stor er kassen?

Denne opgave blev stillet tre gange med forskellige mål for ..., men alle målene var hele tal i cm. Svarene var også hele tal i cm.

Når svarene alle tre gange var det samme, og stigerne alle var mindre end 840 cm, hvor stor var så kassen?

Med samme figur som ovenfor er β , γ og δ hele tal, og følgelig er

$$\alpha = q\beta = \frac{\delta}{\beta - \delta}\beta$$

et rationalt tal.

Da samtidig $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ er et helt tal, må α være et helt tal. Altså er (α, β, γ) et pythagoræisk tripel, og dermed et helt multiplum af et pythagoræisk tripel, (a, b, c) , hvor $(a, b) = 1$.

Det er let at se, at $\delta = \alpha\beta/(\alpha + \beta)$, og følgelig er $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et helt multiplum af talsættet

$$(a, b, c, ab/(a + b))$$

Da δ er et helt tal og $(ab, a + b) = 1$, følger det, at $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ er et helt multiplum af talsættet

$$(a(a + b), b(a + b), c(a + b), ab)$$

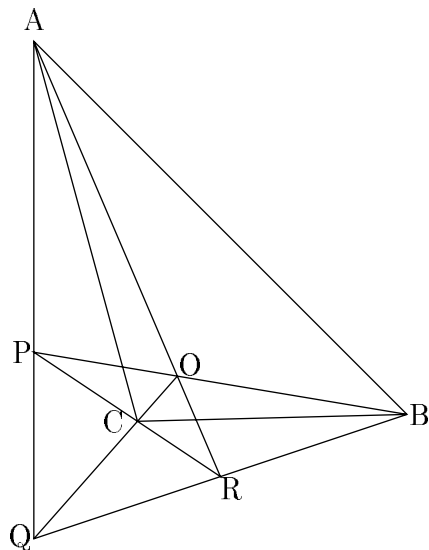
I nedenstående tabel er anført dels de mindste pythagoræiske talsæt med $(a, b) = 1$, dels de tilsvarende talsæt

$$(a(a + b), b(a + b), c(a + b), ab)$$

a	b	c	a(a+b)	b(a+b)	c(a+b)	ab
3	4	5	21	28	35	12
5	12	13	85	204	221	60
8	15	17	184	345	391	120
7	24	25	217	744	775	168
20	21	29	820	861	1189	420
12	35	37	564	1645	1739	420

Det mindste tal δ , som er multiplum af tre forskellige tal fra sidste kolonne, er $\delta = 120$ med de tilsvarende stigelængder 350, 442 og 391. Den næste mulighed for δ er 240, som imidlertid er udelukket, da den ene af de dertil svarende stigelængder er 884.

En trekant



Trekantene $\triangle OPQ$, $\triangle OQR$ og $\triangle PQR$ har hhv. arealerne 4, 5 og 6. Hvor stor er så $\triangle ABC$?

Lad mig betegne arealet af en trekant, fx $\triangle ABC$, med $|ABC|$, og lad AB betegne såvel et liniestykke som dets længde regnet med for-tegn (i henhold til en ikke specificeret orien-tering).

Ebbe har givet en geometrisk løsning, der svarer til ApSimon's, og en analytisk, som følger:

Betragt koordinatsystemet $(C, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, hvor $\mathbf{i} = \vec{CR}$ og $\mathbf{j} = \vec{CO}$. I dette koordinatsystem har punkterne O , P , Q og R koordinater af formen $(0, 1)$, $(-a, 0)$, $(0, -b)$, og $(1, 0)$. Arealerne af trekantene $\triangle OPQ$, $\triangle OPR$ og

$\triangle PQR$ er henholdsvis

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a(1+b)E &= 4, \\ \frac{1}{2}(1+b)E &= 5, \\ \frac{1}{2}b(1+a)E &= 6,\end{aligned}$$

hvor E betegner arealet af enhedsparello-grammet, og heraf fås let $a = \frac{4}{5}$, $b = 2$ og $E = \frac{10}{3}$.

Linierne gennem O og R og gennem P og Q har ligningerne

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \quad \text{og} \\ \frac{x}{-a} + \frac{y}{-b} &= 1\end{aligned}$$

og heraf bestemmes koordinaterne til A , der bliver $(-2, 3)$, mens koordinaterne til B bestemmes ud fra ligningerne for linierne gen-nem O og P og gennem Q og R :

$$\begin{aligned}\frac{x}{-a} + y &= 1 \quad \text{og} \\ x + \frac{y}{-b} &= 1\end{aligned}$$

der giver $B = (4, 6)$.

Nu kan vi beregne arealet af $\triangle CBA$:

$$|CBA| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} E = 40$$

NYE OPGAVER

EkspONENTIELT

Løs ligningerne

$$\begin{aligned}x^{x^{x^{\dots}}} &= 2 \\x^{x^{x^{\dots}}} &= 4\end{aligned}$$

Soldaterne på marken

Et ulige antal soldater står på en mark sådan, at alle parvise afstande er forskellige. Hver soldat bliver bedt om at holde øje med den nærmeste anden soldat.

Vis, at der er mindst én soldat, der ikke bliver holdt et øje med.

Intervaller og afstande

Lad S være foreningen af k disjunkte, afsluttede intervaller i enhedsintervallet $[0, 1]$. Antag, at S har den egenskab, at for ethvert reelt tal, $d \in [0, 1]$, findes to punkter i S med afstanden d .

Vis, at summen af længderne af intervallerne i S er mindst $\frac{1}{k}$.

Skabslågerne

I et omklædningsrum på et gymnasium er der 100 skabe på række, nummererede fra 1 til 100. Da den første elev ankommer, åbner hun alle skabene. Den anden elev lukker alle skabe med lige nummer. Den tredje elev åbner de lukkede og lukker de åbne, hvis nummeret er deleligt med 3. Således bliver eleverne ved med at ændre tilstanden på nogle af skabene.

Dette fortsætter, indtil alle 100 elever er gået gennem omklædningsrummet. Hvilke skabe er nu åbne?

Nuller, ettaller og totaler

Lad n være et naturligt tal. Vis, at (a) N har et multiplum ($\neq 0$) hvis repræsentation i titalstystemet skrives udelukkende med brug af 0 og 1, og at (b) 2^n har et multiplum ($\neq 0$) hvis repræsentation i titalstystemet skrives udelukkende med brug af 1 og 2.

Summer og differenser

Givet 25 forskellige positive tal. Vis, at man kan vælge to af dem sådan, at ingen af de andre er lig med hverken sum eller differens af de to valgte.



kilde: //jeff560.tripod.com/

Sofja Kovalevskaja (1850-1891):
Verdens første kvindelige, professionelle matematiker