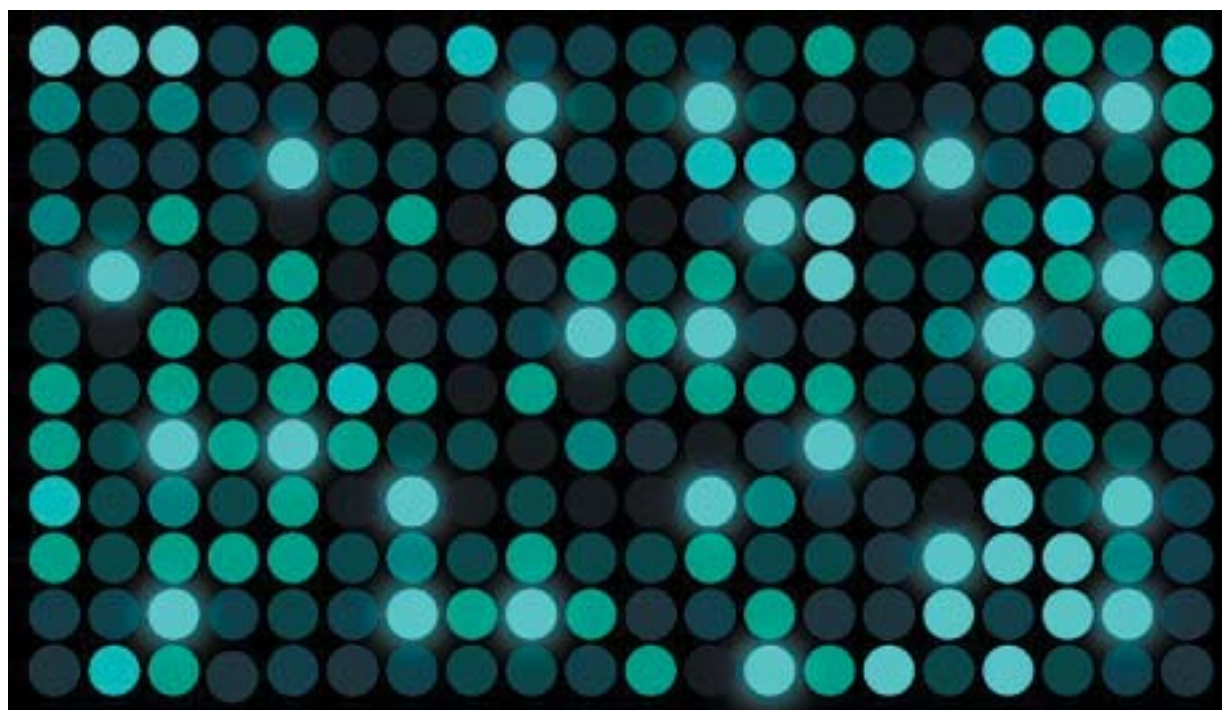


mat

M A T I L D E

TEMA: Statistik



**Microarray. Simultan måling af tusindvis af gener
- en udfordring for statistikerens.**

(Fra: U.S. Department of Energy Genomes to Life Program)



Fra den nye redaktør:

Martin Raussen har trukket sig tilbage som redaktør af Matilde, men kun for at indtage pladsen som redaktør af det Europæiske EMS Newsletter. Martin har gjort et stort arbejde for Matilde, og vi siger mange tak; ligeledes tak til Tage Bai Andersen, der er holdt op som redaktør af rubrikken Baggrund/Debat - men da forhåbentlig ikke med selv at blande sig i debatterne.

Matilde er vokset og modnet til et flot format, der med interesse følges, ikke bare af bladets kernelæsere: de utrættelige udøvere af matematik i Danmark, men også af interesserede og nysgerrige, mere "almindelige mennesker". Der er sågar en del læsere i det store (nordiske) udland. I nærværende nummer er temaet "Statistik", med Inge Henningsen (KU) og Malene Højbjerg (AAU) som redaktører; som et af de matematiske fag med både dybe teoretiske rødder og mange praktiske (og politiske!) anvendelser, er statistik et centralt emne.

I næste ordinære nummer af Matilde vil temaet være "Gymnasiet" med flere aktuelle aspekter, ikke mindst gymnasierreformerne; hvad vil de betyde for uddannelsen af matematikere og for faget? Kjeld Bagger Laursen (KU) vil være temaredeaktør - se eller gense hans artikel i Matilde nr. 15 side 37. Nummeret efter vil Matilde handle om sommerens store kongresser: "ICME & ECM", der således dækker dels undervisningsmæssige og dels forskningsmæssige aspekter af matematikken. Der er efterfølgende emner nok at vælge mellem: Læreruddannelsen, Syn på matematikken, Matematik og teknologi, Matema-

tik og kemi osv. I den forbindelse er ideer og forslag velkomne; redaktionen er meget lydhør overfor, hvad der måtte røre sig blandt læserne. Formålet med Matilde er fortsat at belyse matematikken, både indefra og rent fagligt, men jo også udefra, som den indgår i den kulturelle og politiske virkelighed.

Dansk Matematisk Forening og Matilde håber meget, at det også fremover vil være økonomisk muligt at udsende Matilde - desværre bortfalder portostøtten; men vi forsøger at få en særlig bevilling fra biblioteksstyrelsen. Der er dog heldigvis også lyspunkter på den finansielle front: Et sådant fremgik af annoncen i Matilde nr. 18 side 36, hvor det berømte Rejselegat for Matematikere (jvfr. Simon Kokkendorffs rejsebeskrivelser) nu er udvidet med et 3-årigt legat. Andersen-fonden fortjener stor ros for dette (ligesom de repræsentanter for Dansk Matematisk Forening der drøftede mulighederne for udvidelse af legatet med fonden), og det nye legat er denne gang tildelt Michael Hansen (Cand. Scient. SDU) med henblik på erhvervelse af en Ph. D. grad i matematik.

Matematikken står overfor store udfordringer i den nærmeste fremtid, både internationalt og i Danmark. Som i de sidste mange tusind år gælder det også nu om at udvikle og videregive dette smukke og nyttige og skarpslebne sprog. Hvis Matilde i al beskedenhed kan være med til at stimulere interessen og nysgerrigheden, er vi glade.

**Matilde – Nyhedsbrev for
Dansk Matematisk Forening
medlem af European
Mathematical Society**

**Nummer 19
– Februar 2004**

Redaktion:

**Bent Ørsted, SDU
(ansvarshavende)**

**Inge Henningsen KU
Malene Højbjerg, AAU
(TEMAREDAKTØRER)**

**Carsten Lunde Petersen, RUC
Jørn Børling Olsson, KU
Poul Hjorth, DTU
Mikael Rørdam, SDU
Carl Winsløw, KU**

Adresse:

**Matilde
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Universitetsparken 5
2100 København Ø**

**Fax: 3532 0704
e-post: matilde@mathematics.dk
URL:
www.matilde.mathematics.dk**

ISSN: 1399-5901

**Matilde udkommer 4 gange om
året**

**Indlæg til næste nummer skal
være redaktionen i hænde se-
nest 28. maj 2004**

Indhold:

TEMA: Statistik

<i>Inge Henningsen</i> Videnskab, debat og manglende videnskabelig debat	4
<i>Niels Richard Hansen</i> KU: Bioinformatik - en statistisk disciplin	7
<i>Søren Lundbye-Christensen</i> Formidling af forskning til gymnasiet	9
<i>Søren Johansen</i> Kointegration og fælles stokastiske trende	11
<i>Niels Keiding</i> "I tilfælde af uoverensstemmelse mellem kort og terræn... ..	14
<i>Merete Jørgensen</i> Matematisk Statistiks rolle i udviklingen af nye lægemidler!	16
<i>Claus Jensen</i> Perspektivkasser og matematik	20
<i>Simon Lyngby Kokkendorff</i> Verden Rundt med Rejselegatet	26
<i>Matematiske institutioner præsenterer sig:</i> Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet	31
<i>Carl Winsløw</i> Abelseminar 03 på Schæffergården	33
Uddannelsesfronten	34
MatematikerNyt	36
Begivenheder	37
Aftermath	38



Af: Inge Henningsen
Afdeling for anvendt matematik og statistik,
Københavns Universitet
email: inge@math.ku.dk

Videnskab, debat og manglende videnskabelig debat

For et år siden ville et hold studerende vide, hvad jeg mente om Bjørn Lomborg. Anledningen var at Udvalget for Videnskabelig Uredeligheds (UVVU) havde fundet hans publikationer objektivt uredelige. Lomborg præsenterer jo sig selv som statistiker, og tal spiller en fremtrædende rolle i hans argumentation, så det var rimeligt nok at bede en statistiklærer om hendes vurdering. Og selv om jeg egentlig helst var fri, endte det med to kritiske indlæg til de studerendes blad FAMØS. De danner udgangspunkt for denne artikel.

Bjørn Lomborgs bog "Verdens Sande Tilstand" har lige siden sin fremkomst skabt debat. Debatten blussede op i kølvandet på UVVUs kendelse om videnskabelig uredelighed. I august 2003 kom der så fra et nordisk evalueringspanel en skarp kritik af rapporterne fra det Miljøvurderingsinstitut som Lomborg er direktør for. Sidst har embedsmænd i Forskningsministeriet underkendt UVVUs kendelse, uden at det dog har ændret nævneværdig på fronterne omkring lødigheden af Lomborgs arbejder.

Skal man behandle Bjørn Lomborgs talbrug dækkende kræver det mere end en enkelt artikel i Matilde. I FAMØS er vist eksempler på, hvordan Bjørn Lomborg baserer vidtløftige beregninger på tal, hvis repræsentativitet og udsagnskraft i høj grad kan drages i tvivl. Mange af de samme kritikpunkter blev fremført af det nordiske evalueringspanel (Hjort-Andersen et al 2003). De skriver f.eks. om en af Miljøinstituttets publikationer

"Der findes alt for mange udokumenterede påstande i rapporten, og når der findes henvisninger til videnskabelige referencer, er disse udvalgte, så at de ikke giver et balanceret billede af den videnskabelige litteratur."

og

"Hvis der skal laves en cost-benefit analyse af et konkret område, er det afgørende, at alle væsentlige effekter kan medtages".

Lomborgs bog og miljøvurderingsinstituttets rapporter er imidlertid ikke alene tendentiøs statistik. De sætter også fokus på det større problemfelt der handler om de aktuelle vilkår for vidensproduktion, om manglende debat og manglende kvalitetssikringsmekanismer i forskningen.

Nye former for vidensproduktion

Adskillige videnskabsteoretikere har peget på, at det videnskabelige samfund i dag er under forandring. For vidensproduktionen betegnes ændringen ofte som et skift fra modus 1 til modus 2 (Se f.eks. Gibbons et al 1994, Nowotny et al 2001). Modus 1 dækker i vid udstrækning den universitære vidensproduktion vi har kendt indtil nu. I modsætning hertil beskrives Modus 2 som en type vidensproduktion der er forankret i en anvendelsesorienteret kontekst. Her ophæves distinktionen mellem

grundforskning og anvendt forskning. I stedet tænkes i en transdisciplinær produktionspraksis, hvor forskeren bruger hvad hun/han kan fra eksisterende discipliner og hvor der er mange forskellige agenter involveret i produktionen (universiteter, industrier, regeringer, fagforeninger). Modus 2 vidensproduktion kræver i konsekvens heraf langt mere pluralistiske kriterier i sin kvalitetskontrol, men samtidig må kontrollen omfatte langt flere sektorer end den gør i dag. Ser man Lomborgsagen i denne bredere sammenhæng er den ikke primært et spørgsmål om videnskabelig ytringsfrihed eller om det betimelige i at videnskaben kontrollerer sig selv. Sagen sætter fokus på at der i dagens videnskabelige verden ikke er udviklet kvalitetssikringsmekanismer svarende til de vilkår for vidensproduktion, som er ved at materialisere sig.

Peer-review eller ej?

Den traditionelle vidensproduktion indeholder naturligvis mere end universitetsforskning. Selv i Danmark er den økonomiske indsats i industriforskningen langt større end i den offentligt finansierede forskning, men det er især den ekspanderende sektorforskning der har skabt nye vilkår for vidensproduktion. Samtidig spiller mediernes betydelige rolle, som et sted hvor forskningsresultater indtages i samfundets beslutningsprocesser. Begrænser man sig til den offentlige forskning, kan man således se på den samfundsmæssige "viden-

Temaredaktion: Inge Henningsen & Malene Højbjerg



skabelse" som opdelt i tre sektorer "peer-review-sektoren", der fortrinsvis omfatter universitetsforskning, "rapport-sektoren" der i høj grad defineres af sektorforskningens projektforskning og rekvirerede forskning, og endelig noget man kunne betegne som "medie-sektoren".

I peer-review sektoren underkastes de videnskabelige artikler kollegial kritik inden de offentliggøres. Reviewprocessen indebærer at nogen påtager sig arbejdet med at efterse argumentationen i en bog eller artikel. Er argumenterne holdbare? Er referencer relevante i den angivne sammenhæng; er de loyalt gengivet; etc. Det kan ses som en servicefunktion overfor læseren, der i almindelighed ikke har tid og kræfter til at gøre det. Peer-review er tænkt som en kvalitetssikringsmekanisme, og for fortsat at være et gyldigt medlem af det videnskabelige samfund må forskere på en forpligtende måde forholde sig til kritik af deres arbejder. Samtidig gælder det f.eks. for universitetsansatte, at det anses for en naturlig del af ens arbejde at forholde sig (kritisk) til det andre offentliggør. Diskussion af andres resultater er meriterende inden for det sædvanlige system. Ideen om at videnskaben

i det lange løb er "selvkorrigerende" hører hjemme i Peer-review-sektoren, selv om peer-reviews hverken er ufejlbarlige eller fri for politisering.

Anderledes i "rapportsektoren". Her drejer det sig primært om rekvirerede undersøgelser. Det kan både være forskning til brug for lovforberedelse og anden myndighedsudøvelse, men også om større projekter som f.eks. på uddannelsesområdet med de store internationale læse- og regneundersøgelser. Som oftest offentliggøres resultaterne i rapporter udgivet af projekterne selv, og der er ikke tradition for indbygget kvalitetssikring i form af uafhængige vurderinger af resultater og metoder. Der er heller ikke et forum, hvor en eventuel kritik af metoder og resultater kan fremføres på en måde, der forpligter forskerne til at forholde sig til den. Dette hænger sammen med at projekterne sjældent har afsat ressourcer til uafhængige vurderinger, og at de ansatte i sektorforskningen ikke på samme måde som på universiteterne har tid til og forpligtelse overfor et bredere forskningsområde. Universitetsforskere i peer-review-sektoren oplever heller ikke noget ansvar overfor hvad der foregår i rapportsektoren, og en eventuel kritisk

indsats vil sjældent være meriterende. Resultatet er et svagt system for kvalitetssikring¹.

Endelig er der "medie-sektoren", hvor resultaterne/konklusionerne formidles direkte til medierne (evt. før undersøgelserne offentliggøres - hvis de nogensinde offentliggøres)². Her er offentliggørelseskriteriet enten den gode historie ("kioskbaskeren") eller den mere direkte politiske virkning af en undersøgelse eller en analyse. Her kan medierne være interesseret i diskussion, men den skal foregå på "deres" niveau, og det inkluderer sjældent det tekniske-faglige niveau, som kræves hvis man f.eks. vil diskutere visse dele af Bjørn Lomborgs artikler.

Videnskaben korrigerer ikke altid sig selv

Diskussionen om UVVUs afgørelse i Lomborg-sagen demonstrerede, hvordan meningsdannelsen omkring en række store og komplicerede samfundspolitiske problemer foregår helt uden om den etablerede videnskabelige verden. Bjørn Lomborg har offentliggjort sine analyser og resultater i dagblade og som bøger og publicerer netop ikke i videnskabelige

tidsskrifter. Som Kjaer og Dahlgaard skriver i artiklen *Lomborg – igen igen* i *Aktuel Naturvidenskab* 1/2002.

"... der er en afgrundsdyb forskel på, hvordan den videnskabelige verden og medierne fungerer. ... Lomborgs ekspertstatus og legitimitet får han ikke af det videnskabelige samfund, men primært af medierne (med Politikens chefredaktør Tøger Seidenfaden som en af de varmeste fortalere her i landet). Lomborg har kortsluttet den videnskabelige kvalitetssikringsproces og gået direkte til medierne, som stort set alle har taget ham til sig som deres egen"

I dette scenarie kunne klagen til UV-VU ses som et forsøg på at bryde gennem skellet mellem Peer-review-sektoren og de to andre sektorer, idet kvaliteten af Bjørn Lomborgs produktion gennem klagen på forpligtende måde blev sat på forskersamfundets dagsorden³. Måske kan man medgive kritikerne, at UVVU ikke var det oplagte sted. Men pointen er, at *der i dagens Danmark ikke var og er andre, mere velegnede steder.*

Nye former for kvalitetssikring

Forholdet mellem forskning og offentlighed er efterhånden kommet i fokus mange steder. I kølvandet på Lomborgsagen er der i Danmark nedsat et udvalg, der skal komme med forslag til nye regler om uredelighed i forskningen, og Kjaer og Dahlgaard (2002) efterlyser et forum for "den nødvendige tværgående naturvidenskabelige diskussion." I England har Royal Society i august 2003 taget spørgsmålet om offentliggørelse af forskningsresultater op, idet man har nedsat en arbejdsgruppe

"... to carry out a study on best practice in communicating the results of new scientific research to the public. The study has been launched in response to general concern expressed among scientist and wider society about when and how research results are made public, and specific

controversies surrounding issues such as the extent to which results should be checked by other researchers before they are communicated."

Dette er alle forslag der sigter på at skabe en tiltrængt bredere videnskabelig debat. Men det er ikke tilstrækkeligt bare at justere gældende praksis. Nye former for vidensproduktion kræver nye regler for god videnskabelig praksis og et kvalitetssikringsystem der omfatter alle former for forskning, men som samtidig kan rumme vidensproduktionens mangfoldighed. Det stiller krav til forskningsverdenens bevillings- og meriteringssystemer om at skabe luft til forskning der går på tværs af fag- og sektorgrænser. Det stiller også krav til den enkelte forskers ansvarsfølelse i forhold til dårlig forskning og misbrug af forskningsresultater, selv om det ikke er direkte meriterende at gøre det. Her er den nye universitetslov et skridt i den gale retning med dens indskrænkning af de ansattes forskningsfrihed og dermed deres ansvar overfor den faglige udvikling.

Hvad med vores egen andedam?

Matematiske modeller indgår mange steder i forskningen, så faglige miljøer med en bred interesse for konkrete og tværvideenskabelige anvendelser af matematik kunne blive en vigtig brik i en sådan "ny forskningsorden". Samtidig ville det i sig selv have en opdragende effekt, hvis tal- og matematikbrugere vidste, at de risikerede at møde en kritisk og flersidet ekspertise i det offentlige rum – eksempelvis i Matilde.

Referencer

Gibbons M. et al.

(1994) *The New Production of Knowledge: The Dynamics of Science and Research in Contemporary Societies*. Sage. London.

Henningsen I (2003) *Løgn, forbandet løgn og statistik*, FAMØS, Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik, 3/16, 12-17 eller <http://www.math.ku.dk/~inge/>

Henningsen I (2003) *Videnskab, debat og mangel på videnskabelig debat*, FAMØS, Fagblad for Aktuar, Matematik, Økonomi og Statistik, 4/16, 18-21 eller <http://www.math.ku.dk/~inge/>

Hjort-Andersen et al (2003) *Evaluering af Institut for Miljøvurderings rapporter*. Forskningsforum.

Kjaer C. R. & Dahlgaard J. (2002) *Lomborg igen, igen*. *Aktuel Naturvidenskab* 1/2002.

Lomborg, B. (1998)

Verdens sande tilstand Centrum. København

Nowotny H. et al. (2001) *Re-Thinking Science. Knowledge and the Public in the Age of Uncertainty*. Polity. Oxford.

Royal Society working group on best practice in communicating the results of new scientific research to the public (2003) <http://www.royalsoc.ac.uk>

Noter

- ¹ Som eksempler kan man tage de undervisningsministerielle rapporter om studentereksamen karakterer, fravær og gymnasialt sprogvælg, som metodemæssigt er under al kritik.
- ² Bjørn Lomborg er i denne sammenhæng ikke enestående. Herrnstein og Mur ray's berygtede Bell Curve om race og intelligens, Kreationismen og (mere kuriøst) "Den kolde fusion" er alle eksempler på forskningsdiskussioner, der fortrinsvis er ført i medierne.
- ³ Det er vanskeligt at vurdere om det blot var en klodset konstruktion at gøre miljøvurderingsdirektørstillingen til en stilling, der krævede videnskabelige kvalifikationer, eller om den åbenlyst usaglige udnævnelsesprocedure var en kalkuleret politisk magtdemonstration.



Af: Niels Richard Hansen

Fra beregningsbiologi til bioinformatisk statistik

Op gennem halvfjerdsene og firserne gav udviklingen indenfor biologien anledning til nye, spændende og tværfaglige problemer. Særligt indenfor forskningen i det molekylære grundlag for livet opstod der et behov for at organisere, håndtere og anvende mere og mere omfattede molekylærbiologiske data og ikke mindst at lave beregninger med disse data.

En af de oprindelige problemstillinger drejer sig om at sammenligne proteiner, der, som det funktionelle produkt af vores gener, udgør en yderst vigtig klasse af makromolekyler. Proteiner er store molekyler bygget op som lineære sekvenser af aminosyrer, og en metode til sammenligning går ud på at opfatte proteinmolekylerne som simple tekststrengte fra et 20 bogstavs alfabet (de 20 forskellige aminosyrer). Dernæst placeres de to tekststrengte over hinanden, og man prøver, med tilladelse til at indsætte mellemrum, at "skubbe" bogstaverne i de to sekvenser frem og tilbage, indtil aminosyrerne er parrede, så de "passer" godt sammen. Denne metode kaldes ofte på engelsk for alignment – et ord, der vist ikke har en god dansk oversættelse.

```
ACAD-ACDADCCA
ADADCACAADDCA
```

Figur 1: Et eksempel på en alignment af to proteiner. Der er indsat et mellemrum i den øverste sekvens af aminosyrer, og der er tre ikke-matchende aminosyrer. I eksemplet benyttes kun de tre aminosyrer A (Alanin), C (Cystein) og D (Asparaginsyre).

En sådan sammenligning af proteiner giver bl.a. et værktøj til at studere evolution på det mest fundamentale niveau – det molekylære. Man forestiller sig, at to evolutionært relaterede proteiner også ligner hinanden aminosyre for aminosyre, og at en sammenligning derfor kan vise, om to proteiner faktisk er relaterede.

En del af anstrengelserne gik i starten ud på at løse rent beregningsmæssige problemer og var således meget algoritme-orienteret. Området gik under navnet *computational biology* – eller direkte oversat *beregningsbiologi*. Siden hen har betegnelsen *bioinformatik* slået an som en slags paraplybetegnelse for arbejdet med og bearbejdning af især molekylærbiologiske data ved hjælp af en computer. Bioinformatik er som område blevet et sammenrend uden lige – absolut forstået på den gode måde – af forskere med vidt forskellige baggrunde såsom biologi, datalogi og statistik samt fysik og kemi, og forskningen spænder bredt fra de egentlig biologiske spørgsmål, der kræver bioinformatiske værktøjer, over en masse databearbejde til deciderede teoretiske metodespørgsmål. Det er primært i den sidste kategori, at den statistiske forskning bidrager til udviklingen af bioinformatikken.

Evolutionmodeller for proteiner

For det klassiske problem, sammenligning af proteiner, starter den statistiske modellering med evolutionshypotesen på molekylært niveau. Den går ud på, at aminosyrer enkeltvis eller i grupper muterer, således at nye funktioner kan opstå. Langt de fleste mutationer er katastrofale, men enkelte vil overleve og blive leveret videre til kommende generationer. Proteiner, der har en ikke for fjern fælles fortid, vil ligne hinanden, selv om de er forskellige. Men hvordan vurderer man, om en konkret (god?) alignment er udtryk for andet end tilfældige ligheder mellem proteinerne? Det statistiske modelkoncept giver her en fornuftig angrebsvinkel. Det man skal gøre er at opstille en model dels for mutationsprocessen og dels for ikke-relaterede proteiner. For to givne proteiner bør enhver beslutning om, hvorvidt de er relaterede, baseres på en sammenligning af sandsynligheden for at observere proteinerne som følge af en mutationsproces fra et fælles forfaderprotein, med sandsynligheden for at proteinerne er ikke-relaterede.

Man kan godt opfatte dette som et statistisk test af relaterethed mod ikke-relaterethed, men det er bedre at tænke på problemstillingen som et klassifikationsproblem. Den statistiske modellering giver dernæst en mulighed for at diskutere, hvad fejlfrekvensen er i det lange løb, dvs. når vi klassificerer mange par af proteiner som relaterede/ikke-relaterede, hvor mange fejl begår vi så i gennemsnit. Men bemærk, at de modeller vi har valgt, meget vel kan være forsimplede og evt. forfejlede i forhold til den virkelige evolutionsproces. Den statistiske teori viser, at proceduren beskrevet ovenfor essentielt er den korrekte (optimal i en rimelig forstand), vel at mærke *hvis modellerne er korrekte*. Skal vi forbedre vores klassifikationsprocedure, skal vi altså finde nogle bedre modeller. Det er i den henseende tankevækkende, at de modeller, som kan behandles og benyttes i praksis, kun kan håndtere de mest rudimentære evolutionære hændelser, såsom substitution af enkelte aminosyrer. Det burde dog blot give blod på tanden – der er masser at komme efter i denne branche!

Men hvordan modellerer man så mutationsprocesser? Den klassiske model er givet ved, at hver enkelt aminosyre muterer i henhold til en tidshomogen markovproces, og at aminosyrerne muterer uafhængigt af hinanden. Den store fordel ved denne model er, at man kan beskrive mutationsprocessen med relativt få parametre, nemlig 380 mutationsintensiteter. Grundet tidshomogeniteten giver dette en model for relaterede proteiner – uafhængigt af hvor langt tilbage i fortiden vi skal for at finde en fælles forfader. Modellen giver endvidere anledning til PAM n -scoring for $n \geq 1$, jf. tabel 1, som ofte bruges til scoring af parrede aminosyrer, når man aligner proteiner. Her er n den evolutionære afstand mellem proteinerne målt i såkaldte PAM-enheder. Et nyere alternativ er BLOSUM n -scoring for $1 \leq n \leq 100$, som ligeledes er baseret på en model for mutation, hvor de enkelte aminosyrer muterer uafhængigt af hinanden, men hvor der ikke er nogen

antagelse om en underliggende tids-homogen markovproces. Her betegner n frekvensen af det totale antal konserverede, altså ikke-muterede, aminosyrer i proteinet. F.eks. for $n = 45$ matcher 45% af aminosyrerne fra de to proteiner. Det er den gængse opfattelse, at BLOSUM-scoring fungerer lidt bedre end PAM-scoring.

	PAM250			BLOSUM45		
	A	C	D	A	C	D
A	2			5		
C	-2	12		-1	12	
D	0	-5	4	-2	-3	7

Tabel 1: Udsnit af to hyppigt anvendte metoder til scoring af parrede aminosyrer i en alignment af to proteiner. PAM250 og BLOSUM45 er fortolkningsmæssigt sammenlignelige, men baseret på to forskellige modeller.

Bruger man PAM250-scoring på den alignment vi ser i figur 1 (læg bidragene for alle de parrede aminosyrer sammen) finder vi en samlet score på 32. Den tilsvarende BLOSUM45-score for den given alignment er 55.

Datamining og Molekylære strukturer

En af de begivenheder, som for alvor satte fut i bioinformatikken, var beslutningen om, at kortlægge det menneskelige genom. Det er i dag lykket, og kortlægningen af genomet for en række andre organismer er også afsluttet eller i fuld gang. Det har betydet fri adgang til enorme mængder rå genom-data, som bioinformatikere i hele verden gennemtrawler dag efter dag for at finde ny og dybere forståelse for de grundlæggende livsprocesser. Man vil f.eks. gerne forstå, hvordan hele symfoniorkestret af gener spiller sammen. Biokemien giver os god indsigt i, hvordan de enkelte instrumenter – vel og mærke dem vi har opdaget – spiller alene, men vi forstår stadig meget dårligt, hvordan det hele spiller sammen. Derfor prøver man med en bred vifte af *datamining* værktøjer at undersøge genomer på kryds og tværs for at finde *alle* instrumenterne, så man bedre kan få et komplet billede af orkestret. Fælles for en meget stor del af sådanne datamining værktøjer er, at de er baseret på statistiske modeller.

Min egen forskning har bl.a. beskæftiget sig med modeller og datamining teknikker, som tager udgangspunkt i 3-dimensionale molekylære strukturer. Dvs. teknikker til at søge i genomer efter sekvenser, som i 3 dimensioner vil folde sig sammen til specifikke strukturer. Det er som hovedregel strukturen snarere end den lineære tekststreng, som bestemmer molekylernes funktion, og derfor er det yderst relevant at modellere netop strukturen. Det er imidlertid noget vanskeligere end at modellere tekststrengene, og man løber hurtigt ind i problemer såsom voldsomt mange ukendte parametre og exceptionelt langsommelige algoritmer. Mit arbejde har centeret sig om at modellere en relativt simpel type struktur kaldet en stem-loop, og om det teoretiske grundlag for at beregne fejlfrekvenser, når man søger efter stem-loops i genomer. Der er en vældig spændende og udfordrende teori at udforske i forbindelse med disse beregninger, og i matematisk sofistikerede lader teorien ikke noget tilbage at ønske.

Microarrays

Man må dog erkende, at uanset den store triumf kortlægningen af det menneskelige genom er, så giver kortet (i sin nuværende form) kun et begrænset og passivt billede af genomet. Det, man har kortlagt, er den rå og til dels ufordøjede information, man finder placeret i kromosomerne, og som vi arver fra vores forældre. Det er således arkitekttegningen, vi har fat i, men en samlet forståelse af, hvordan det hele udvikler sig dynamisk i hver enkelt celle, er vi stadig lysår fra. Datamining teknikker eller ej, så skal der noget mere til, hvis vi rigtigt skal forstå biologien. Her kommer en anden og ret ny eksperimentel teknik ind i billedet. En teknik, som især har fået statistikere op af stolen og til at kaste sig over bioinformatikken. Ved hjælp af såkaldte *microarrays* får vi et slags dualt, dynamisk billede af genomet. Microarrays er små plader inddelt i endnu mindre celler, hvor man i hver celle har mulighed for at aflæse hvor stor en mængde protein fra et givet gen, der faktisk er udtrykt, altså produceret, i cellen til et givet tidspunkt. Man kan f.eks. benytte denne teknik, til at se hvad der sker på gen-niveau, når to ellers identiske celler udsættes for forskel-

lige behandlinger. Herved kan man lære, hvordan de mange gener co-reguleres under forskellige omstændigheder. Men der er mange, mange andre anvendelsesmuligheder af microarrays, og kun fantasien synes at sætte grænser.

Når det nu er sagt, så er der også en del problemer. Microarrays er teknisk set ikke så lige til, og der er et antal lag, hvor der kan opstå fejl og støj af forskellig slags, udover de rent biologiske fluktuationer man må forvente. F.eks. måles mængden af protein ikke direkte, men via mellemproduktet messenger-RNA. Principielt adskiller modelleringen af disse fejl sig ikke så meget fra mange andre klassiske statistiske modeller, hvor man observerer en flerdimensional, kvantitativ størrelse, og hvor man ønsker at modellere sådan noget som niveau, variation og co-variation. Men det er dog en væsentlig udfordring, at hver observation fra et microarray giver en datavektor, som ofte er 10.000-dimensional eller mere, og at man sjældent har særligt mange arrays at gøre godt med (det er en dyr teknik, og der er ikke altid konsensus om, hvordan pengene skal bruges). Endvidere er det nødvendigt, at man sætter sig ind i en del af den molekylære biologi/kemi og andre tekniske detaljer om, hvordan microarrays faktisk fungerer – og hvad det er for nogle biologisk videnskabelige spørgsmål, der er interessante – for at man kan konstruere rimelige modeller.

Og alt det andet...

Der er selvfølgelig mange andre bioinformatiske emner af statistisk karakter, som jeg af gode grunde ikke kan komme ind på. Ingen nævnt, ingen glemt.

Som statistiker ser jeg bioinformatikken som et rigtigt godt område at kaste sig over. Der er for det første fokus på området, som er i vældig vækst. Der er mange spændende teoretiske metode- og modelspørgsmål, som venter på at blive taget op. Og så er der adgang til omfattende databaser med bunker af data, der kun venter på at blive analyseret. For slet ikke at tale om den sidegevinst, at man får en indsigt i den meget spændende, biologiske forskning, der foregår i øjeblikket.

Formidling af forskning til gymnasiet



Af: Søren Lundbye-Christensen
Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
email: s0ren@math.aau.dk

Man snakker meget om afmatningen i interessen for naturvidenskab og matematik i særdeleshed. Om det er så slemt, som det ind i mellem fremstilles, eller om udviklingen lige så stille er vendt vil jeg ikke gøre mig klog på. Under alle omstændigheder vil det ikke skade at prøve at overveje, hvordan vi kan styrke interessen for matematik og måske ligefrem gøre faget mere "spiseligt". Jeg har selv et par ideer, som jeg vil fortælle om senere i dette indlæg.

Matematik er ikke bare matematik. Faget matematik er et **tveægget sværd**. Den ene æg er skarpslebent til at løse Gordiske knuder. Det er den side, der **redder verden** gang på gang. Det er den anvendelsesorienterede eller ingeniørmæssige side af matematikken. Det er den side vi plejer at vise frem, når vi skal legitimere os selv overfor politikere og overfor vores borddame. Tit er det også anvendelserne, vi hiver frem, når man reklamerer for faget i forbindelse med at få studerende til universiteterne. Den anden æg, er den der bedst skærer i hjertet. Det er den ubeskriveligt fascinerende skønhed, som faget rummer. Det der appellerer til **kunsten** og det **kreative** i os. Den side er det måske lidt sværere at forklare på det konverserende plan.

Selvom vi bruger den første side til at sælge vores fag er der nok ganske få af denne artikels læsere, der har valgt matematik for dens praktiske egenskaber. Vi blev solgt på grund af **skønheden**. Inderst inde er vi alle glade **nørder**. Og hurra for det, for det er jo det, der har været drivkraften.

Der er et væld af meget forskelligartede **kompetencer** forbundet med at lære og at arbejde med matematik. Jeg vil ikke trætte læseren ved at drive rovdrift på et af tidens store buzz-words, men det er nu mere end en tanke værd, om der er helt overensstemmelse mellem de matemati-

ske kompetencer, der efterspørges i "den rigtige verden" og de kompetencer vi (velmenende naturligvis) prioriterer i vores undervisning.

Gymnasiet ser meget anderledes ud nu, end det gjorde da jeg var en usikker hormonbombe. Nye arbejdsformer og undervisningsformer fra folkeskolens mange forsøg, er nu så indgroede at projektarbejde ikke mere nødvendigvis betyder et slag whist i kantinen. Elever i gymnasiet får nu i højere grad muligheden for at se visse dele af faget præsenteret -ikke i en **petriskål**- men i **levende live**. Det giver os, der arbejder med matematikken som forskningsfag eller som

redskabsfag et stort **ansvar**. Vi har chancen for at påvirke den måde, faget præsenteres på. Vi skal finde **små hjørner** af vores forskning og af vores konsulentopgaver, som i en **light-udgave** kan bære at blive brugt i **gymnasiet** (og folkeskolen).

Vi er allerede startet i **Aalborg**. Før sommerferien afsluttede vi et projekt på **Frederikshavn Gymnasium**, hvor to lærere i en lang periode benyttede problemstillinger og data fra et af vores samarbejdsprojekter med **Novo Nordisk A/S** til at gennemgå basal sandsynlighedsregning, deskriptiv og inferentiell statistik. Inspireret af de gode resultater kører flere klas-



Selv svært tilgængelige pointer kan blive spiselige ved en illustrerende overhead. Her er det statistikererhvervets fordomme og detaljer fra det menneskelige forplantningssystem, der uddybes.



ser på næste årgang lige nu projektet nok en gang.

På **Dronninglund Gymnasium** har fire 2. G-klasser arbejdet et par blokdage med at analysere kvindelige graviditetshormoner for at lave referenceområder og foreslå eventuelle metoder til at bruge hormoner til overvågning af om graviditeten forløber "passende". Data stammede helt tilbage fra mit eget PhD-forløb, men problemstillingen er stadig aktuell og spændende. Den første blok-dag var en fredag, men det forhindrede ikke klasserne i at sidde ved deres bærbare og ved de af skolens computere, der var ledige til sent om eftermiddagen og bixke med Excel og diskutere histogrammer!

Arbejdsdelingen i sådan et projekt er ganske klar. Det er mig, der kender projektet, problemstillingen, data og eventuelle kilder. Det er gymnasielærerne, der kender deres elever, og ved hvordan projektarbejdet skal organiseres og coaches. Efter at have diskuteret projektet igennem, lærerne og jeg, plejer det at fungere sådan at jeg holder et oplæg for klasserne. Dette oplæg er gerne en del mere kulørt end man ville gøre det ved en universitetsforelæsning, dels for at "kridte banen op" og dels fordi jeg gerne vise min egen begejstring for projektet. Herefter tager man over på gymnasiet, og står så for projektet.

Det er sjovt at se, hvordan ens egne projekter pludselig får et nyt og anderledes liv i hænderne på en gymnasielære. Lærerne på gymnasiet er gode til at tage bolden op og få projektet til at fungere, men man kan på ingen måde forlange at man som gymnasielære skal kende de projekter, der arbejdes med på universiteterne eller i "det private", hvis ikke vi fortæller om dem.

Det er en **stor opgave**, som vi universitetsansatte i det lange løb ikke kan bære kun for vores **blå øjnes** skyld. Men det er på den anden side en meget vigtig opgave for at imødegå afmatningen i interessen for naturvidenskab.

Så min **hovedpointe** er, at vi må stoppe klynkeriet over at de unge ikke forstår, hvorfor differentiaalligninger og statistik er spændende.

Bolden er på vores banehalvdel!

Det er jo os, der ved hvorfor det er interessant og spændende. Derfor er det også os, der har muligheden for

og forpligtelsen til at fortælle det. Vi kan vise at matematik er et **kreativt** fag, som er sjovt men svært. Vi skal i højere grad lade os bruge og eksperimentere med projektarbejde. Både brede tværfaglige projekter og snævre 'matematik-for-matematikken-skyld' projekter. Vi kan håbe på at skabertrangen og legebarnet kan blive motivationen for vores unge.



Et foredrag om differentiaalligninger til beskrivelse af dynamikken i forbindelse med insulin og glykose sluttet af med en Manga-tegneserie udgave af Bergmans minimale model:

Kointegration og fælles stokastiske trende



af: Søren Johansen
Afdeling for anvendt matematik og statistik,
Københavns Universitet
e-mail: sjo@math.ku.dk

1. Indledning

De basale ideer om begreberne fælles trende og kointegration af stokastiske processer blev formuleret af Clive Granger (1981). Disse begreber viste sig at være af fundamental betydning for forståelsen af makroøkonomiske modeller og deres relation til virkeligheden. Jeg var så heldig at blive introduceret til disse ideer af Katarina Juselius lige da de var fremkommet, og kunne udnytte min baggrund som statistiker til at gennemføre en udvikling af ny statistiske metoder i samarbejde med Katarina og sideløbende med udviklingen af de empiriske resultater baseret på kointegrationsideen. En af grundene til metodernes gennemslagskraft er netop at udviklingen af metoderne er drevet af anvendelserne, og anvendelserne blev mulige efterhånden som metoderne blev udviklet. Teorien for metoderne er fremstillet i Johansen (1996) og metoderne er nu blevet standard pensum i økonometri mange steder i verden.

Det hører med til billedet at Clive Granger fik tildelt Nobelprisen i økonomi for 2003 med begrundelsen

”for methods of analysing economic time series with common trends (cointegration)”.

Formålet med denne lille artikel er at give en kort fremstilling af begrebet kointegration og den statistiske model, man benytter til analysen.

2. Kointegration af tidsrækker

Betrager man tidsforløbet af en makroøkonomisk variabel, for eksempel logaritmen af et prisindex, en såkaldt tidsrække, vil den ofte være ikke-stationær. Dette skyldes dels en deterministisk trend, men lige så ofte en stokastisk trend, se Figur 1.

I mange år havde man analyseret sådanne tidsrækker ved simple regressionsmetoder, uden at tage hensyn til ikke-stationariteten af tidsrækken. Man havde dog tidligt en fornemmelse af at der var noget galt, således at man i analysen af data fra Figur 1 ville have indført de relative priser $\log(P_t^{ge}/P_t^{dk})$ eller den reale valutakurs $\log(E_t P_t^{ge}/P_t^{dk})$, som opfører sig noget mere stationært, se Figur 2.

Grangers ide var at man kunne konstruere stokastiske modeller for processer, som godt nok blev ikke-stationære, men sådan at passende linearkombinationer var stationære. Man siger, at de variable er kointegrerede. Derved skabte han de begreber, der var nødvendige for

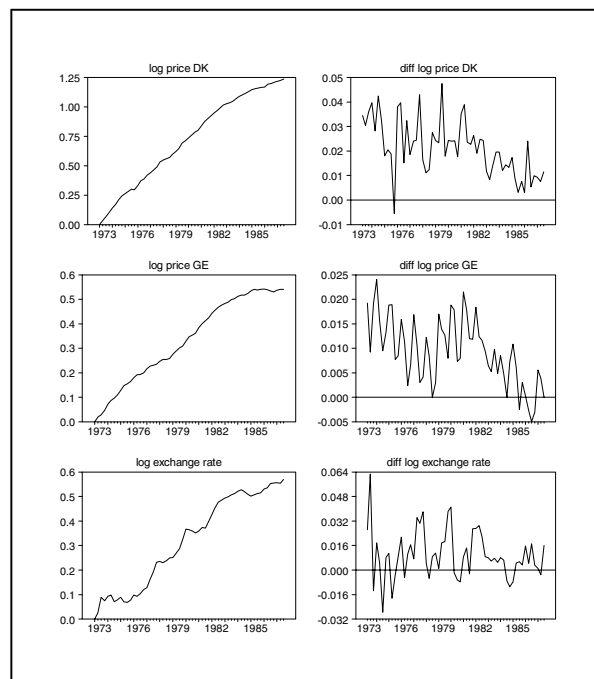


Figure 1: Data viser til venstre logaritmen af forbrugerprisindex i Danmark og Tyskland samt valutakursen. Til højre de samme variable i differenser.

at forstå de modeller, der blev anvendt til beskrivelse, prediktion og politikanalyse af makroøkonomiske data i centralbanker, fagforeninger og regeringskontorer.

Som et typisk eksempel på en makroøkonomisk relation kan man betragte loven om een pris mellem to lande, der udsiger at $P_t^{dk} = P_t^{ge} E_t$, således at priserne er ens, oversat til samme valuta. Alle variable fluktuerer over tid på en ikke-stationær måde, og det er klart, at det er vigtigt, at forstå i hvilken forstand en sådan relation holder. Som formuleret af Haavelmo (1943) skal sådanne relationer gøres mere 'elastiske' for at beskrive virkeligheden. Det vil sige, at der skulle gælde

$$\log E_t + \log P_t^{ge} - \log P_t^{dk} = u_t,$$

hvor u_t er et stokastisk restled. Dette lægger direkte op til en regression af $\log E_t$ på $\log P_t^{ge}$ og $\log P_t^{dk}$. En bedre måde at formulere dette på er at konstruere en stokastisk model, som beskriver de variables variation, samt indlejre de økonomiske relationer som restriktioner på parametrene i disse modeller. Derved får man mulighed for at drage inferens om parametrene og derfor mulighed for at teste de økonomiske hypoteser i en ramme, der beskriver data.

Grangers ide var at fortolke loven om een pris som et udsagn om at den reale valutakurs, $\log E_t + \log P_t^{ge} - \log P_t^{dk}$,

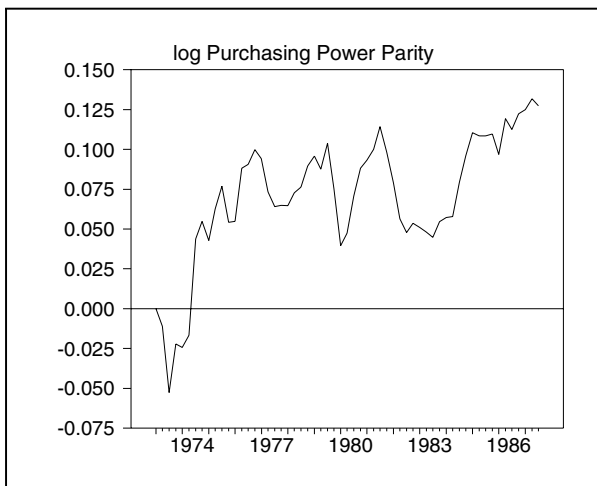


Figure 2: Forløbet af (minus) den reale valutakurs $\log(E_t P_t^{ge} / P_t^{dk})$

er en stationær process, på trods af at de enkelte variable er ikke-stationære, således at de variable er kointegrerede. Han viste, at dette fænomen optræder som en konsekvens af de såkaldte fejlkorrektionsligninger, man benytter til beskrivelse af de makroøkonomiske variable. Loven om een pris skal ikke opfattes som en naturlov, men som en underliggende tendens, således at afvigelser fra denne lov giver anledning til økonomiske transaktioner, der igen fører til at priserne tilpasses så afvigelsen mindskes. Dette fænomen illustreres tydeligt i grænsehandlen, hvor prisforskelle fører til øget handel over grænsen, som igen fører til en prispolitik med det formål at udjævne priserne.

3. En fejlkorrektionsmodel

Som et simpelt eksempel på en fejlkorrektionsmodel, kan man betragte ligningerne for $t = 1, \dots, T$,

$$\begin{aligned}\Delta X_{1t} &= -\frac{1}{2}(X_{1t-1} - X_{2t-1}) + \varepsilon_{1t}, \\ \Delta X_{2t} &= \frac{1}{2}(X_{1t-1} - X_{2t-1}) + \varepsilon_{2t},\end{aligned}$$

hvor $\Delta X_{1t} = X_{1t} - X_{1t-1}$. Begge processer er ikke-stationære, eller integrerede, på grund af forekomsten af en fælles random walk, men differensen er stationær, således at de variable er kointegrerede. Dette ses af løsningen

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sum_{i=1}^t (\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (\varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}).$$

4. Kointegrationsmodellen

Den generelle fejlkorrektionsmodel for en p -dimensionel process X_t består af den stokastiske differensligning

$$\Delta X_t = \alpha \beta' X_{t-1} + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \mu + \varepsilon_t,$$

hvor α og β er $p \times r$. Her modelleres ændringerne af processen som en lineær funktion af processens fortid, samt uforudsete stokastiske chok ε_t , som antages

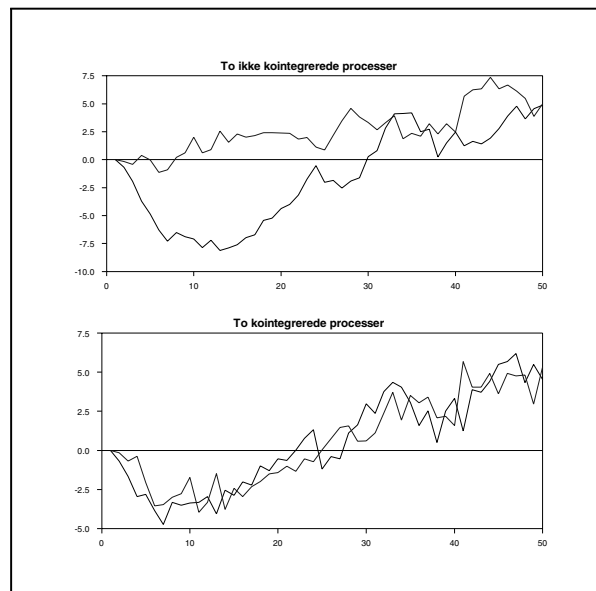


Figure 3: Billedet viser først uafhængige random walk og dernæst to kointegrerede random walk genereret fra modellen i afsnit 3

uafhængige identisk fordelte. En løsning til denne ligning har formen

$$\begin{aligned}X_t &= C \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + C\mu t + Y_t, \\ C &= \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} (I_p - \Gamma_1) \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp},\end{aligned}$$

hvor Y_t er stationær, og β_{\perp} betegner det ortogonale komplement til β , således at de r kombinationer $\beta' X_t = \beta' Y_t$ er stationære, mens X_t er ikke-stationær. Bemærk de p deterministiske trende $C\mu t$, og de $p - r$ stokastiske trende givet ved kombinationerne $\alpha'_{\perp} \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$. Ikke-stationariteten skabes således af $\alpha'_{\perp} \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ og elimineres gennem $\beta' X_t$.

Hvis vi tager

$$X'_t = (\log P_t^{dk}, \log P_t^{ge}, \log E_t),$$

og vi har fundet en kointegrerende relation, $r = 1$, er det nærliggende at undersøge om denne kan have formen $(1, -1, -1)$, som beskriver loven om een pris. Ved at formulere denne relation som en stationær α relation, får vi mulighed for at formulere den i modellen ved hjælp af parametrene β , og den ovennævnte hypotese kan da undersøges ved test på β .

Mere spændende er det selvfølgelig hvis dette er forkert. Man finder faktisk ofte istedet, at den relation, der er stationær, har formen

$$\log P_t^{dk} - \log P_t^{ge} - \log E_t - c(i_t^{dk} - i_t^{ge}),$$

hvor i_t^{ge} og i_t^{dk} er den lange obligationsrente i de to lande, således at loven om een pris ikke gælder i sin simple form, men skal modificeres med rentedifferentialet. Faktisk er det sådan at i den internationale handel er det ca. 98%, der er handel med penge, hvor renter er vigtige, mens kun 2% er egentlig handel med varer, hvor pristanal er vigtige, så det virker naturligt, at loven om een pris skal modificeres med renterne for at den kan beskrive virkeligheden.

5. Den statistiske analyse

Det er spørgsmål som ovennævnte, der har nødvendiggjort udviklingen af statistiske metoder, der tage hensyn til datas ikke-stationære opførsel, og som har været inspiration til det arbejde vi har udført med modellen.

I al korthed har vi diskuteret maksimaliseringsestimation baseret på normalt fordelte fejl. Dette indebærer diskussion af numeriske algoritmer til estimation og beregning af teststørrelser for ovenstående model og de delmodeller, man får for de forskellige relevante hypoteser, man vil undersøge.

Det største matematiske arbejde ligger i at udlede den asymptotiske fordeling af estimatorene og teststørrelser, idet dette involverer brugen af den Brownske bevægelse og stokastiske integraler med hensyn til denne, og giver anledning til en ny type af grænsefordelinger. Specielt er det testet for rangen af matricerne α og β , som er ikke-standard. Da denne analyse kun giver asymptotiske resultater og makroøkonomiske data ofte er observeret over ret korte tidsrum, er det også vigtigt, at der er udviklet korrektionsfaktorer, der gør resultaterne anvendelige for mindre antal observationer.

Samtidig med det teoretiske arbejde har vi udviklet programmer til hjælp med beregningerne, som igen har gjort det muligt at anvende metoderne i empirisk økonomi, se Hansen og Juselius (1994).

6. Matematik-økonomi studiet.

I de sidste 30 år har det samfundsvidenskabelige og det naturvidenskabelige fakultet samarbejdet om uddannelsen i matematik og økonomi. Fra 1968 i Aarhus og senere i København. Formålet er at opdrage en generation af økonomer med et solidt kendskab til matematisk og statistisk metode. Kandidaterne kan bidrage på væsentlig måde til at udvikle metoder til forståelse og beskrivelse af økonomiske data. Dette gælder såvel inden for mikroøkonomi, som makroøkonomi og finansieringsteori.

Som ovennævnte historie om kointegration antyder, er dette arbejdsfelt en sand guldgrube for en veltrænet matematik økonom.

7. Klimaforskning

For nylig er jeg blevet gjort opmærksom på, at der er en interesse i klimaforskningen for at inddrage denne ny viden om ikke-stationære processer og deres analyse. Et eksempel på et emne, hvor disse metoder måske kan have nytte, er i diskussionerne om jordens opvarmning. Er der en deterministisk trend i temperaturmålingerne, og kan afvigelserne fra denne trend bedst beskrives som stationære eller som ikke-stationære? Det er klart at kun en meget nøje analyse kan føre til noget endeligt svar på, hvor meget information der er i data, men det mindste man kan gøre er da at benytte statistiske metoder, der er afledt fra en beskrivelse af datas stokastiske egenskaber.

8. Referencer

Granger C. W. J. (1981), Some Properties of Time Series and their use in Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, 16, 121-130.

Haavelmo, T. (1943), The statistical implications of a system of simultaneous equations, *Econometrica*, 11, 1-12.

Hansen, H. and K. Juselius, (1994), *CATS in RATS, Manual to Cointegration Analysis of Time Series*. Evanston: ESTIMA, www.estima.com.

Johansen, S. (1996), *Likelihood Based Inference on Cointegration in the Vector Autoregressive Model*. Oxford University Press, Oxford.

"I tilfælde af uoverensstemmelse mellem kort og terræn..."



Af Niels Keiding
Biostatistisk Afdeling, Københavns Universitet
email: N.Keiding@biostat.ku.dk

... **følg da terrænet.**" Dette citat fra et apokryft militært reglement er også en overskrift for god praksis i anvendt statistik. Hvis den statistiske model ikke passer med den virkelighed, modellen skal beskrive, da har virkeligheden ret.

I dette indlæg skitseres først matematiske modellers konfrontation med virkeligheden med særlig vægt på balancen mellem deduktion og induktion. Jeg nævner derefter sandsynlighedsbegrebets rolle og slutter med nogle bemærkninger om, hvordan vi her i landet har placeret statistikerne stærkt i dette felt.

Matematiske modeller

Matematiske modeller anvendes i mange videnskaber som hjælpemiddel til at beskrive virkelige fænomener. Det er velkendt, at store dele af teoretisk fysik kun lader sig formulere med bestandig brug af matematik, og historisk har vigtige dele af matematikken udviklet sig som svar på udviklingsbehov i teoretisk fysik. Det er knapt så velkendt, at økonomisk teori på tilsvarende måde baserer sig på matematiske konsekvensanalyser af idealiserede forudsætninger, ligesom tilfældet er i en række teoretisk-biologiske discipliner som populationsdynamik, populationsgenetik og epidemimodeller.

Deterministiske modeller

I de nævnte discipliner optræder et omfattende arsenal af matematiske modeller som beskriver deterministiske sammenhænge, og altså i princippet afgiver deterministiske kausalitetsudsagn og deterministiske prædiktioner. Jeg vender nedenfor tilbage til, hvorledes anvendelse af sandsynlighedsteori kan generalisere sel-

ve modellerne til probabilistisk kausalitet og prædiktion, hvor tilstedeværelse af en årsagsfaktor ikke medfører en respons med sikkerhed, men kun antages at øge sandsynligheden for at den optræder.

Allerede i den deterministiske modelverden er det en erfaring, at de realiserede eksperimenter ikke fuldstændigt følger forudsigelserne. Den principielt set simpleste statistiske model beskriver denne situation ved at postulere, at den underliggende deterministiske matematiske model ville beskrive strukturen korrekt, såfremt målingerne var perfekte; men på grund af *måleusikkerhed* er der en vis tilfældig variation omkring dens deterministiske struktur. Måleusikkerhed tages her – ikke mindst i f.eks. biologiske anvendelser – i bred forstand, således at ikke blot konkrete fysiske målinger inkluderes, men også hvad der kaldes "biologisk variation" omkring en deterministisk struktur, som fortsat tildeles umiddelbar fortolkelighed.

Deduktion og induktion

Den simple model

deterministisk signal + tilfældig støj

kan udledes i den deduktive sammenhæng. I praksis skal signalet identificeres ud fra de observerede data, og så er vi ovre i den *induktive* anvendelse af modellerne. En *statistisk model* defineres som en familie af sandsynligheder, og identifikation af den bedste sandsynlighed i modellen kaldes *estimation*.

Når først det statistiske modelapparat er opstillet, indser man at det også fungerer uden en faglig begrundelse for signalet, altså rent *deskriptivt*. Som deskriptive modeller tilpasses (*fittes*) af bekvemmelighedsgrun-

de en enkel matematisk model, f.eks. en ret linie eller et polynomium, omkring hvilken de observerede data fordeler sig på en måde, hvis fordeling beskrives som tilfældig hvis den ikke opviser en særligt påfaldende struktur. De deskriptive statistiske modeller kan opnå en betydelig kompleksitet, hvilket f.eks. spiller en stor praktisk rolle i deskriptiv økonometri, hvor store ligningssystemer beskriver sammenhængen mellem en lang række variable i samfundsøkonomien.

Modellen og virkeligheden

I den militærtaktiske hentydning i overskriften er det vitalt til stadighed at holde øje med, om "kortet", altså modellen, faktisk beskriver den omliggende virkelighed, altså data. I naturvidenskaberne anser man sig almindeligvis for beskrivende et system med betydelig uforanderlighed, og man ved derfor, at hvis man ikke respekterer virkeligheden i sin forskning, vil virkeligheden før eller senere hævne sig ved at dokumentere, at man ikke har været omhyggelig nok. Som iagttaget udefra af samfundsvidenskaberne, navnlig økonomi, kan man få det indtryk at en tilsvarende respekt for virkeligheden skønnes knapt så nødvendig i samfundsvidenskaberne, først og fremmest fordi "den politiske situation aldrig gentager sig", hvilket tilsyneladende får samfundsforskere til at anse deres modeller for mere stabile (troværdige?) end den omgivende virkelighed.

Sandsynlighedsmekanismer i signalet

Jeg har ovenfor set på den enkleste model bestående af et deterministisk signal med en tilfældig støj. Ofte er

det for simpelt at anskue signalet som deterministisk. Teoretiske fysikere har interesseret sig meget for, i ramme af kaosteorier, at beskrive tilsyneladende ustabile signaler som resultat af en stor følsomhed overfor begyndelsesbetingelser; måske er klimatologi og meteorologi de bedst kendte eksempler af direkte praktisk konsekvens.

Et andet udgangspunkt for at generalisere de simple deterministiske signaler er at indbygge sandsynlighedsmekanismer i selve teoriformuleringen. Det simpleste og måske mest oplagte eksempel herpå er den kønnede reproduktion i biologien, hvor barnets genotype fremkommer ved en simpel sandsynlighedsmekanisme ud fra forældrenes genotyper. Til adækvat beskrivelse af komplicerede populationsgenetiske forløb følger det, at stokastiske processer bliver nødvendige for at opfange den iboende tilfældighed.

I en række andre sammenhænge er den tilgrundliggende sandsynlighedsmekanisme mindre indlysende. Således er det almindeligt at beskrive finansielle markeders udvikling ved stokastiske processer, hvor ræsonnementet formentlig er, at det makrosystem, som skal beskrives, fremkommer som summen af en lang række fænomener på mikroniveau, hvis resultat forhåbentlig opfanges adækvat af tilfældighedsmekanismen i den stokastiske proces.

Eksempel: simpel befolkningsvækst

For et par hundrede år siden påpegede Malthus, at en befolkning med fødsels- og dødsrater som var konstante over tid, således at der fødes flere end der dør, vil vokse eksponentielt. Dette simple, næsten kvalitative udsagn kontrasterede Malthus med sin overbevisning om, at ressourcerne kun kunne vokse lineært eller polynomialt og derfor til sidst måtte blive for få.

Malthus's model er udgangspunkt for en lang række modeller for befolkningsvækst. Således opstillede Lotka i begyndelsen af det tyvende århundrede den stabile befolknings-teori, stadig i den deterministiske ramme, hvor fødsels- og dødsrater nu anskuedes aldersspecifikt, og stadig konstante over kalendertiden. Det fremgår så, at populationen på langt

sigt vil vokse eksponentielt med en eksponent som kan beregnes eksplicit på basis af fødsels- og dødsraterne, og at den relative aldersfordeling i populationen vil stabilisere sig ud fra en enkel formel givet ved fødsels- og dødsrater.

I praksis består befolkninger af enkeltindivider, og fødsels- og dødsrater må fortolkes i en sandsynlighedsteoretisk ramme. Denne fortolkning bliver væsentlig i tilfælde af små populationer, som på grund af tilfældige sammentræf risikerer at dø ud, uanset at fødselsraten er større end dødsraten. Resultatet om den eksponentielle vækst bliver nu erstattet af de mere nuancerede udsagn, at middelværdien af befolkningen vokser eksponentielt, men at selv hvis fødselsraten er større end dødsraten, vil der være en positiv sandsynlighed for at befolkningen dør ud.

Disse teorier kan anvendes på de tidlige stadier af en epidemi, idet en "fødsel" er smitte, en "død" er fjernelse af smittebæreren ved helbredelse, udvandring eller død. Heraf fås den såkaldte basale tærskelsætning i epidemimodeller: hvis hvert inficeret tilfælde smitter højst et yderligere tilfælde, dør infektionen ud, mens (i den deterministiske teori) hvis hvert individ smitter mere end et yderligere individ, opstår der en epidemi. I den stokastiske teori bliver dette til, at hvis hvert individ i gennemsnit smitter mere end et yderligere individ, vil der være positiv sandsynlighed for at der opstår en epidemi (men almindeligvis også positiv sandsynlighed for, at epidemien dør ud på grund af tilfældigheder).

Den simple eksponentielle vækstmodel kan yderligere raffineres ved at antage, at fødsels- og dødsraterne selv er udsat for tilfældige påvirkninger (sometider betegnet "stokastisk miljø"), og såfremt disse tilfældigheder i sig selv er stabile over tid er det stadig muligt at udlede asymptotiske resultater for befolkningens vækst. Alt afhængig af størrelsesforholdet mellem miljøvariationen og den ovennævnte iboende tilfældighedsmekanisme i en lille befolkning (den *demografiske variation*) kan man nå frem til, at miljøvariationen vil dominere, eller at den asymptotiske vækst for en befolkning i stokastisk miljø vil gå langsommere, jo større variation der er i miljøet, for given middelnærvækst.

Statistikeren: Den danske model

Når statistikeren udvikler og anvender sine modeller i samspil med virkeligheden foregår der et raffineret vekselspil mellem matematisk deduktion og statistisk induktion. Aktiviteten stiller store krav til udøveren, fordi den både kræver den klassiske matematikers analytiske stringens og en udadvendt evne til at lytte til og implementere ofte ganske præliminært formulerede ønsker vedrørende virkelighedsbeskrivelse.

Danmark har en fornem tradition på dette felt, med en efter international standard ganske omfattende matematisk og matematisk-statistisk træning af statistikere, men samtidig en sikker anvendelsesmotivation. Statistiske anvendelser varetages i Danmark af de højest matematisk kvalificerede statistikere, således at der er en enestående helhed over feltet. I mange andre lande findes en uheldig dualisme mellem matematisk og anvendt statistik, idet de (få) matematisk kvalificerede statistikere ser ned på anvendelser som trivielt arbejde. Dette arbejde bliver derfor udført af matematisk dårligere kvalificerede, som ikke magter at videreudvikle metoderne, således at anvendelserne faktisk bliver trivialiseret.

Den danske model kræver bestandig vedligeholdelse.

De fleste af studenterne anser anvendelser, f.eks. biostatistik, som en berigende beskæftigelse. Dette bygger imidlertid på to nødvendige betingelser.

For det første: Myten om, at biostatistik er berigende, er ikke en selvfølge. Den, og dermed karrierevalget hos mange af de bedste kandidater, lever af at der findes innovativ og fantasifuld biostatistik i landet, og den kommer ikke af sig selv.

For det andet er det et kritisk punkt, at de matematisk højt kvalificerede nybakte statistikandidater får forløst deres potentiale i forhold til de konkrete praktiske udfordringer. Hertil kræves tilstrækkeligt store miljøer, hvor statistikere kan udvikle deres egen fagidentitet konfronteret med virkelighedens problemer, men i tilstrækkelig kollegial tryghed og supervision.



Af: Merete Jørgensen,
Funktionschef, Biostatistik,
Global Development, Novo Nordisk A/S
email: merj@novonordisk.com

Matematisk Statistiks rolle i udviklingen af nye lægemidler!

Behovet for nye lægemidler kan vi alle relatere os til. Før eller siden vil næsten alle få behov for lægelig medicinsk behandling. Desværre er der en række situationer, hvor der i dag ikke findes medicinsk behandling, og hvor manglen på effektive behandlingsmuligheder er forbundet med stærkt reduceret livskvalitet eller endda er livstruende.

For de statistikere som får mulighed for at anvende deres kompetencer til at deltage i et så vigtigt og relevant arbejde, som det er at bidrage til udviklingen af nye lægemidler er det daglige arbejde præget af et stort engagement og en høj grad af ansvarsbevidsthed.

I artiklen vil jeg forsøge at give nogen eksempler på:

- Hvad det er en matematisk statistiker bidrager med?
- Hvilke kompetencer kræves?
- Hvordan Novo Nordisk forsøger at sikre, at de nødvendige kompetencer og metoder løbende er til rådighed for firmaet?

Udvikling af lægemidler udgør en lang vej fra basal forskning i identifikation af nye mulige lægemiddelkandidater gennem udvikling af dokumentation af virkningsmekanisme, behandlingsmåde og bivirkningsprofil, samt udvikling af et produktionsapparat, som skal stå klart så snart produktet er klart til at markedsføres. Hvert trin i denne proces er baseret på viden og dokumentation. Viden, som er genereret ud fra en lang række videnskabelige forsøg. Forsøg, som skal designes, data indsamles, analyseres og rapporteres bl.a. ved hjælp af statistiske metoder.

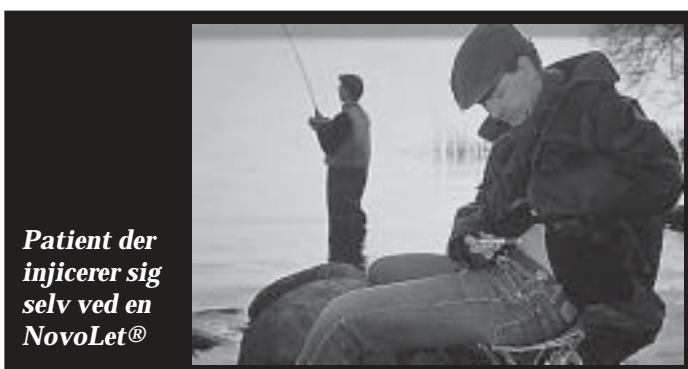
I det følgende vil jeg gennem nogle eksempler forsøge at give et billede af de mange problematikker, man som statistiker i den farmaceutiske industri kan blive konfronteret med. Traditionelt tænkes mest på statistikerens rolle som den, der ved hjælp af statistiske metoder og computerregnekraft analyserer data når et forsøg er udført. Jeg vil derfor i det følgende fokusere mere på de andre ty-

per af opgaver, som optager statistikerens tid, og som fylder mindst ligeså meget, som det egentlige analysearbejde.

Eksempler fra identifikationsfasen

Statistiske metoder til stikprøveudtagning

Det hele starter med forsøg på at identificere nye lægemiddelkandidater. En af de metoder der bruges, er en såkaldt High Throughput Screening, hvor kemiske biblioteker, dvs. tusindvis af forskellige kemiske forbindelser, screenes for at identificere molekyler med en struktur, som kunne tænkes at have interessante egenskaber inden for det felt man er interesseret i. Det bibliotek man vælger at undersøge består i mange tilfælde af grupper af beslægtede molekyler, som man ved modelstudier har en formodning om, indeholder en aktiv konstellation af atomer. En anden



Patient der injicerer sig selv ved en NovoLet®



Novo injektionssprøjte anno 1925

metode er, at sprede nettet ud videst muligt, og derved øge chancen for at fange interessante molekylstrukturer. Har man først identificeret et interessant område, kan man så gå nærmere på jagt blandt beslægtede stoffer. Brug af statistiske metoder til stikprøveudtagning kan i denne forbindelse bruges til at øge chancen for at finde interessante nye lægemiddelkandidater uden brug af ekstra ressourcer i laboratoriet.

Microarray og Bioinformatik og etablering af videns-netværk

Området microarray og bioinformatik, hvor man søger at kortlægge strukturer og indikatorer for mulige virkninger af det enkelte molekyle er i stærk fokus såvel i de bioteknologiske virksomheder, som på universiteterne. Dette stiller de hidtidige statistiske metoder og deres principper på prøve. Der er ofte kun få gentagelser, men mange mulige effektparametre, man ønsker at betragte. Man har derfor problemer med, at statistiske test indenfor den enkelte parameter har lav styrke (dvs. høj risiko for at overse selv rimeligt interessante effekter=høj risiko for type 2 fejl). Samtidig giver antallet af effektparametre, som undersøges, anledning til, at risikoen øges for, at se effekter, som ikke skyldes en reel effekt, men som skyldes tilfældigheder (den såkaldte type 1 fejl). Anvendelse af traditionelle statistiske metoder kræver derfor stor omtanke for ikke at ende i fejlslutninger. Det er et område, hvor der for tiden nationalt og internationalt arbejdes intenst på udvikling af nye metoder.

Bioinformatik er et eksempel på et område, hvor vi i Novo Nordisk Biostatistik har etableret samarbejde med universiteternes statistiske forsk-

ningsmiljøer for, at skabe et netværk af personer med forskningskompetencer, såvel som kendskab til den praktiske problemstilling i laboratorierne og behovet for udvikling af metoder til at løse dem. Statistikerens rolle i industrien er ikke alene, at løse de matematisk statistiske problemstillinger han/hun stilles overfor, men også selv eller i samarbejde med andre, at bidrage til udvikling af nye statistiske metoder.

Et af de midler man fra Novo Nordisk stiller til rådighed for at fremme samarbejdet er Novo Nordisks Scholarships, PhD, og Post-docs programmer (se www.novonordisk.com klik 'Science' og derefter 'Academic Affairs'). Som led i de kontakter, der er skabt indenfor bioinformatik, fik en ung statistik studerende for nylig godkendt sit projekt under Novo Nordisks Scholarship program til økonomisk støtte under sit specialestudium inden for microarrays.

Eksempler fra Præklinisk udvikling

Dyreforsøg og Etik

Før man er så langt, at man kan gå videre og undersøge et nyt lægemiddels virkning i mennesker, må det først afprøves i dyr. På Novo Nordisk sætter man firmaets etiske profil meget højt, og statistikerens rolle i mange dyreforsøg er bl.a., at hjælpe med til at optimere forsøgsdesign således, at man kun benytter præcis det nødvendige antal dyr. Ikke så få, at studiet bliver inkonklusivt, og ikke så mange, at vi kunne have konkluderet på basis af færre. Statistikerens rolle er i planlægningsfasen af studiet at bidrage med etablering af et optimalt forsøgsdesign, som sikrer, at

man bedst muligt opnår valide resultater fra de dyreforsøg man nødvendigvis må udføre. Senere i studiet er statistikerens involveret i udførelsen af den statistiske analyse, rapportering og udformning af konklusionen.

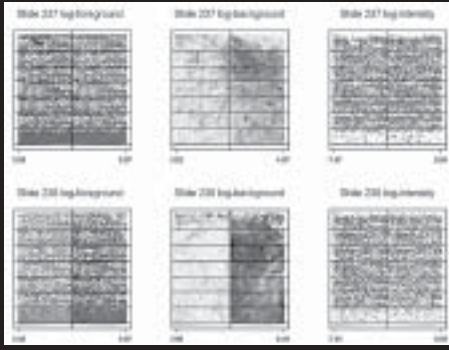
Eksempler fra Produktudvikling

Statistiske forsøgsdesign

Sideløbende med, at der skabes viden og dokumentation for et nyt lægemiddels virkning, foregår udviklingen af produktionsplatformen, produktets endelige sammensætning, styrke, emballage, kvalitetsmæssige frigivelses grænser mv. Alle disse enkelt problemstillinger belyses og besluttet på basis af data og forsøgsresultater. Hvis man fx skal optimere udbytte fra mikroorganismer i en produktionstank, kunne man tænke sig at undersøge indflydelse af temperatur, pH, omrøringshastighed og forskellige tilsætningsstoffer. I en forsøgsopsætning til at undersøge forskellige faktoreres indflydelse på produktionsudbytte, kan statistikerens bidrage med optimering af forsørets design. Ved at benytte statistiske principper i udvælgelsen af forsøgs-kombinationer vil man i nogle tilfælde kunne reducere et forsøgsdesign fra et fuldstændigt forsøg, hvor man fx undersøger 4 faktoreres hver på 3 niveauer (dvs i alt $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ muligheder) til et reduceret set-up med fx 27 muligheder. En reduktion svarende til en besparelse på 2/3 af de ressourcer, der skal bruges i laboratoriet til opsætning af et sådant forsøg, vel at mærke, hvor man stadig vil være i stand til at udtale sig om alle 4 faktoreres effekter. Omkostningerne er, at man ikke i alle tilfælde



**InDuo®
blodglukosemåler
og Innovo®
injektionsdevice
fra 2001**



**Microarray
analyser**

Forsøgs-kaniner



Insulin produktions-tank



vil være i stand til at udtale sig om samvirkningen af alle de faktorer man undersøger. Det er derfor vigtigt i planlægningsfasen at være klar over, hvilke faktorer man ønsker at bestemme, og det optimale forsøgsdesign fastlægges derfor i tæt samarbejde mellem produktionsafdeling og statistiker.

De kliniske afprøvninger

Myndighedernes rolle

Den største del af dokumentationsarbejdet før et nyt lægemiddel kan blive godkendt til markedsføring er den kliniske dokumentation. Myndighederne stiller krav om, at der i mennesker føres dokumentation for virkning og omfanget af evt. bivirkninger, hvordan stoffet optages og udskilles i kroppen, hvordan det virker i sammenhæng med andre lægemidler, som patienten måtte tage og, hvordan det virker i specielle patientgrupper. Kravet til dokumentation er enorm. Hvordan denne fremskaffes aftales i hvert enkelt tilfælde ved en løbende dialog med myndighederne. Hvor der er tale om et lægemiddel til det globale marked, vil det sige i samarbejde med de europæiske (EMA), de amerikanske (FDA) og de japanske myndigheder (KIKO).

Statistikerens rolle i kliniske forsøg er myndighedsbestemt

Som ved de dyreeksperimentelle forsøg er statistikerens rolle i relation til de kliniske forsøg, at være med til at planlægge forsøgets udformning. Sørg for, at det er præcis det korrekte antal patienter, der indgår (ikke for få og ikke flere end nødvendigt). Samtidig er der muligheder

igen for, at reducere forsøgets omfang i relation til de problemstillinger, det enkelte forsøg er planlagt til at afdække. I forsøgets protokol planlægges nøje (i henhold til krav fra myndighederne) hvilke statistiske metoder og problemstillinger, der skal benyttes i det statistiske analysearbejde når studiet er færdigt. De statistiske metoder skal adressere præcis de videnskabelige hypoteser forsøget er sat op med henblik på at afdække.

Der er en vigtig forskel i statistikerens rolle i kliniske studier udført i mennesker og de dyre- eller laboratoriemæssige eksperimenter, og det er, at der fra myndighedernes side er opsat krav (indeholdt i de såkaldte Good Clinical Practice (GCP) guidelines) om, at ethvert forsøg, hvori der indgår personer, skal følges fra planlægning, gennem udførsel, til analyse og rapportering af en ansvarshavende statistiker.

Beslutning om dosering og nye typer af forsøgsdesigns

En type kliniske studier tilsligter at finde den korrekte dosering af et lægemiddel. Lige præcis nok til at have en rigtig god effekt, og lige præcis ikke så meget at risikoen for bivirkninger bliver for stor. Traditionelt udføres studierne som dosis-respons forsøg, med fastlæggelse som oftest af en logistisk kurve for sammenhængen. I denne type af studier forskes der i nye former for studiedesigns, hvor man kan reducere det antal af patienter i forsøget, som får en for lav hhv. for høj dosis, samtidig med at man forsøger at fastlægge hvilken dosis, der er den bedste. Disse designs kaldes adaptive designs, og er studiedesigns, hvor man på forhånd har fastlagt algoritmer for allo-

kerings ratio (dvs. forholdet mellem chancen for at den næste patient allokeres til de forskellige dosisniveauer) afhængig af de resultater af studiet, der kommer ind løbende.

Differential ligninger og brug af in-silico modeller

De studier, der foretages i den tidligste fase af de kliniske afprøvninger har til sigte at afdække, hvordan lægemidlet optages, distribueres, virker og påvirkes i kroppen. Disse studier involverer ofte løsning af differential ligninger af mere eller mindre kompliceret art, hvor den matematiske statistik spiller en stor rolle. Der forskes pt. i brug af resultaterne fra disse tidlige studier til at simulere (in-silico studier) mulige forsøgsresultater for de studier, der ligger senere i forløbet. In-silico studier vil forhåbentlig kunne forbedre beslutningsprocessen og hjælpe med til, at de forsøg, der sættes i gang initieres på et så solidt fundament, at studier, hvor risikoen for et inkonklusivt studie er høj, ikke påbegyndes.

Team-work og nødvendige kompetencer

Statistikerne i den farmaceutiske industri arbejder i tæt samarbejde med personer fra en lang række af forskellige fagområder, herunder især personer med medicinske og farmaceutiske kompetencer. Det er yderst vigtigt, at statistikerne besidder ikke alene gode fagstatistiske kompetencer, men også, at de besidder evnen til at indgå i et tæt tværfagligt samarbejde, og har evnen til at kommunikere og oversætte ofte svært tilgængelige matematisk stati-



Arbejde i forsknings- laboratorium



Underskrift af Post-doc samarbejds- aftalen

stiske problemstillinger til den praktiske forsøgsproblematik.

De statistiske metoder drives af forsøgsomstændighederne og de praktiske problemstillinger. Der er behov for, at statistikerne, er meget bredt funderet mht. kendskab til forskellige metoder således, at der til den enkelte problemstilling benyttes præcis den metode, der i det givne tilfælde giver den bedste udnyttelse af de foreliggende data.

Man kan ikke forvente at nyuddannede har lært alle de nødvendige metoder. Derfor er evnen til at sætte sig ind i nye metoder af endnu større betydning end det at have metoderne som paratviden.

Samarbejde med Universiteter

Krav og metoder, der benyttes i relation til lægemiddeludvikling, er under konstant forandring. Det er derfor nødvendigt hele tiden at være på forkant med udviklingen, nogle gange endda selv at være med til at forme den. I mange andre lande vel nok mest udtalt i USA, er det sædvanligt at universitetsansatte fungerer som konsulenter for industrien, og de har så mange kontakter, at det i visse tilfælde har drevet deres videnskabelige forskning inden for bestemte områder. Det er ikke en tradition vi har i Danmark i samme grad, alligevel er det lykkedes at etablere et godt og gensidigt inspirerende samarbejde mellem en række danske universitetsinstitutter og Novo Nordisk indenfor det statistiske fagområde.

Udover det allerede nævnte samarbejde omkring microarrays, som bl.a. er etableret i samarbejde med

Århus og Københavns Universiteter, har vi netop afsluttet et 2-årigt samfinansieret projekt mellem Ålborg Universitet og Novo Nordisk A/S, hvor 4 statistikere fra Ålborg Universitet har arbejdet på udvikling og afprøvning af nye statistiske metoder indenfor problemstillinger i relation til insulin og glukose omsætning hos diabetes patienter. Ud af det, er der ikke alene kommet en række videnskabelige publikationer, men også et øget kendskab til de problemstillinger vi arbejder med i den farmaceutiske industri. Det allerede etablerede forskningssamarbejde vil naturligt fortsætte i forbindelse med den øgede erkendelse af interessante forskningshypoteser. De problemstillinger, som gruppen har arbejdet med, er endvidere anvendt i undervisningen af statistikstuderende, som derved tidligt i deres studieforløb har opnået kendskab til nogle af de problemstillinger, et job som anvendt statistiker i den farmaceutiske industri ville kunne handle om.

Scholarships, PhD og Post-doc initiativ rækker helt til gymnasierne

I samarbejde med gymnasielærere i Frederikshavn har Post-doc gruppens vejleder i Ålborg udarbejdet materiale, der vil udkomme på en CD-rom, som gymnasielærere i matematik vil kunne benytte i projektarbejde i deres matematik undervisning. Herved håber vi, at det vil kunne skaffe yderligere interesse for at læse matematisk statistik, et fagområde, hvor der ikke alene i Danmark, men på verdensplan er alt for få uddannede set i relation til det kraftigt stigende behov.

Samarbejder både med Danmarks Tekniske Universitet og Københavns Universitet, for studerende, som under Erhvervsforsker initiativerne har eller er i gang med at fuldføre en PhD grad, har været en stor succes. I de fleste tilfælde har det område, de har valgt at koncentrere sig om under deres PhD uddannelse sit udspring i problemstillinger, de har arbejdet med og erfaret om i deres arbejde, som statistiker på Novo Nordisk. Fordelene set fra Novo Nordisks side er, ikke alene det, at der arbejdes på at løse en problemstilling direkte relateret til et identificeret behov, men i lige så høj grad den synergistiske effekt, der opnås gennem samarbejdet mellem de forskningsorienterede vejledere på universiteterne og de mere praktisk orienterede vejledere fra Novo Nordisk.

Samarbejdet har vist sig frugtbart, hvor forskere på Universiteterne er blevet inspireret til forskning indenfor områder de måske ikke tidligere havde kendskab til, og hvor de med deres faglige kompetencer har kunnet løfte problemstillingen til et langt mere generelt niveau. I undervisningen har problemstillingerne kunnet bruges til, at illustrere en række metoders praktiske anvendelighed, noget mange af de studerende sætter stor pris på. Set fra Novo Nordisks side, har man opnået en løsning på vigtige problemstillinger, og forhåbentlig bidraget til, at endnu flere vil vælge at specialisere sig i matematisk statistik og vælge at arbejde i indenfor et spændende område, hvor Danmark er med helt i front.

Perspektivkasser og matematik



Af: Claus Jensen
Harrildvej 41, 9240 Nibe
email: claujen@hotmail.com

1. Perspektivlærens opdagelse og udbredelse

Perspektivlærens opdagelse i begyndelsen af 1400-tallet tilskrives almindeligvis Filippo Brunelleschi (1377-1446), arkitekten bag den vidunderlige kuppel på Domkirken i Firenze - og bag mange andre bygninger i byen. På rent empirisk grundlag udbredte Brunelleschi sin metode til at give et todimensionalt billede en illusion af tredimensionalitet, og han demonstrerede i praksis sin metodes effektivitet og anvendelighed på en så slående og overbevisende måde, at samtidens kunstnere omgående og begejstret tog metoden til sig¹.

I de følgende århundreder udvikledes gradvist det teoretiske grundlag for perspektivlæren², idet kunstnernes teoretiske og praktiske indsigt snart nåede et sådant niveau, at man ikke blot fremstillede perspektivisk korrekte billeder i stor mængde, men også hurtigt fik overskud til at lege: først med fremstilling af *anamorfoser*³, senere med konstruktion af *perspektivkasser*⁴.

2. Hvad er en perspektivkasse?

Fremstillingen af perspektivkasser var et populært, men kortvarigt fænomen, der kunne iagttages i Holland i årene ca. 1650-75. Følgende skildring af englænderen John Evelyn, der i 1656 så en perspektivkasse i London, illustrerer emnets fascinationskraft på samtiden, og beretningen antyder samtidig, hvad en perspektivkasse er: "... was shew'd me a pretty Perspective & well represented in a triangular Box, the greate Church of Harlem in Holland, to be seene thro a small Hole at one of the Corners, & contrived into a hansom Cabinet. It was so rarely don, that all the

Artists and Painters in Towne, came flocking to see & admire it"⁵.

Den mest raffinerede af de bevarede perspektivkasser skyldes Samuel van Hoogstraten (1627-78), der efter endt læretid i Rembrandts værksted udviklede sig til at blive en sand mester i illusionstisk kunst, og som hurtigt kom til at udføre opgaver for adskillige af Europas fyrstehoffer. Van Hoogstratens perspektivkasse er afbildet på bagsiden af dette nummer af Matilde. Af billedet samt af Evelyn's beskrivelse fremgår, at en perspektivkasse er en trækasse, hvis indre er bemalet, så iagttageren oplever en fascinerende kombination af virkelighed og illusion. Kassens indre kan i dag iagttages gennem en større åbning i en af dens vægge, men det, man ser herigennem, virker stærkt forvrænget. Åbningen er nemlig ikke beregnet til at se igennem: oprindeligt var den dækket med gennemskinneligt pergament, som lod lys komme ind, men holdt nyfigne blikke ude. Iagttageren skal derimod se gennem et af de to kikhuller, som er

anbragt i endepanelerne. Gør man det, opleves et livagtigt hollandsk 1600-tals interiør med borde, stole, personer og sågar en lille hund. Men i kraft af den perspektiviske bemaling på vægge, loft og gulv fremtræder lokalet som længere, bredere og højere, end det i virkeligheden er. Ja, nogle af de andre kasser ser endda ud til at være rektangulære, selv om de i virkeligheden er enten trekantede eller femkantede (se rammen *Bevarede perspektivkasser*).

Det er værd at bemærke, at disse hollandske perspektivkasser er aldeles tomme, og at den illusionistiske effekt fremkommer alene i kraft af de perspektivisk tilrettelagte bemalinger af det indre. Den perspektivkasse, der omtales i Oehenschlägers (1779-1850) Sanct Hansaften-spil, og som vi vel alle har hørt om, er derimod af en helt anden type: ifølge digtets tekst en miniature-teaterscene med udskiftelige kulisser, som tillader sceneskift. Det er formentlig denne senere perspektivkassetype, der kan ses på malerier af Jens Juel (1745-1802):

BEVAREDE PERSPEKTIVKASSER

Sted	Datering	Form	Antal kikhuller	Motiv	Kunstner
Nationalmuseet København	1655-1660		1	En reformert kirke	Anonym
Nationalmuseet København	ca. 1660		1	En katolsk kirke	Anonym
Nationalmuseet København	1665-1670		1	Et hollandsk vorhuis	Anonym
Bredius Museum Haag	1670-1675		1	Et hollandsk vorhuis	Anonym
Detroit Institute of Arts	1663		1	Et stort lokale	Anonym
National Gallery London	1655-1660		2	Det indre af et hollandsk hus	Samuel van Hoogstraten

Nächtliche Strassenszene auf dem Berg in Hamburg fra 1764, nu på Museum für Hamburgische Geschichte, Hamburg, og af Christian August Lorentzen (1749-1828): *Mand og børn med perspektivkasse*, Museet på Sønderborg Slot, Sønderborg.

3. Centralprojektioner

I Holland fremstilledes i den nævnte korte periode ca. 1650-75 talrige perspektivkasser, hvoraf i dag desværre kun seks er bevaret, se rammen: *Bevarede perspektivkasser*⁶.

Det beskedne antal til trods, er vidt forskellige former heldigvis repræsenteret: tre trekantede (heraf én retvinklet og to spidsvinklede), to fir-kantede og en enkelt femkantet. Uanset formen er de imidlertid alle konstrueret ved en elegant kombination af et antal centralprojektioner, der har fælles øjepunkt, men forskellige billedplaner.

Figur 1 illustrerer, hvordan en lut punkt for punkt afbildes perspektivisk vha. en centralprojektion, her i Albrecht Dürers kunstneriske frem-



Figur 1
Illustration i Albrecht Dürer: *Unterweisung der Messung*, Nürnberg 1525.

stilling fra 1525⁷: en øsken på væggen til højre repræsenterer øjepunktet, og trærammen på bordet udgør billedplanen. Et lærred er vha. hængsler monteret på rammen, således at lærredet kan åbnes og lukkes i forhold til den. Hjælperen tv. har valgt et punkt på lutten, og punktets *synsstråle* er repræsenteret ved en snor, som er udspændt fra øsken til punkt. På rammen er monteret et bevægeligt trådkors, som kunstneren th. indstiller,



Figur 2
Instrument (defekt) til demonstration af en centralprojektion, Musée des Arts et Métiers, Paris.

således at trådkorsets kryds markerer skæringspunktet mellem synsstrålen og billedplanen. Derpå fjernes snoren, lærredet lukkes i, og trådkorsets position overføres med kul e. lign. til en prik på lærredet. Hermed

er det valgte punkt projiceret på billedplanen, så lærredet kan åbnes, hjælperen kan vælge et nyt punkt, snoren udspændes, og hele processen gentages. På lærredet fremtoner allerede et billede af lutten, så de to herrer har åbenbart været i gang med arbejdet i et stykke tid.

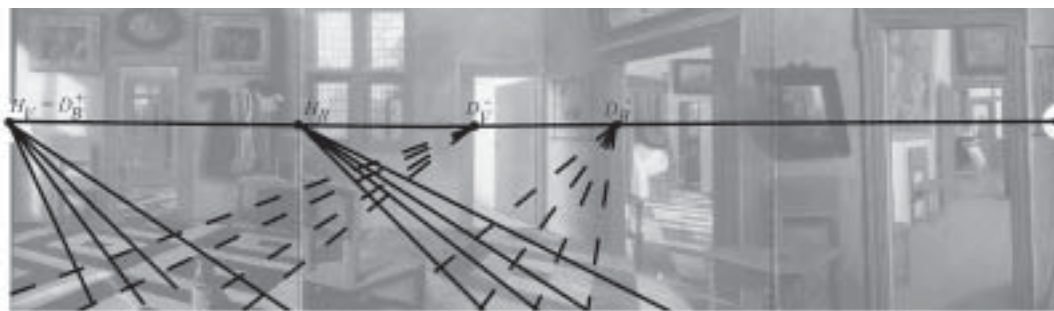
Samme snoreprincip er anvendt i det pædagogiske perspektivinstrument på figur 2, blot udgår der her fra øjepunktet (stolpespidsen i forgrunden) ikke én, men mange snore til udvalgte punkter i motivet bag billedplanen.

Udspænding af snore er imidlertid langsommeligt. Det er langt hurtigere at lade lysstråler repræsentere synsstrålerne, sådan som det sker på figur 3.

Figuren illustrerer Plinius den Yngres (23-79 e. Kr.) beretning om, hvordan malerkunsten og terrakotta-kunsten opstod i Grækenland⁸: "Hvornår maleriet er opstået er usikkert, og det falder uden for dette værks rammer at drøfte spørgsmålet...Nogle mener, at det opstod i Sicyon andre i Korinth, men alle er enige om, at det tog sin begyndelse med at man tegnede et omrids efter en persons skygge, og billeder i starten lavedes således...Samme jord var skyld i, at Butades, en pottemager fra Sicyon som den første begyndte at lave por-



Figur 3
J.E.Hummel: *Die Erfindung der Zeichenkunst*, kridttegning o. 1830, Staatliche Museen zu Preussischer Kulturbesitz.



Figur 4
Samuel van Hoogstratens
perspektivkasse (National
Gallery, London): de to
endepaneller nedlagt i
bagvæggens plan.

trætter i ler takket være sin datter. Hun var forelsket i en ung mand, og da han skulle rejse udenlands, tegnede hun på væggen et omrids af det skyggebillede, hans ansigt ved lampelysets hjælp kastede på væggen..." Her optræder altså en centralprojektion, hvor øjepunktet repræsenteres af den olielampe, der hænger midt i pottemagerværkstedet, og hvor billedplanen er væggen til venstre. Men samtidig hermed projiceres alle værkstedets objekter jo på fire andre billedplaner, nemlig værkstedets højre væg, bagvæggen, loftet og gulvet. Der er altså ligesom i en perspektivkasse tale om et antal centralprojektioner, der har fælles øjepunkt, men forskellige billedplaner.

4. Samuel van Hoogstratens perspektivkasse

Samuel van Hoogstratens perspektivkasse befinder sig på National Gallery i London. Den er indvendigt 77,9 cm lang, 51,2 cm bred og 52,4 cm høj. Den er signeret, men ikke dateret, og den har i modsætning til de andre bevarede kasser hele to kikhuller, et i hvert endepanel, placeret lige over for hinanden, i endepanelets sammenføjning med frontpanelet. Da intet billede kan iagttages perspektivisk korrekt fra to forskellige øjepunkter, skulle man tro, at to kikhuller ville

medføre problemer. Af det følgende vil fremgå, hvordan van Hoogstraten har løst en sådan latent konflikt.

Figur 4 viser de to endepaneller nedlagt i bagvæggens plan. Som det ses, er bagvæggen og venstre endepanel forsynet med et illusionistisk flise-gulv. Kassens bund, som skimtes på dette Matilde-nummers bagsidebillede, og som er gengivet på figur 5, er derimod forsynet med et virkeligt flise-gulv.

4a Venstre endepanel:

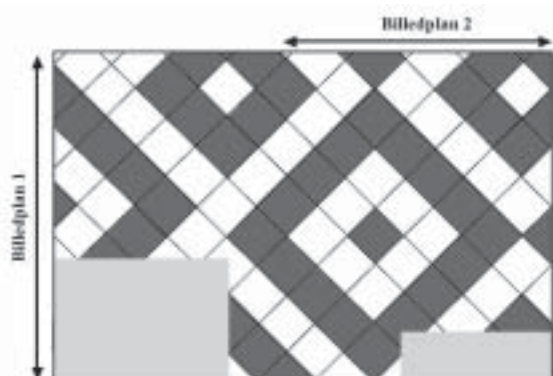
Venstre endepanels illusionistiske fliser er konstrueret på følgende måde: På figur 5 markerer **Billedplan 1** den aktuelle billedplan. De (usynlige) linjer gennem flisernes hjørner, som går i kassens længderetning, er ortogonale i forhold til **Billedplan 1**. Opfattes højre kikhul som punktformigt, vil centralprojektion med dette punkt som øjepunkt projicere ortogonerne i linjer, som konvergerer i panelets hovedforsvindingspunkt H_V . Som bekendt fremkommer hovedforsvindingspunktet ved at projicere øjepunktet vinkelret på billedplanen (se rammen *Om perspektivlærers grundbegreber*), og da hullerne som nævnt er anbragt diametralt over for hinanden, så har projektionen fra højre kikhul mod venstre endepanel netop sit ho-

vedforsvindingspunkt beliggende i venstre kikhul! Det hele bekræftes af de fuldt optrukne hjælpelinjer, som på figur 4 er indtegnet på venstre endepanel: linjerne gennem de illusionistiske flisers hjørner konvergerer faktisk i det venstre kikhul. På figur 5 danner flisernes sider rette linjer, som skærer **Billedplan 1** under vinkler på 45° . Ved centralprojektion projiceres de to sæt sider derfor i rette linjer, som konvergerer i distancepunkterne D_V^- og D_V^+ , som begge falder uden for endepanelet. På figur 4 ses netop, at de punkterede linjer, der indeholder det ene sæt flisesider, virkelig har et fælles punkt D_V^- , der i denne udfoldede version netop falder på en af bagvæggens dørpaneller. Det andet sæt sider konvergerer tilsvarende i det andet distancepunkt D_V^+ , som ikke er vist, da det ligger uden for figurens venstre kant. Længden af linjestykket fra H_V til D_V^- udgør centralprojektionens *distance*, altså afstanden fra øjepunktet til billedplanen, i dette tilfælde det samme som kassens længde. På figur 4 kan det kontrolleres, at linjestykket fra H_V til D_V^- virkelig har samme længde som bagvæggen!

På figur 4 udgør forbindelseslinjen mellem de to kikhuller de tre panelers horisontlinjer, ved endepanelernes nedlægning anbragt i hinandens forlængelse. De tre paneler indeholder i alt fire hovedforsvindingspunkter (se figur 7) og otte distancepunkter, som alle ligger på denne "fælles" horisontlinje. To af distancepunkterne falder dog uden for figuren, og visse af de resterende 12 punkter er sammenfaldende, se nedenfor.

4b Højre del af bagvæggen:

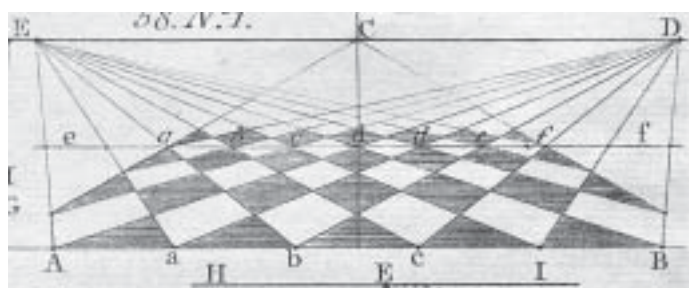
De illusionistiske fliser på bagvæggens højre del er konstrueret således: På figur 5 angiver **Billedplan 2** den nu aktuelle billedplan. Denne del af



Figur 5
Tegning af de virkelige fliser
i bunden af Samuel van
Hoogstratens
perspektivkasse.

bagvæggen kan i praksis kun iagttages fra det *venstre* kikhul, som altså er øjepunkt for den nu aktuelle centralprojektion. De usynlige linjer, som på figur 5 går gennem flisernes hjørner, og som peger i kassens bredde-retning, er ortogonale i forhold til *Billedplan 2*. Ortogonalerne afbildes ved centralprojektion i linjer, der konvergerer i projektionens hovedforsvindingspunktet H_B , og dette fremkommer som sædvanligt ved at projicere øjepunktet vinkelret ind på billedplanen (s forlængelse). Da kassen er rektangulær, må H_B således ligge i sammenføjnngen mellem de to paneler, og som nævnt på horisontlinjen. Dette bekræftes af, at horisontlinjens skæringspunkt med panel-sammenføjnngen iflg. figur 4 virkelig vha. rette linjer kan forbindes med hjørnerne i de illusionistisk malede fliser. Disse forbindelseslinjer kan meget vel være tegnet vha. af tynde snore fastgjort til en stift anbragt i punktet H_B . I omegnen om dette punkt ses faktisk et antal små huller, som tyder på, at stifter har været fastgjort her⁹.

På figur 5 ligger siderne i bundens virkelige fliser på to sæt rette linjer, der skærer *Billedplan 2* under vinkler på 45° . Bagvæggens to tilsvarende sæt illusionistiske flisesider, hvoraf det ene sæt på figur 4 er markeret med punkterede rette linjer, konvergerer derfor i billedplanens to distancepunkter D_B og D_B^+ , beliggende på



Figur 6
Illustration i Thomas Malton: *A Compleat Treatise of Perspective*, London 1778: plate XII fig. 58 no. 1.

horisontlinjen, symmetrisk på hver side af H_B . Det kontrolleres let, at distancen - afstanden fra H_B til D_B (eller til D_B^+) - virkelig er lig afstanden fra det aktuelle øjepunkt til billedplanen, i dette tilfælde det samme som kassens *bredde*. De tre linjebundter, som konvergerer i hhv. D_B^+ , H_B og D_B

svarer i øvrigt netop til en figur i **Malton**¹⁰, her gengivet som figur 6. Van Hoogstratens fliser på figur 4 fremtræder dog en del mere "forvredne" end Maltons.

4c De øvrige paneler:

Tilsvarende analyser vedr. perspektivkassens øvrige paneler, herunder kassens gulv og loft, viser, at bemalningen af det indre er foretaget på grundlag af i alt 8 centralprojektioner,



Figur 7
De 8 hovedforsvindingspunkter i Samuel van Hoogstratens perspektivkasse. Tegning: Jimmy Klitgaard.

fire og fire med fælles øjepunkt, men med forskellige billedplaner. Figur 7 viser beliggenheden af de 8 hovedforsvindingspunkter. Eksempelvis er møblers - og måske hundens - virkelige ben ortogonale i forhold til gulvets plan. De dele af benene, som er malet illusionistisk på gulvet, konvergerer derfor mod et af gulvplanens to hovedforsvindingspunkter. Tilsvarende har loftet to illusionistiske gengivelser af indrammede malerier. De vertikale dele af et virkeligt billedes ramme er med tilnærmelse ortogonale i forhold til loftets plan. Derfor konvergerer de tilsvarende illusionistiske dele af rammen tilnærmelsesvis mod et af loftets hovedforsvindingspunkter. I **Cole**¹¹, hvor samtlige paneler er gengivet - i korrekt indbyrdes placering, men desværre i uens målestoksforhold - kan man kontrollere, at det virkelige forholder sig på denne måde.

Loftets to illusionistiske malerier i ramme bevirker, at rummets højre del ser højere ud, end det i virkeligheden er. Rummets venstre del har derimod ikke en sådan effekt. Teoretisk set burde der således kunne iagttages en konflikt mellem loftets to dele. Men i praksis er konflikten usynlig, fordi man fra hvert kikhul kun kan se den del af loftet, som er længst væk. Tilsvarende bemærker man heller ikke den teoretiske konflikt mellem bagvæggen to konfliktende systemer af illusionistiske fliser: Samuel van Hoogstraten har på elegant vis ladet en stol, en pude og en cirkulær måtte camouflere den latente konflikt.

Som nævnt er der sammenfald mellem visse af de mange hovedforsvindingspunkter og distancepunkter



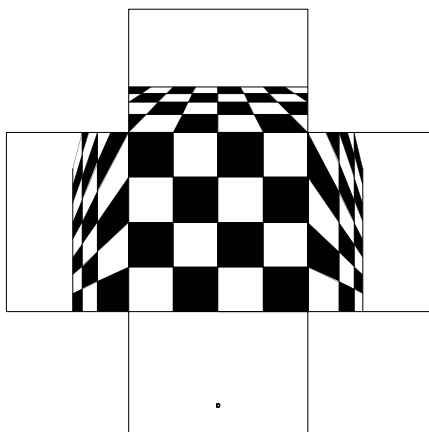
Figur 8
Nedlægning af venstre endepanel og dets forlængelse.

ter på den fælles horisontlinje på figur 4. Figur 8 viser et vandret snit gennem kassens kikhuller. Figuren viser også nedlægningen af venstre endepanel (og dets forlængelse) i bagvæggen plan. Det fremgår heraf, at H_V - som allerede nævnt - ved nedlægningen falder i D_B^+ , og da linjen fra højre kikhul til punktet D_V^- skærer venstre endepanel under en vinkel på 45° , så vil denne linje ligeledes skære bagvæggen under en vinkel på 45° . Dette skæringspunkt er altså et af distancepunkterne for den del af bagvæggen, som kan ses fra højre kikhul, og skæringspunktet falder åbenbart sammen med nedlægningen af D_V^- . Tilsvarende sammenfald optræder mellem andre af forsvindingspunkterne på den fælles horisontlinje.

5. Konstruer din egen perspektivkasse

Af ovenstående fremgår, at væggenes illusionistiske fliser kan konstrueres, så snart følgende valg er truffet:

- kassens form og dimensioner
- placeringen af kikhul(ler)
- gulvets virkelige fliser



Figur 9
Udfoldet perspektivkasse konstrueret med programmet Geometer's Sketchpad.

Figur 9 viser geometrien i en udfoldet version af en moderne rektangulær perspektivkasse med ét kikhul, hvor det manglende låg fungerer som lysindtag. Kassen er konstrueret vha. geometriprogrammet Geometer's Sketchpad. Hvis figuren kopieres, klippes ud og foldes, kan man let forvise sig om, at illusionen er særdeles virksom. På tilsvarende måde kan man konstruere perspektivkasser, som er trekantede, femkantede osv. Prøv selv, og god fornøjelse!¹²

NOTER:

- ¹ Frandsen pp. 58-60, Zeeman.
- ² Andersen 1993, Andersen 2004, Frandsen pp. 50-77, Vestergaard pp. 7-8.
- ³ Andersen 1996, Elffers, Schuyt, Leeman, Baltrusaitis
- ⁴ Koslow, Brusati pp. 169-217, Koester pp. 276-285, Ebert-Schifferer pp. 272-277, Cole pp. 36-37, Elffers, Schuyt, Leeman pp. 69-97, Andersen 2004
- ⁵ Brown, Bomford, Plesters, Mills p. 62
- ⁶ I skrivende stund kan størstedelen af de seks bevarede perspektivkasser ses på følgende internetadresser:
København:
http://www.kunstkammer.dk/Schilderi/genstande_schilderi_lit.asp?ID=132
http://www.kunstkammer.dk/Schilderi/genstande_schilderi.asp?ID=247
Haag:
<http://www.museumbredius.nl/schilders/elinga.htm>
Detroit:
<http://www.dia.org/collections/euroart/dutch/35.101.html>
London:
<http://www.nationalgallery.org.uk/cgi-bin/WebObjects.dll/CollectionPublisher.woa/wa/work?workNumber=NG3832>
- ⁷ Dürer p. Q iii
- ⁸ Plinius pp. 7 og 42
- ⁹ Oplysning meddelt af museumsinspektør David Bomford, National Gallery, London
- ¹⁰ Malton plate XII fig. 58 no. 1
- ¹¹ Cole pp. 36-37
- ¹² Denne artikel er en revideret version af et foredrag holdt i 1995 på Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet. Tak til Kirsti Andersen og de tilstedeværende studerende for kritik, som forbedrede min indsigt i emnet.

LITTERATUR:

Andersen 1993

Kirsti Andersen: *Geometrien bag perspektivet*, Matematiklærerforeningen 1993.

Andersen 1996

Kirsti Andersen: *The Mathematical Treatment of Anamorphoses from Piero della Francesca to Nicéron*, *History of Mathematics: States of the Art*, New York 1996.

Andersen 2004

Kirsti Andersen:
The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge, Springer Verlag, New York, under udgivelse - formentlig i 2004.

Baltrusaitis

Jurgis Baltrusaitis:
Anamorphic Art, Cambridge 1977.

Brown, Bomford, Plesters, Mills

Christopher Brown, David Bomford, Joyce Plesters og John Mills: *Samuel van Hoogstraten: Perspective and Painting*, *National Gallery Technical Bulletin*, 11 (1987) pp. 60-85.

Brusati

Celeste Brusati: *Artifice and Illusion. The Art and Writings of Samuel van Hoogstraten*, Chicago & London 1995.

Cole

Alison Cole: *Perspektiv*, København 1997.

Dürer

Albrecht Dürer: *Unterweisung der Messung*, 1. udgave: Nürnberg 1525, facsimileudgave: Nördlingen 1983.

Ebert-Schifferer

Sybille Ebert-Schifferer et al.:

Deceptions and Illusions. Five Centuries of Trompe l'Oeil Painting, Washington 2002.

Elffers, Schuyt, Leeman

Joost Elffers, Michael Schuyt og Fred Leeman: *Anamorphosen. Ein Spiel mit der Wahrnehmung, dem Schein und der Wirklichkeit*, Köln 1981.

Frandsen

Jesper Frandsen: *Ind i perspektivet*, Systeme 1994.

Koester

Olaf Koester et al.: *Blændværker. Gijsbrechts - Kongernes Illusionsmester*, København 1999.

Koslow

S. Koslow: "De wonderlijke Perspectyfkas". An Aspect of Seventeenth Century Dutch Painting, *Oud Holland*, 82 (1967) pp.33-56.

Malton

Thomas Malton:

A Compleat Treatise of Perspective, London 1778.

Plinius

Gaius Plinius Secundus: *Græsk-Romersk Kunsthistorie. Malerkunsten og Terrakotta-kunsten*, oversat af Jacob Isager, Odense 1978.

Vestergaard

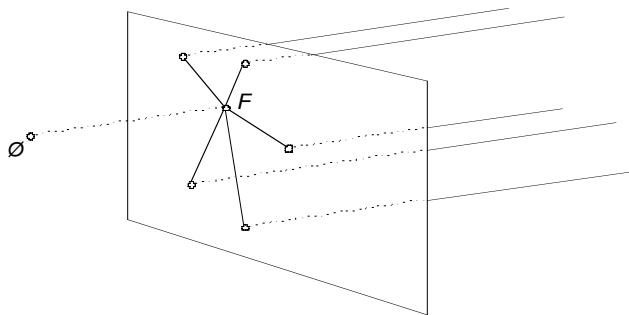
Erik Vestergaard: *Matematik i perspektiv*, Abacus 1995.

Zeeman

Christopher Zeeman: *Geometry and Perspective*, Videofilm produceret af The Royal Institution of Great Britain in association with The Department of Education and Science, BBC Milton Keynes 1986.

OM PERSPEKTIVLÆRENS GRUNDBEGREBER

Perspektivlærens mest fundamentale egenskab er, at en centralprojektion afbilder ethvert bundt af parallelle linjer fra det 3-dimensionale rum i et plant linjebundt, som har et punkt fælles - parallelbundtets såkaldte *forsvindingspunkt*. Det er her og i det følgende naturligvis en forudsætning, at de optrædende parallelbundter alle består af såkaldte *frontlinjer*, dvs. linjer, som skærer billedplanen.



Figur (i)

Figur (i) illustrerer situationen: Centralprojektion med øjepunkt \emptyset afbilder et parallelbundt af frontlinjer i et plant linjebundt med punktet F som fællespunkt.

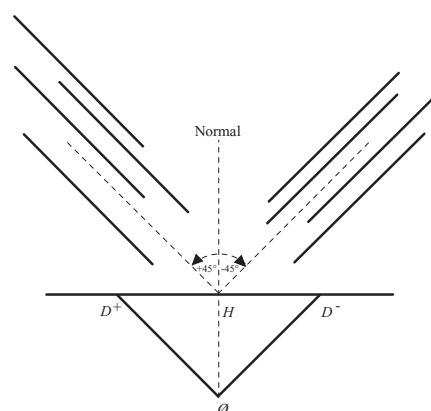
Det er let at indse, at parallelbundtets forsvindingspunkt F kan bestemmes som skæringspunktet mellem billedplanen og en hjælpelinje, der går gennem øjepunktet, og som er parallel med linjerne i parallelbundtet.

Hvis parallelbundtet specielt består af *ortogonaler*, dvs. linjer, der er vinkelrette på billedplanen, så er den nævnte hjælpelinje jo også vinkelret på billedplanen. Ortogonalernes forsvindingspunkt, det såkaldte *hovedforsvindingspunkt*, er derfor øjepunktets vinkelrette projektion på billedplanen.

Endvidere er det klart, at ethvert vandret parallelbundt har sit forsvindingspunkt liggende på den vandrette linje i billedplanen, som går gennem hovedforsvindingspunktet. Denne linje er *horisontlinjen*.

Blandt de vandrette parallelbundter er der to, som er vigtigere end alle andre, nemlig de to, som danner en vinkel på enten $+45^\circ$ eller -45° med billedplanens normaler. De to tilsvarende forsvindingspunkter er de såkaldte *distancepunkter*, der altså ligger på horisontlinjen, symmetrisk omkring hovedforsvindingspunktet.

Figur (ii) viser billedplanen set "fra oven". H er hovedforsvindingspunktet, D^+ og D^- de to distancepunkter.



Figur (ii)



3. del

Verden Rundt med Rejselegatet

(fortsat fra Matilde 18)

Tilbageblik mod Californien

D. 8 april fløj Gitte og jeg fra Los Angeles til Tokyo og nu har vi så efterhånden været tre uger her i Japan. Det hele er nyt, spændende og meget anderledes end USA, som man kunne forvente. Her prøver vi, hvad det vil sige at være fremmed, i forhold til USA hvor vi lettere passede ind i mængden. Fra den anden side af Stillehavet ser vi tilbage mod Californien og husker et mangfoldigt, mærkværdigt og smukt sted, som vi kom til at holde af.

Venice er en helt speciel del af Los Angeles. En bydel hvor der er plads til alle, fra hjemløse til stenrige verdensstjerner som Eric Clapton, der har et stort hus, en spyklat fra hvor vi boede. Som LA generelt er kvarte-

ret præget af lav bebyggelse. Men i modsætning til en stor del af byen er der ganske smukt og hyggeligt med mange særprægede træhuse og vildtvoksende haver ud til smalle gyder. Blomsterduften i disse gyder er et indtryk, der varer ved. Her bagefter er vi glade for, at det var i Venice vi valgte at bo, fremfor en mere central lokation, tættere på UCLA.

Besøg i naturen

At Californien er et attraktivt sted blev understreget af, at vi havde besøg i tre omgange. I januar var det vores venner Malene og Lars, der kom forbi. Min mor og hendes mand

kom i februar, og i marts var det så min far og hans kone. Det var anledning til at bryde ud af hverdagen og komme ud at se noget af den fantastiske natur, Californien har at byde på. Naturen er så mangfoldig og vidtspændende, at ordet fantastisk næsten er en underdrivelse. Her vil jeg blot fra vest mod øst nævne den vilde kyststrækning Big Sur mellem LA og San Francisco, Yosemite Dalen i de sneklædte Sierra Nevada bjerge og Death Valley på den anden side af bjergene, et af de varmeste og guldste steder på Jorden. Dette er blot tre af de mere kendte naturperler i Californien, der har mange andre skønne og mindre berømte naturområder at byde på.



Malene og Lars
ved Big Sur



Af: *Simon Lyngby Kokkendorff*
Department of Mathematics,
National University of Ireland, Maynooth
email: Simon.Kokkendorff@maths.may.ie

Natur var ikke noget, jeg på forhånd havde forbundet med Californien og måske især ikke med Los Angeles. Men det er i allerhøjeste grad ændret. Selv ganske tæt på byen findes naturområder, der er så vilde og uberørte, at der lever bjørne og pumaer. For en naturelsker er der et stort og indbydende tag-selv bord, som det blot kræver en smule tålmodighed med LA's heftige trafik at nå.

Omtrent 45 minutters kørsel fra Venice, nordpå langs kysten, fandt Gitte og jeg et smukt lille naturreservat, hvor vi tog ud at gå et par gange. Ved indgangen til parken hænger et skilt, der advarer om tilstedeværelsen af pumaer. Noget der kun var med til at gøre oplevelsen større, selv om

vi aldrig mødte nogen. Til gengæld havde vi en anden spændende oplevelse en dag på vej dertil. Vi er stoppet ved vejsiden for at betragte en stor flok surfere ved en strand, der åbenbart har særligt gode bølger. Jeg sidder og tænker, at surferne på afstand ligner en masse udgaver af den samme sporty, unge mandsperson, pga. de identiske bevægelser og våddragter, da Gitte pludseligt udstøder et skrig. Det skyldes tilsynecomsten af flere sorte finner, der dog viser sig at tilhøre delfiner og ikke hajer. Fra stranden i Venice så Gitte og jeg senere ved flere lejligheder flokke af delfiner lege i bølgerne. I det hele taget myldrer havet ud for LA med liv. Bøjerne ud for den kæmpestore havn

er fyldt med søløver, der soler sig ude af det kolde vand.

Afsked med Blue

Henimod slutningen af vores ophold i LA var det tid til at skille sig af med en gammel ven, vores trofaste bil Blue, der problemfrit havde ført os igennem alskens terræn. Det er sært og irrationelt, som man kan knytte sig til en samling metal, som en bil jo er. Det er nok fordi man, som Sarunas, en af bofællerne fra Maryland, bemærkede, projicerer sine urgamle forestillinger om hesten over på sit køretøj.



Søløver i LA



Gitte i Shinjuku

Ihvertfald var det vemodigt at efterlade Blue i hænderne på en brugt-vognsforhandler, et besynderligt og ikke særligt tiltalende folkefærd. Vi havde en ubehagelig oplevelse med et par af dem. Nogle unge knægte, der startede med at rakke bilen ned, for derefter nærmest at true os til at sælge for 500\$. Jeg blev ved med høfligt at afvise, men de insisterede, indtil Gitte hidsede sig op og skældte dem huden fuld. Jeg tror, de var ligeså rystede som os bagefter!

Opsamlende tanker om Staterne

Opsamlende må vi sige, at tiden i Los Angeles var virkelig god og bød på rigeligt med muligheder for os begge. For mig var det glimrende at besøge UCLA og Gitte nød godt af LA's mange kunstmuseer og gallerier.

Der er mange af de negative fordomme, som europæere har om USA, der holder stik. Den amerikanske kultur er en heksekeddel, der udspyder alt lige fra det hæsligste og dumme til det mest smukke og geniale. Til trods for alt det, man kan rette velbegrundet kritik imod, er der meget i den amerikanske kultur, som vi håber at ha' fået en vedvarende indsprøjtning af. Det er for eksempel en åbenhed og frihed, der bl.a. kommer til udtryk i kunsten, som ikke er tynget af samme højtidelige forhold til historien som i Europa. Det er også en hårdførhed, der nok kommer af landets størrelse og naturens vildskab og som måske har varet ved siden

tionertiden. Og så er USA så sammentat og multietnisk, at det som dansker er imponerende, at opleve at det kan fungere; ihvertfald i områder som f.eks. Venice.

Japan

Nu er vi så i Shinmatsuda, en mindre by ca. 80 km syd for Tokyo og ca. 10 km fra Tokai universitetet, der er mit faglige tilhørssted her i Japan; det er noget af en omvæltning. Efter at have krydset datolinien landede vi tirsdag d. 9 april i Narita, Tokyos internationale lufthavn. Vi tilbragte fire dage i Tokyo og forsøgte at holde dampen oppe og favne den japanske kultur. Et første overraskende indtryk, vi fik ved at vandre rundt i gaderne, var hvor supertrendy Tokyos ungdom er, selv i sammenligning med hvad vi havde oplevet i LA. Vi følte os en smule som uciviliserede barbarer og håbede blot, at japanerne, til trods for rygten, ikke så os sådan!

Vi var matte af jetlag og måske også mættede af indtryk og glædede os lidt til om lørdagen, hvor Tanaka ville hente os. Tanaka er vores kontakt her i Japan og han har været meget hjælpsom og imødekommende. Om lørdagen kom han så og hentede os i Tokyo og sørgede for, at vi kom til rette i lejligheden, som han havde fundet til os i Shinmatsuda.

Lejligheden er ganske fin og noget større, end vi havde forventet. Vi bor meget japansk, her er for eksem-

pel ingen stole, så vi sidder på puder på gulvet; i længden ret hårdt for usmidige danske ben! Der er udsigt til skovklædte bjerge, hvor man forestiller sig at små aber betragter en fra træ-kronerne, som i et maleri af Laura Owens (en ung LA kunster, som Gitte blev vild med). På en klar dag har man på vej til stationen udsigt til Fuji, der sneklædt og ærefrygtindgydene rager over alle de andre bjerge. Men de allerfleste dage skjuler det enorme kegleformede bjerg sig i disen.

Allerede nu har vi lært meget nyt om Japan og japanerne. Som noget helt konkret kan jeg nævne forholdet til mad. Efterhånden ved de fleste nok, at det japanske køkken er kreativt, sofistikeret og at æstetikken er i højsædet. Men vi er overraskede over, hvor alvorligt mad og madlavning tages. Det nærmer sig et religiøst forhold, der fylder meget i den gennemsnitlige japaners dagligdag. Og det ser vi som noget positivt, der står i kontrast til USA, hvor madlavning og gode råvarer også bliver værdsat og dyrket, men mere som en subkultur, på linje med andre subkulturer. Det tegner til at blive en spændende og indholdsrig tid her i Japan...

Om det faglige

Peter Petersen, der var min kontakt på UCLA, var som alle andre, jeg har mødt på den matematiske del af rejsen, åben og imødekommende. Vi havde nogle udmærkede diskussioner og det viste sig, at vi havde en fælles interesse indenfor Lorentz geometri. Det er et emne, der står mit hjerte nært,



På vej til stationen i Shinmatsuda, Fuji
i baggrunden

men som jeg ikke har arbejdet koncentreret med i længere tid, så nogle af detaljerne er lidt uklare i hukommelsen. Vores samtaler var også mere overordnede og mandede ikke ud i noget konkret. Min anden kontakt på UCLA, Robert Greene, som jeg havde mødt tidligere i Danmark, er en meget travl mand, som alle med administrative pligter i matematikverdenden, og desværre fik jeg kun snakket med ham en enkelt gang.

Det er småt med pladsen på det matematiske institut på UCLA, så jeg fik ikke noget kontor, men dog adgang til bibliotek, læserum og computer. Det, sammenholdt med at transporttiden til UCLA pga. trafikken kunne nærme sig en time, gjorde at jeg ofte arbejdede hjemme og så tog ind til UCLA, når jeg havde brug for at konsultere bøger. I perioden skete der flere fremskridt med det problem jeg arbejder på (det samme der er omtalt i den forrige rapport). Jeg er efterhånden kommet til en fase, hvor jeg er begyndt at sammenskrive resultaterne.

Udover arbejdet på min egen forskning, var der et ugentligt geometriseminar på UCLA, som jeg fulgte rimeligt trofast. I marts gav jeg selv et foredrag i seminaret. Det gik udmærket og var en fin måde at få struktureret nogle ideer. Jeg fik også lidt respons, som måske kan bruges. Bl.a. foreslog Robert Greene at Zoll-flader kunne være eksempler på mangfoldigheder af negativ type.

Distinguished Lecturers

På instituttet er der desuden et seminar med såkaldte *Distinguished Lecturers*, hvor store navne kommer på besøg og giver en række forelæsninger indenfor deres specialefelt. I februar var gæsteforelæseren Raul Bott, der har været meget indflydelsesrig indenfor algebraisk topologi. Han var en inspirerende og humoristisk forelæser. I 50'erne havde han sammen med mange andre legendariske navne opholdt sig ved Princeton og havde mange interessante anekdoter fra den tid. Det gav et inspirerende historisk vingesus.

Senere kom I.M. Singer så forbi, en af skaberne bag den såkaldte *indeksteori*. Også han var en glimrende forelæser, dog noget mere teknisk end Raul Bott. Som Bott indledte han sine forelæsninger med en anekdote efter modellen, at i ethvert godt foredrag skal alle kunne følge med de første fem minutter. De første fem minutter af det første foredrag talte Singer således om en koncertoplevelse med Charlie Parker i 40'erne i en jazzklub i LA. En historie der endda havde en pointe omkring det at lære fra sig, ganske sofistikeret. Derefter blev det meget, meget sværere at følge med.

Tokai University

På Tokai universitetet her i Japan er jeg kommet godt til rette. Jeg har fået kontorplads og internetforbindelse,

så det basale er på plads. Kontoret deler jeg med to kinesiske og en thailandsk professor. Thailændingen Pakkinee der også besøger Tanaka, og iøvrigt som noget sjældent indenfor matematik er kvinde, tog godt imod mig og viste mig rundt på campus. Hun rejser desværre tilbage til Thailand imorgen.

Ind imellem mødes jeg med Tanaka, der er ekspert indenfor studiet af *cut loci* i Riemannsk geometri. Det er et emne, som har berøringsflader til min egen forskning og jeg håber han kan hjælpe mig med et konkret problem, jeg tidligere har arbejdet på. Desuden er der et seminar i emnet to gange om ugen, som Tanaka holder for sine specialestuderende. Dette seminar følger jeg indtil videre.

Tanaka har introduceret mig til flere af de ansatte på instituttet og alle virker meget imødekommende. F.eks. får jeg for tiden hjælp af vis Professor Maeda til at opklare om en specifik formel, jeg er stødt på i mit arbejde, er ny eller kendt i forvejen. Maeda har sendt en forespørgsel til en professor på Okinawa. Den samme formel forhørte jeg mig iøvrigt om i Maryland, hvor jeg blev henvist til en person i Boston, som jeg også har kommunikeret med. Sådant et netværk af kontakter er absolut en fin gevinst ved en tur som denne.

Fortsættelse følger i næste nummer af Matilde”



Skat af Rejselegatet

For nyligt dumpede der en stor stak girokort fra Skattevæsenet ind ad døren. Her snart to år efter hjemkomst, er vores legatrejse ikke overstået endnu!

Rejselegat for Matematikere, i folkemunde kaldet "Matadorlegatet", er et fantastisk legat. Ikke alene giver det mulighed for at studere i udlandet i et helt år, men det ligger i legatets ånd, at der også er tale om en kulturel dannelsesrejse. Således godkender legatets bestyrelse ofte budgetter med luft til ferieperioder o.a.. Ydermere giver legatet mulighed for, at man tager kæreste og eventuelle børn med på rejsen. Jeg er sikker på at alle, der har læst matematik på universitet også har hørt nogle af de mange historier, der cirkulerer om dette sagnomspundne legat og dets generøsitet. Det er næsten for godt til at være sandt. Og det viste det sig også at være i vores tilfælde!

I forbindelse med at have modtaget legatet, fik jeg fremsendt lidt oplysninger angående skatteregler. Hovedbudskabet var, at rejselegater i princippet er skattefrie, men at skattespørgsmål er legatmodtagerens personlige ansvar og at man burde snakke med sin lokale skatteforvaltning inden afrejse. Jeg var nu ikke så bekymret, da jeg kendte flere tidligere legatmodtagere, som ikke havde haft problemer med skatten. Alligevel tog jeg et møde med skatteforvaltningen og gik derfra med indtrykket, at hvis blot vi kunne dokumentere vores udgifter efter hjemkomst, var alt i den skønneste orden. Sådan gik det nu ikke helt.

Et godt stykke tid efter at jeg havde afleveret selvangivelse for 2002, fik jeg et brev fra Skattevæsenet, der ønskede en forklaring på

hvor legatpengene kom fra og hvad de var brugt til. Fint nok tænkte jeg og indsendte nogle af de breve, jeg havde fået fra legatet, som forklarede hvad det hele gik ud på. Det fortsatte med flere breve frem og tilbage, hvor Skattevæsenet krævede svar på flere og flere spørgsmål. Så fik jeg et møde istand, hvor vi kunne forklare sagen ordenligt og vise vores dokumentation.

Vi begyndte at blive lidt bekymrede og prøvede at være på forkant (lidt sent måske) og sætte os mere ind i reglerne. Det viste sig at være meget svært! Det er for det første ret uklart hvilket regelsæt, man skal anvende på Rejselegat for Matematikere. Er det et forskningslegat, et studierejselegat eller bare et rejselegat? Det var en jungle, vi havde bevæget os ind i og værst af alt: det var umuligt at få nogen klare svar. Man kunne spørge om den samme ting flere gange på Skatteforvaltningen og få forskellige svar hver gang. Vi prøvede med et revisorfirma, som stort set ikke kunne hjælpe os; det kostede 2500 kr. Vi spurgte og spurgte alle der kunne/burde vide noget, men blev stort set ikke klogere. Vores fornemmelse er efterhånden, at alt afhænger af den personlige fortolkning hos den skatteperson, som tilfældigvis sidder med sagen.

Så kom der et forslag til en skatteansættelse fra forvaltningen, resultat: vi skulle betale ca. 95.000 kr i skat!! Det var noget af et chok og fik os til at arbejde endnu hårdere på sagen. Vi fik Københavns Rets hjælp inddraget, men heller ikke deres argumenter rokkede ved Skattevæsenets holdning. Den foreløbige kendelse blev, at vi skal betale 95.000 kr i skat. Det har vi så anket og har ansat en advokat, til at kigge på sagen, som formentlig trækker ud længe endnu.

Man kan nok sige, at vi var naive og godtroende og ikke orienterede os godt nok om reglerne inden afrejse. Men med mit kendskab til andre legatarers oplevelser, troede jeg ikke på, at der ville blive problemer. Jeg synes nok, vi manglede lidt information fra legatets side. Det bliver administreret af et stort advokatfirma, som burde ligge inde med bedre viden. Men informationen er nok bygget på den erfaring, at det som regel ikke er noget stort problem med skatten. Det bizarre er, at der er ganske simple ting, man kan gøre for at undgå at betale skat, hvis altså man er advaret på forhånd. Den fulde skattepligt til Danmark hænger sammen med om man har bopæl i landet. Opgives den ophører den fulde skattepligt også.

Et springende punkt i vores tilfælde er, at Skattevæsenet mener at alle de udgifter (halvdelen af alt!) som Gitte har haft, er skattepligtige, noget vi ikke i vores vildeste fantasi havde forestillet os. Det ville faktisk have været mere fordelagtigt rent skattemæssigt, hvis jeg havde brugt alle pengene selv og Gitte var blevet i Danmark og havde draget fordel af velfærdssystemet! Men også dette punkt afhænger helt af skattefolkens personlige fortolkning.

Jeg håber ikke, vi kommer til at betale 95.000 kr, det er mere end min studiegæld, men selv hvis vi gør, synes jeg trods alt, vi har fået noget for pengene. Men et godt råd til fremtidige modtagere af Rejselegatet og alle andre der skal på studieophold i udlandet: *orienter jer meget, meget grundigt om reglerne inden I tager afsted og få helst noget på skrift fra Skattevæsenet, ihvertfald hvis I bor i Københavns Kommune!*

Matematiske institutioner præsenterer sig:



Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet

Polyteknisk Lærestanstalt blev oprettet i 1829, og af de seks der udgjorde lærerstaben var én matematiker. Undervisningen omfattede matematisk analyse, og var formodentlig det første egentlige kursus i videregående matematik i Danmark. I 1942 oprettedes Laboratoriet for Anvendt Matematik. Navn og struktur har skiftet nogle gange side da. Den sidste større forandring skete i 2001, hvor de institutter der havde ansvaret for diplomingeniøruddannelsen blev sammenlagt med de øvrige institutter. Herved fik Institut for Matematik 8 nye medarbejdere samt ansvaret for matematikundervisningen på diplomingeniørstudiet. I 2004 består instituttet af 29 VIP ansat på DTU-midler, 4 VIP i eksternt finansierede stillinger, 6 TAP, og 8 ph.d. studerende.

Instituttets virke er i høj grad præget af tilhørsforholdet til et teknisk

universitet. Undervisningen henvender sig til ingeniørstuderende, der for de flestes vedkommende har brug for matematik som et støttefag. Den indledende undervisning spiller derfor en stor rolle, og det er en udfordring at tilpasse den løbende til de studerendes forudsætninger og aftagernes behov. I 2000 søsatte vi en stor revision af den indledende matematik på

civilingeniørstudiet. Flere mindre kurser blev samlet til ét stort, Matematik 1, der benytter sig af mange pædagogiske metoder: Forelæsninger, klasses timer, selvstudieperioder, konsultation og projektarbejde. Evalueringen omfatter skriftlige eksaminer, projektrapporter og mundtlig projektfremlæggelse. Et bærende element i undervisningen er brugen af matematikprogrammet Maple. Dette giver dels mulighed for at gøre projektarbejdet mere realistisk, da regningerne for større matematiske modeller kan overlades til computeren, dels at koncentrere den daglige indsats omkring den matematiske teori i stedet for regneteknikker. Endelig er Maple et fremragende pædagogisk redskab. Man kan eksperimentere og tegne, og især i forbindelse med funktioner af flere variable og rumgeometri er der store muligheder.

Projekterne i Matematik 1 tager udgangspunkt i en teknisk anvendelse, og er udarbejdet i tæt samarbejde med andre institutter på DTU eller med fagfolk uden for DTU. Projektarbejdet foregår som gruppearbejde over tre uger, hvor den sædvanlige



Af: institutleder Morten Brøns
e-mail: m.brons@mat.dtu.dk



En ny bygning med faciliteter til klasseundervisning og projektarbejde er netop taget i brug.

undervisning er aflyst. Der afleveres en fælles rapport fra gruppen, og der afholdes en mundtlig eksamen på baggrund af rapporten, hvor der gives individuelle karakterer. Der er kort tid til rådighed for projektarbejdet, og derfor er det lagt i ret faste rammer. For at understrege dette, og specielt at projekterne ikke indeholder et meget væsentligt aspekt af sædvanligt projektarbejde, nemlig en problemformulering, har vi valgt at kalde dem *projekt opgaver*. Til hver opgave er der udarbejdet en køreplan, der ved en række småopgaver viser en mulig vej gennem projektet. I praksis bliver rapporterne meget forskellige, og de studerende går op i opgaverne med liv og sjæl. Opgaveformuleringerne fra foråret 2003 kan findes på www.mat.dtu.dk/education/01005/proj03_skema.html. Efter lidt indsvingning mener vi at have fundet en form på Matematik 1 der er meget tilfredsstillende, og forhåbentlig kan holde nogle år. På diplomingenørstudierne har vi netop indført et nyt fælles obligatorisk kursus, i folkekunde DiploMat, med samme pædagogiske elementer. Det ser ud til at være vellykket.

Udover den indledende undervisning har instituttet en række videregående kurser, og et beskedent antal civilingeniørstuderende vælger at skrive deres speciale (eksamensprojekt) i matematik.

Instituttets forskning foregår indenfor fire områder.

- Anvendt funktionalanalyse: Partielle differentialligninger, optimalt design, wavelets og generaliseret Fourieranalyse.
- Diskret matematik: Grafteori, kodningsteori, kryptologi.
- Geometri: Topologi og geometri af kurver, flader og mangfoldigheder, herunder knudeteori og Computer Aided Geometric Design.
- Dynamiske systemer: Sædvanlige differentialligninger, diskrete dynamiske systemer, teoretisk mekanik, bifurkationsteori.

En væsentlig del af instituttets forskning foregår i samarbejde med andre institutter på DTU. Et eksempel på et forskningssamarbejde er beskrevet i boksen.

I 2001 overgik DTU fra universitetsloven til den særlige DTU-lov som

Endnu et tværinstitutionelt forskningsprojekt

Af Adjunkt Peter Røgen

Når en ny type medicin ønskes fundet, er et tilbagevendende problem at konstruere en molekylær struktur, der kan binde til netop ét forudbestemt molekyle. På en af de i Danmark årligt afholdte European Study Group with Industry, ESGI, ønskede Robert Bywater, Novo Nordisk, at få en effektiv metode til at manøvrere i rummet af embeddede grafer, der så skulle svare til atomer og deres covalente bindinger. Udfordringen blev taget op af blandt andre Thomas Poulsen, Institut for Mekanik, Energi og Konstruktion, DTU og Poul G. Hjorth og Peter Røgen Institut for Matematik, DTU. Dette startede et nyt samarbejde mellem disse DTU institutter, hvor metoder kendt fra Optimalt Topologisk Design, der med stor succes bliver dyrket i samarbejde mellem disse to institutter for at optimere form og topologi af makroskopiske konstruktioner, nu er blevet tillemptet til at kunne finde en embedded molekylær-graf, der, dels passer til det forudbestemte molekyle, og dels f.eks. maksimerer antallet af sine covalente bindinger for et givent antal "atomer" i grafen. På sigt forventes metoden at give mulighed for at søge molekylær-grafer med en række på forhånd specificerede egenskaber. F.eks. vil ønsker om at molekylet skal have en given fleksibilitet og at det ikke ligner kendte giftige eller patenterede strukturer kunne imødekommes.

gjorde universitetet til en selvejende institution med bestyrelse og ansatte ledere. Da den nye universitetslov er modelleret over DTU-loven, vil det nok interessere de universitetsansatte Matidelæsere at få et indtryk af hvad de har i vente.

Institutlederen er ansat af rektor og bestyrer instituttet under mål- og rammestyning. Der tildeles instituttet en samlet årlig rammebevilling som dækker både løn og drift. Samtidig fastsættes i samarbejde med direktionen målene for instituttets virke i en glidende 4-årig periode i form af en kontrakt, "Udviklingsmål og Virkemidler". Inden for den økonomiske ramme har institutlederen meget frie rammer til at opnå målene. Der er ingen skellen mellem udgifter til løn og drift, hvilket giver en meget nyttig fleksibilitet, og der er intet ansvar for den daglige drift overfor en bestyrelse eller et institutråd. Institutet har ganske vist en medarbejder- og studentervalgt bestyrelse, men den

har alene indstillingsret over for instituttets strategi. Under alle omstændigheder er dens dage talte, da den vil forsvinde når DTU går over til den fælles universitetslov og får vedtægter efter denne.

"Udviklingsmål og Virkemidler" beskriver dels strategien for instituttets udvikling, dels en række konkrete mål i form af STÅ produktion, antal artikler i internationale tidsskrifter omfattet af Citation Index og antal opnåede citationer, omfanget af eksterne bevillinger og meget andet. Der er årlige rapporteringer om mål-opnåelsen inden næste års ramme tildeles. Denne institutleder er taknemmelig for en medarbejderskare, der har leveret hvad han har lovet.

"Udviklingsmål og Virkemidler" kan ses på www.adm.dtu.dk/intern/adm/1_sek/udviklingsmaal2003/mat-2003.pdf.

Hjemmeside: www.mat.dtu.dk.



Af: Carl Winsløw
Center for Naturfagenes Didaktik, KU
email: winslow@naturdidak.ku.dk

Abelseminar 03 på Schæffergården

"Kan avanceret matematik overhovedet formidles?" Dette var et af de 5 tunge spørgsmål, som verdenshistoriens første *Abelseminar* drejede sig om. Seminaret er tænkt som en opfølgning på uddelingen af Abelpriisen, der som tidl. omtalt her i bladet blev uddelt for første gang i 2003. Det blev holdt den 6. oktober på Schæffergården, og tiltrak en bred kreds af matematikere, matematikformidlere og matematikbrugere fra nær og fjern. Blandt de indbudte talere var naturligvis prisvinderen, Jean-Pierre Serre. Han svarede på det nævnte spørgsmål ved at skitsere tre forskellige beviser for algebraens fundamentalsætning på 30 minutter.

Talerlisten var i øvrigt lang, idet de øvrige oplæg var på bare 15 minutter hver, i princippet i hvert fald. Blandt de mere optimistiske og farverige udmeldinger noterede Deres udsendte bl.a.:

- ◇ "det drejer sig om at få matematikken ind i almindelig samtale", og i samme åndedrag: "det er svært at være pessimistisk på matematikkens vegne" (Vagn L. Hansen, DTU);
- ◇ matematikkonkurrence som det norske initiativ Kapp Abel er en succes "når det gælder om skabe begejstring omkring matematisk aktivitet" (Ingvil Holden, NTU).

Andre anlagde mere pessimistiske toner, som Svein Sjøberg (Oslo U.), der i et i øvrigt ganske muntert oplæg præsenterede evidens for fagets rekrutteringsproblemer, og spurgte: "er matematik i strid med ungdomskulturen?".

Hanne Skou fra Dansk Industri insisterede på vigtigheden af "et solidt

fagligt fundament fra folkeskolen", et budskab som fandt genklang også i oplægget fra den norske arbejdsgiverforerings direktør, Sigrun Vågeng. Andre erhvervsfolk, som Peter Landrock (Cryptomatic), Morten C. Jørgensen (Novo) og Ove Poulsen (NKT) gav mere specielle bud på, hvad virksomhederne bruger og efterspørger af matematikfaget. Endelig blev der givet eksempler på eksperimenterende matematikundervisning af bl.a. Martin Bendsøe (DTU) og Carl P. Knudsen (Helsingør Gymnasium).

Som dette korte referat antyder, kom mange synspunkter til orde, og selvom der også var mange spørgsmål og kommentarer fra salen, så kunne man nok til næste gang overveje færre oplæg om færre men mere præcise temaer – og mere tid til diskussion.

Af programmet fremgår i øvrigt, at seminaret var "arrangeret af den kgl. norske ambassade i København og Fondet for dansk-norsk samarbejde, i samarbejde med Abelpriisen og Dansk Matematisk Forening".



Professor Serre ved taolen.

Verbale snapshots fra Schæffergården 6. oktober 2003 (noteret af Jørn Børling Olsson)

Proofs is the heart of mathematics (Serre)

Mathematical common sense is very useful (Serre)

Make your proofs so clear that the reader believes he could have done them himself (Bo Jacobsen)

There is no substitute for engaged mathematics teachers. (Vagn Lundsgaard Hansen)

Det er vigtigt at holde fast i nørd-aspektet af matematik. Vi er alle en slags nørder (Søren Lundbye-Christensen)

Der er ingen unge i dag, der kan lægge 2 og 2 sammen uden en lommeregner (Morten Colding Jørgensen)

Den matematik, vi lærer, er meget enøjet (Morten Colding Jørgensen)

Det er lidt med matematik ligesom med kvinder. Det kan være lidt besværligt ind imellem. Men det går slet ikke uden. (Hanne Skov)



En omstillingstid

Der er for tiden så mange reformer og initiativer i grøde på uddannelsesfronten i Danmark – alle med betydning også for matematikundervisningen – at vi nøjes med korte faktuelle versioner:

OECD rapport om danske universiteter

I en nylig offentliggjort evaluering om de danske universiteter har et panel af udenlandske eksperter kortlagt en række forhold vedr. disses aktiviteter og indretning, herunder deres funktion som uddannelsesinstitutioner. Der siges meget positivt om kvaliteten af forskningen og uddannelserne som de ser ud nu. Der peges også – særlig i et fremadrettet perspektiv – på en del problematiske forhold, herunder:

- Relativt få danske unge får en universitetsuddannelse (i forhold til andre OECD-lande)
- Frafaldet i uddannelserne er (for) stort
- De faktiske studietider er for lange (og mange kommer for sent i gang)
- Der er behov for målrettet udvikling af undervisningen

Rapporten indeholder en række anbefalinger, både vedrørende universiteternes egne opgaver og vedr. ekstern evaluering. Rapporten kan downloades fra nettet:

<http://www.videnskabsministeriet.dk/fsk/div/oecd/OECDevalueringafdedanskeuniversiteter.pdf>

Ny bekendtgørelse om bachelor- og kandidatuddannelser

Et udkast til ny bekendtgørelse for universiteternes bachelor- og kandidatuddannelser er i øjeblikket til høring. Det lægger bl.a. op til at en højere grad af uafhængighed mellem de to typer af uddannelser i den forstand at de skal kunne kombineres på tværs af institutioner og faglige profiler. Det ligger bl.a. i kortene (og til dels paragrafferne) at uddannelserne i specielt "magisterfagene" skal tones mere tydeligt mod erhvervsfunktioner, "herunder gymnasieskolen", som det særskilt præciseres for cand. scient. (og mag.) uddannelserne. Nye studieordninger er under udvikling ved universiteterne.

Udkastet ligger på <http://www.vtu.dk//fsk/div/unisoejlen/Bkgombachelorogkandidatuddan.pdf>

Gymnasiereformen

Gymnasiereformen, hvis hovedelementer er det halvårslige grundforløb og de 2 1/2-årige studieretninger, vedtages i løbet af foråret 2004 og implementeres fra sommeren 2005. Reformen indebærer en række nye krav om bl.a. tværfaglighed og nye arbejdsformer i undervisningen, som utvivlsomt vil få vidtrækkende konsekvenser også for faget matematik. En række udviklingsarbejder og forsøg er igangsat.

Mere information om gymnasiereformen: <http://us.uvm.dk/gymnasie/reform/>



Sammenhængene

Undervisningsministeriets nye portal "EMU"

<http://www.nyfaglighed.emu.dk> er en god kilde til overordnede tanker bag reformerne. En oplagt sammenhæng der kalder på yderligere reformer angår *læreruddannelser*. En arbejdsgruppe under undervisningsministeriet arbejder på en redegørelse dette område, som udover universiteternes nuværende domæne omfatter uddannelsen af folkeskolelærere og pædagoger. Redegørelsen forventes at foreligge inden eller omkring udgivelsen af dette nummer.

Sagerne følges op i kommende numre af Matilde.

Hva' en minister ska' ku'

Tine Wedege,
Roskilde Universitetscenter
tiw@ruc.dk



"Det er vigtigt at de unge kommer i gang så hurtigt som muligt." Sådan begyndte videnskabsminister Helge Sander, da han den 28. august 2003 i TV-avisen blev præsenteret for resultaterne fra en splinterny undersøgelse om frafald på de videregående uddannelser. Hovedresultatet var at de ældre studerende klarer sig markant bedre end dem der begyndte studiet umiddelbart efter studentereksamen. Blandt de studerende der begyndte som 18-21 årige i 1998 var der et frafald på 31%, mens der blandt dem der startede som 23-27 årige kun var et frafald på 23%.

Frafald		
1998	31%	23%
	18-21 årige	23-27 årige

Kilde: Dansk Institut for Computertøttet Journalistik

Ministerens kommentar til nyheden lød sådan:

"Der er jo ikke nogen der siger at de unge der er kommet bedre igennem, fordi de er startet senere, ikke ville have sig klaret sig lige så godt hvis de var startet umiddelbart efter gymnasiet."

Dette udsagn vil jeg lade stå et øjeblik, og så gå et par år tilbage i tiden, hvor en anden nyhed blev annonceret i Undervisningsministeriets nyhedsbrev den 29. januar 2001 og samme dag i Politiken. Den handlede om de studerendes alder og deres gennemsnit ved studentereksamen. Undersøgelsen var udført for Undervisningsministeriet, og hovedresultatet (at de yngste studenter i 1999 fik betydeligt bedre karakterer i gymnasii-

et end gennemsnittet) blev serveret som argument i debatten om hvornår børn skal begynde i skolen:

"Vores undersøgelse handler ganske vist ikke om dette, men den viser i hvert fald, at der er en gruppe unge, som bestemt ikke har taget skade af at begynde tidligt i skolen - måske snarere tværtimod", udtalte Tom Sinding fra Helsingør Gymnasium, der havde været med til at gennemføre undersøgelsen. - Dette udsagn vil jeg også vende tilbage til senere.

Resultater fra statistiske undersøgelser i uddannelsessystemet bruges ofte som argumenter i den politiske debat - eller som påskud til at realisere allerede udtænkte politiske tiltag. Det kan i det mindste være vanskeligt at forestille sig at undervisningsminister Ulla Tørnæs gør geografi til eksamensfag i skolen, alene fordi 127 gymnasieelever havde en dårlig svarprocent i Politikens quiz.

Minister og ministerium skal her kun opfattes som billede på de mange meningsdannere og beslutningstagere der er uddannet i det danske uddannelsessystem, og som derfor har mindst 1500 timers matematikundervisning bag sig. Min overskrift er inspireret af titlen på Philip J. Davis' manuskript, omdelt på årsmødet 2000 i Dansk Matematisk Forening, var "What should the President and the Prime Minister Know about Mathematics? Or The Necessity for Meaningful Popularizations."

For nylig havde Davis i det internationale tidsskrift *For the Learning of Mathematics* en kommentar, der kan ses som et provokerende indlæg i den aktuelle debat om almindelig dannelse som mål og begrundelse for matematikundervisning. Her er hans overskrift "Mathematics is not required." Til trods for den giver Davis en mini-

malliste over kernen af det alle ska' ku' efter hans mening (f.eks. i relation til emnet her: basal sandsynlighed og statistik), men tilføjer så:

"Every time I make such a list, I find it grows longer and longer. But what I most certainly want - and this is not now core material - is for students to acquire an appreciation of the role that mathematics plays in today's highly mathematized civilization; what it does for us and what it does to us." (Davis, 2003:42).

Matematikdidaktiske undersøgelser af almindelige arbejdsfunktioner på et højteknologisk arbejdsmarked viser at der er brug for enkel matematik, men at den til gengæld indgår i komplekse sammenhænge (Wedege, 2002). Det er også enkel matematik som er nødvendig for at reflektere over de to nyheder, der blev serveret som kommentarer til spørgsmålet om sammenhæng mellem alder og succes i uddannelsessystemet. Matematikken drejer sig stort set om forståelse og håndtering af procentbegrebet, enkle grafer og tabeller. Den matematiske aktivitet er dog kun en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for at kunne give mening til tallene.

Refleksioner om sammenhænge kræver indsigt i den virkelighed tallene handler om. Og det i en grad så man kan vurdere hvad der er nødvendige baggrundsvariable at inddrage. Videnskabsministerens kommentar til frafaldet kunne f.eks. have fortsat med en bemærkning om at der er forskel på frafaldet på de enkelte uddannelser og forskel på de studerendes gennemsnitlige alder ved starten af forskellige uddannelser.

Ved formidling og tolkning af undersøgelsens resultater skete der imidlertid en sammenblanding mel-

forts. side 36



Tomas Højgaard Jensen er pr. 1. februar 2004 ansat som adjunkt ved Institut for Curriculumforskning, Forskningsenheden for matematikkens didaktik, Danmarks Pædagogiske Universitet.

Tomas er kandidat i matematik og offentlig driftsøkonomi fra Roskilde Universitetscenter med speciale i matematikkens didaktik (1998). Han har siden været ph.d.-

stipendiat indenfor samme forskningsfelt ved IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, med et projekt, som han i øjeblikket er ved at lægge sidste hånd på, om problemløsning og modellering i det almene gymnasiums matematikundervisning. Sideløbende hermed har han arbejdet med kompetencebeskrivelser af matematisk faglighed, bla. i det såkaldte KOM-projekt, og har været medforfatter til lærebøger beregnet for grundskolens matematikundervisning.

Desuden holder han blandt meget andet af alle former for boldsport, både i stående og i liggende position, og af livet med konen Karen og datteren Andrea.



Steffen L. Lauritzen, Aalborg Universitet, tiltræder den 1. maj 2004 som Professor of Statistics ved Universitetet i Oxford, England og Fellow ved Jesus College, samme sted.

Det er tale om en nyoprettet stilling ved Department of Statistics i Oxford, som i forvejen består af Sir David Cox (Professor emeritus),

Peter Donnelly (Professor of Statistical Science), Jotun Hein (Professor of Bioinformatics), Brian Ripley (Professor of Applied Statistics) og Bernard Silverman (Master of St. Peter's College) samt mange andre.

Steffen er oprindelig uddannet ved Københavns Universitet, hvorfra han blev cand. stat. 1972, lic. stat. 1975 og dr. scient. 1982. Her var han også ansat som kandidatstipendiat, adjunkt og lektor, indtil han i 1981 tiltrådte sin nuværende stilling som professor ved Aalborg Universitet.

I løbet af årene har Steffen virket som gæsteprofessor ved en række universiteter i udlandet, senest som leder af et forskningsprogram indenfor grafiske modeller ved Fields Institutet i Toronto, Canada, i efteråret 1999. Grafiske modeller er Steffens hovedområde.

Han har modtaget flere internationale priser og hædersbevisninger, herunder i 1996 "The Guy Medal in Silver" fra Royal Statistical Society, hvor han også blev udnævnt til æresmedlem i 1992.

fors. fra s. 35

lem statistiske korrelationer og årsag-virkning sammenhænge. Det samme skete i Undervisningsministeriets undersøgelse om alder og karakterer. Var det *fordi* de studerende var startet tidligt i skole og senere var gået direkte fra 9. klasse til 1. g, at deres karakterer var bedre? Eller kunne man forestille sig at den professionelle vurdering og vejledning ved skolestart og ved indgangen til gymnasiet havde bidraget til at sortere eleverne? Denne fejltolkning af data minder mig om den hvor læsevanskeligheder hos voksne blev begrundet med deres relativt korte tid i uddannelsessystemet.

I medierne kan man næsten dagligt se eller høre sådanne tankevækkende eksempler. Inge Henningsen og jeg har i heftet "Månedens tal" (2000) samlet og kommenteret nogle stykker af den slags nyheder som beslutningstagere på mange forskellige niveauer skal kunne forholde sig reflekterende til. Også ministeren skal vide at alt ikke er givet med tallene. At de matematiske aktiviteter

skal suppleres med en kritisk vurdering der bl.a. bunder i viden om det felt den kvantitative undersøgelse søger at oplyse.

Referencer

Davis, Philip J. (2003). Mathematics is not required. (Communication). *For the Learning of Mathematics*, 23(1), 41-42.

Henningsen, Inge og Wedege, Tine (2000). *Månedens tal 2000 - 12 oplæg om talbrug i medierne*. Center for forskning i matematiklæring, RUC, Skrift nr. 28.

Wedege, Tine (2002). Numeracy as a basic qualification in semi-skilled jobs. *For the Learning of* 22(3), 23-28.

Begivenheder

ved Poul Hjorth



4ecm - 4th European Congress of Mathematics, Stockholm 27 juni - 2. juli 2004.

The Fourth European Congress of Mathematics, 4ECM, will be held between June 27 and July 2, 2004 at Aula Magna. Aula Magna is located on the Frescati campus of Stockholm University. It is easily reached from the central Stockholm, both by public transportation and by car.

The address is: Stockholm University, Frescativägen 10, SE-106 91 Stockholm, Sweden.

For further information, please visit the website:

<http://www.math.kth.se/4ecm/>

ICME 10 (10th International Congress on Mathematics education) afholdes,

som tidligere omtalt i Matilde, på DTU i perioden 4.-11. juli 2004.

Interesserede bør være opmærksomme på flg. tidsfrister:

28/2: frist for registrering til lavsats (DKK 3100)

31/5: frist for registrering til mellesats (DKK 3600)

Registrering og information via hjemmesiden: www.icme-10.dk

3rd Danish Symposium on Applied Analysis

"Numerical methods in areas of fluid dynamics, electromagnetics and finance" August 25-28, 2004

Institute for Mathematical Sciences (KU) is happy to host the 3rd Danish Symposium on Applied Analysis.

The primary goal of the symposium is to expose a network of Danish researchers to new computational (and analytical) developments in selected areas of fluid dynamics, electromagnetics and finance.

This is accomplished by a limited number of invited presentations by relatively senior experts in these fields. A secondary goal is to permit some of the junior researchers in this network (the SNF-PDE-network) to present their own work in a "friendly international atmosphere".

Organized by the Danish SNF-PDE-group.

The meeting is sponsored by the Danish Natural Science Research Council (SNF) and by MaPhySto. The Institute for Mathematical Sciences is providing practical help and the fuel on which math is spawned, i.e. the coffee.

Held at the Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Universitetsparken 5, DK-2100 Copenhagen Ø, Denmark. Tel: (+45) 35 32 06 75, Fax: (+45) 35 32 06 78

Web page:

<http://www.math.ku.dk/conf/3dansymp/>

MaPhySto:

Workshop on Lévy Processes and Bases: Theory and Applications

Thursday February 26 - Friday February 27, 2004

Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus

The workshop is organized jointly by MaPhySto (The Danish National Re-

search Foundation: Network in Mathematical Physics and Stochastics) and The Thiele Centre for Mathematics in Science.

ANYONE INTERESTED IS WELCOME TO PARTICIPATE - and if you would like to present a talk, you are very welcome to contact us.

See: <http://www.maphysto.dk/events2/LTAA04/>

Workshop on Aspects of Large Quantum Systems Related to Bose-Einstein Condensation

Thursday April 15 - Saturday April 17, 2004

Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus

Abstract:

The purpose of the workshop is to present results on, and to discuss, aspects of large quantum systems related to Bose-Einstein condensation.

The aim is to consider three themes: (1) Existence of BEC (2) Dimensionality (3) Dynamics and cooling from three points of view: (1) Mathematical (2) Theoretical (3) Experimental.

The workshop will gather participants covering all three points of view, with the hope of furthering interaction between the participants, and a fruitful exchange of ideas and possible directions of future research.

See: <http://www.maphysto.dk/events2/LQSBEC04/index.html>

16. RUC-modeldag: Matematiske modeller i kemi

torsdag d. 29. april 2004 9:00-16:00 RUC hus 27

Modeldag(x) er en række heldagsseminarer afholdt gennem årene ved IMFUFA, RUC. Institutet er bygget op omkring aktiviteter i og om matematik og fysik. Og undersøgelsen af matematiske modellers forskelligartede videnskabssteoretiske status og samfundsmæssige betydning har været en af IMFUFA's vigtige om aktiviteter på tværs af matematik og fysik.

Se: <http://mmf.ruc.dk/SEMINAR/modeldag16.htm>



Aftermath løsninger

Alle opgaver er løst af Ebbe Thue Poulsen.

Fra nøddeknækkeriet

To små egern sad med hver sit lager af nødder. Den ene sad med et lager på 200 hasselnødder, mens den anden havde samlet sig et blandet lager af 99 valnødder og 100 hasselnødder.

Nu tog det andet egern hver dag to nødder fra sit lager. Hvis de to nødder viste sig at være af samme slags, så spiste den ene nød og gav den anden til sin kammerat, der spiste den og til gengæld betalte med en hasselnød, som det andet egern kastede ned i sin bunke. Hvis derimod de to nødder viste sig at være af hver sin slags, så spiste det andet egern hasselnødden og lagde valnødden tilbage i bunken. Imens spiste det første egern så en af sine egne hasselnødder.

Hver dag blev hver af bunkerne én nød mindre, så efter 198 dage havde det andet egern kun én nød tilbage.

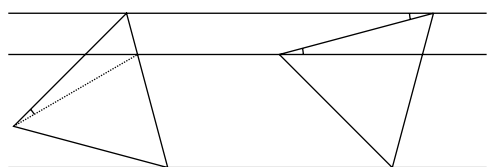
Var det en hasselnød eller en valnød?

Det var en valnød.

Hver dag bliver antallet af valnødder enten uforandret eller reduceret med to. Så når vi begynder med et ulige antal, må vi ende med én, som vi ikke kan slippe af med.

Et trekantet problem

Der er givet tre parallelle linier. Man skal så i al enkelhed konstruere en ligesidet trekant, der har et hjørne på hver af de tre parallelle linier.

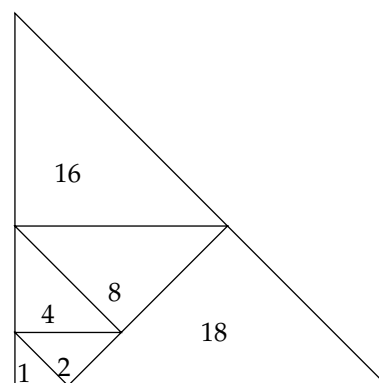


Vi tegner en helt vilkårlig ligesidet trekant med hjørner på de to yderste af de parallelle linier. Så er den anførte vinkel på venstre trekant uafhængig af trekanten, den afhænger kun af forholdene mellem afstandene mellem de parallelle linier.

For derfor at konstruere løsningen begynder vi med vinkelen foroven til højre. (Vinkelen er fundet til venstre.)

Man skal dele en retvinklet, ligebeinet trekant i så få forskellige, retvinklede, ligebenede trekanter som muligt, men mindst to.

En sådan trekant med arealet 49, altså sidelængde $7\sqrt{2}$, deles i små ligebenede, retvinklede trekanter med areaerne 1, 2, 4, 8, 16 og 18.



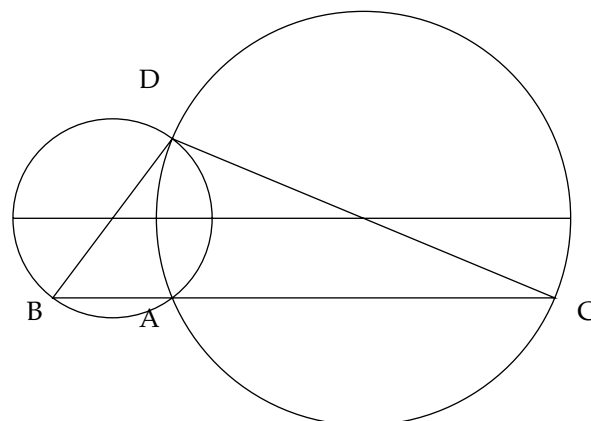
Opvarmning til søs

Denne opgave har jeg engang set i normat.

I et koralrev af form som to cirkelbuer, der er på vej til at gribe ind over hinanden, skal man finde en ret linie der er så lang som muligt.

Banen skal vælges parallel med centerforbindelseslinien. Lige gyldigt hvordan vi lægger en ret linie gennem A, så vil vinklerne C og D blive de samme, nemlig halvdelen af buen AB.

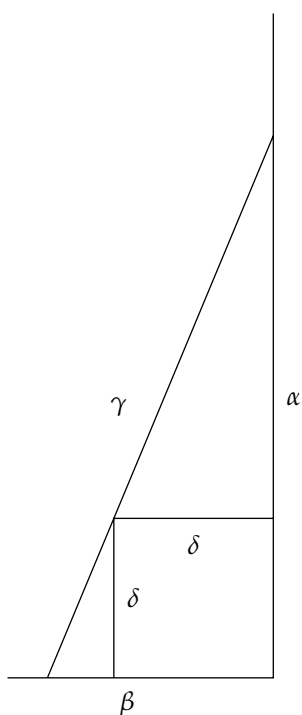
Alle mulige trekanter $\triangle BCD$ bliver derfor ensvinklede, så vi får den længste side CD ved at vælge siden BC eller BD længst mulig. Dvs. som diameter i den pågældende cirkel. Det bliver de heldigvis samtidig.



Nye opgaver

Stigen

En stige på 221 cm står op ad en mur, så den netop rører en kasse, der er 60 cm på hver led og som står klos op ad muren. Hvor højt op ad muren kan stigen nå?



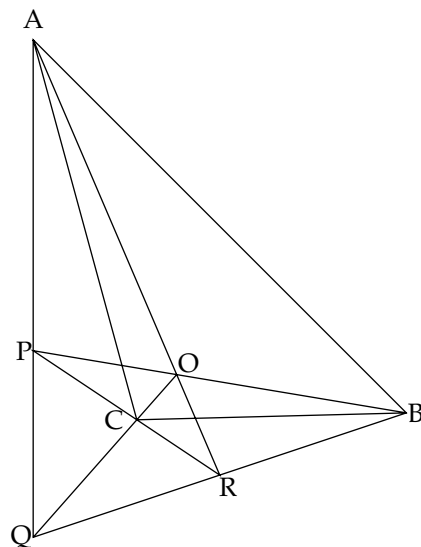
Stigerne

En stige af længde ... står stejlt op ad muren, så den netop rører en kasse, der har form som en terning, og som står klos op ad muren. Stigens fod er ... fra muren. Hvor stor er kassen?

Denne opgave blev stillet tre gange med forskellige mål for ..., men alle målene var hele tal i cm. Svarene var også hele tal i cm.

Når svarene alle tre gange var det samme, og stigerne alle var mindre end 840 cm, hvor stor var så kassen?

En trekant



Trekkanterne $\triangle OPQ$, $\triangle OQR$ og $\triangle PQR$ har hhv. arealerne 4, 5 og 6. Hvor stor er så $\triangle ABC$?

Perspektivkasser



Samuel van Hoogstratens perspektivkasse, ca. 1655-1660. (National Gallery, London).
Gengivet efter plate V i Celeste Brusati: *Artifice and Illusion. The Art and Writings of Samuel van Hoogstraten*, Chicago & London 1995, med forfatterens tilladelse.